Математические методы и модели поддержки принятия решений

ТЕМА 1: ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ КУРСА.

Курс «Математические методы и модели поддержки принятия решений»

Посвящен изучению и освоению методов, помогающих лицу, принимающему решения, находить и использовать данные, модели для решения слабоструктурированных проблем и выделения эффективных решений из множества альтернатив.

Целью освоения курса

- Является формирование профессиональных компетенций в части разработки и анализа математических моделей, используемых при поддержке принятия решений, а также формирование у магистрантов знаний и компетенций в области методов поддержки принятия решении па основе компьютерных технологий и принципов построения компьютерных систем поддержки принятия решений.

Задачи освоения курса:

- Сформировать представление о процессе принятия решений.
- Сформировать представление об условиях и задачах принятия решений.
- Освоить методы формализации и алгоритмизации процессов принятия решений.
- Развить навыки анализа информации, подготовки и обоснования управленческих решений; углубить представление о функциях, свойствах, возможностях системами поддержки принятия решений.
- Сформировать навыки использования систем поддержки принятия решений для решения прикладных задач.

Основные понятия курса

- Термин **математические методы** понимается как комплекс прикладных и математических научных дисциплин, объединённых для изучения систем и процессов.
- Под **системой** будем понимать комплекс взаимосвязанных элементов вместе с отношениями между элементами и между их атрибутами. Исследуемое множество элементов можно рассматривать как систему.

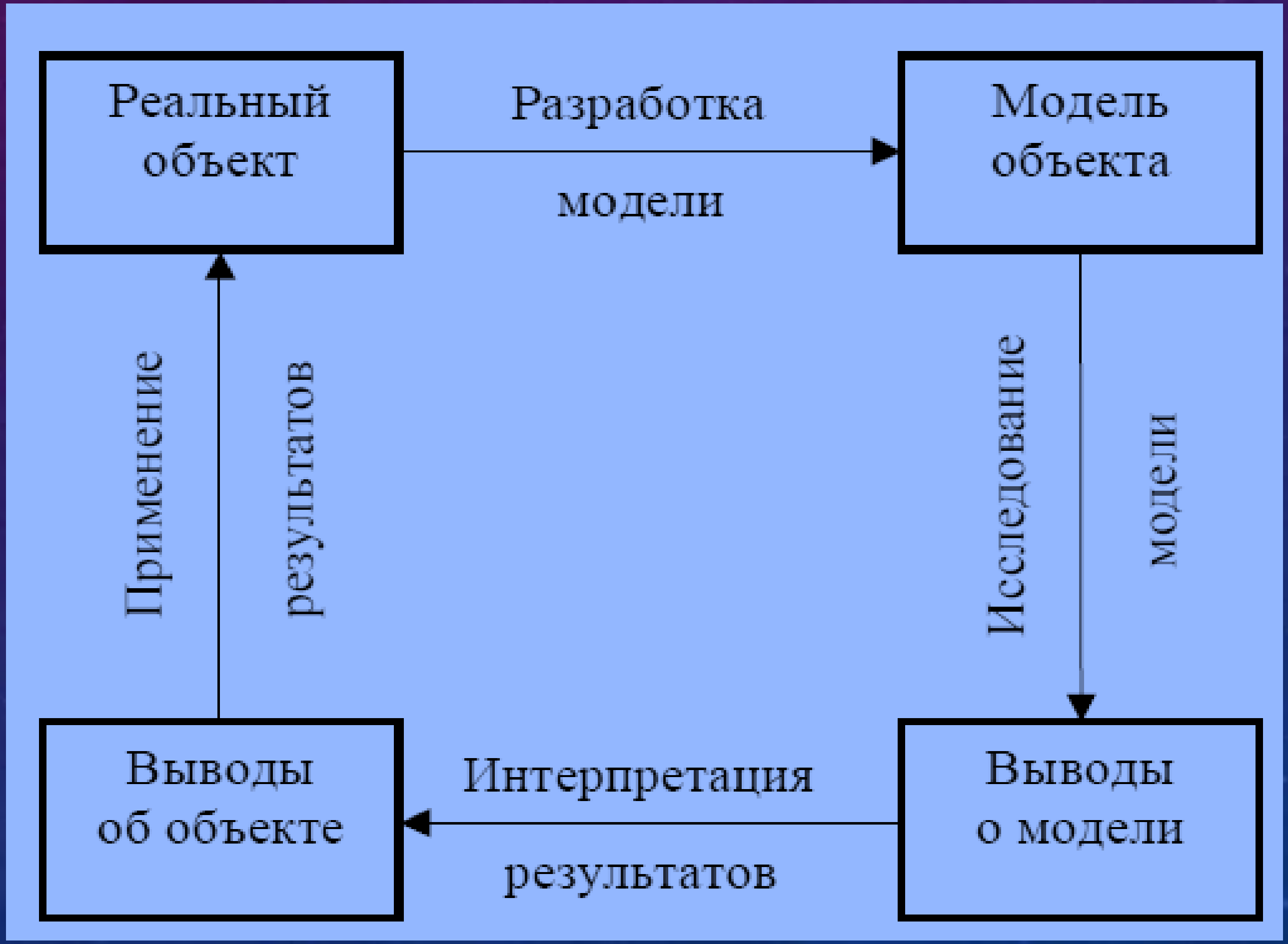
Принципы системного подхода

- - принцип конечной цели: абсолютный приоритет конечной цели;
- - принцип единства: совместное рассмотрение системы как целого и как совокупности элементов;
- - принцип связности: рассмотрение любой части совместно с ее связями с окружением;
- - принцип модульного построения: полезно выделение модулей в системе и рассмотрение ее как совокупности модулей;
- - принцип иерархии: полезно введение иерархии элементов и(или) их ранжирование;
- - принцип функциональности: совместное рассмотрение структуры и функции с приоритетом функции над структурой;
- - принцип развития: учет изменяемости системы, ее способности к развитию, расширению, замене частей, накапливанию информации;
- - принцип децентрализации: сочетание в принимаемых решениях и управлении централизации и децентрализации;
- - принцип неопределенности: учет неопределенностей и случайностей в системе.

Основной метод исследования систем

Метод моделирования, то есть способ теоретического анализа и практического действия, направленный на разработку и использование моделей. При этом под **моделью** будем понимать образ реального объекта (процесса) в материальной или идеальной форме (то есть описанный знаковыми средствами на каком-либо языке), отражающий существенные свойства моделируемого объекта (процесса) и замещающий его в ходе исследования и управления

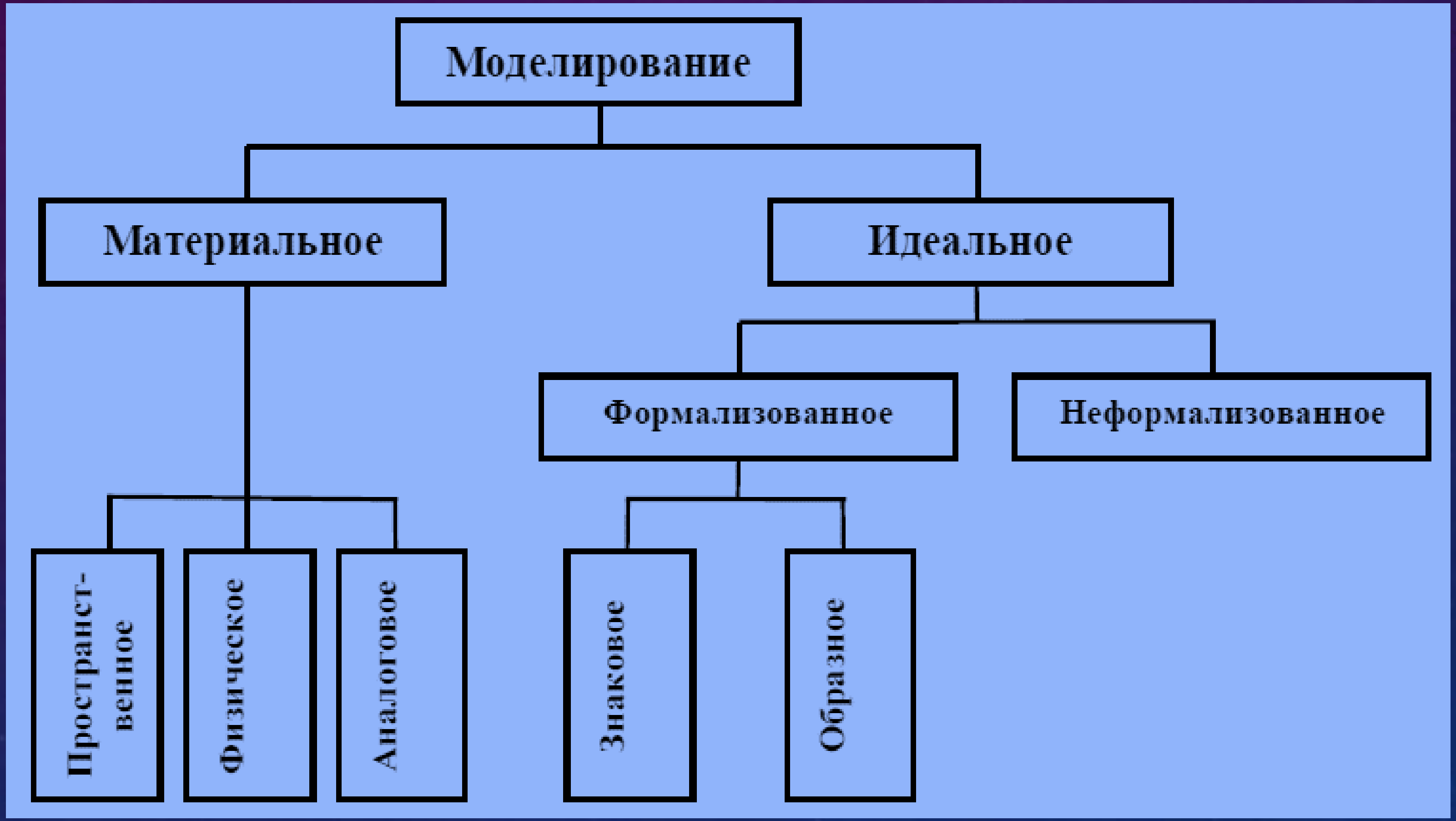
Основным методом исследования систем является **метод моделирования**



Идеальное моделирование

Принципиально отличается от материального, поскольку оно основывается не на материальной аналогии между моделью и изучаемым объектом, а на идеальной, то есть мыслимой связи между ними. В формализованном моделировании моделями служат системы знаков или образов, вместе с которыми задаются правила их преобразования и интерпретации.

Классификация видов моделирования



Неформализованное моделирование

Это анализ проблем разнообразного типа, когда модель не формулируется, а вместо нее используется некоторое, не зафиксированное точно, мысленное ощущение реальности, служащее основой для рассуждения и принятия решений.

Математические модели

Относятся к символьным моделям и представляют собой описание объектов в виде математических символов, формул, выражений. При наличии достаточно точной математической модели можно путем математических расчетов прогнозировать результаты функционирования объекта при различных условиях, выбрать из множества возможных вариантов тот, который дает наилучшие результаты.

Рассмотрим классификацию математических моделей:

- **Аналитические (теоретические), статистические (эмпирические) и комбинированные.**
- **Одномерные и многомерные модели**
- **Линейные и нелинейные модели.**
- **Статические и динамические модели.**
- **Стационарные и нестационарные модели.**
- **Модели с параметрами, сосредоточенными или распределенными в пространстве.**
- **Модели, дискретные и непрерывные**
- **Детерминированные и стохастические (вероятностные) модели.**

Требования, предъявляемые к математическим моделям

- *Адекватность.*
- *Универсальность.*
- *Экономичность.*
- *Простота.*
- *Потенциальность.*
- *Достаточная точность результатов .*
- *Способность к совершенствованию.*

Адекватность

Модель считается адекватной, если отражает заданные свойства с приемлемой точностью. Точность определяется как степень совпадения значений выходных параметров модели и объекта.

Универсальность

Определяется в основном числом и составом учитываемых в модели внешних и выходных параметров.

Экономичность

Модель характеризуется затратами вычислительных ресурсов для ее реализации — затратами машинного времени и памяти.

Простота

Модель, при которой желаемый результат достигается за то же время с той же точностью при учете меньшего количества факторов при расчете, называется простой.

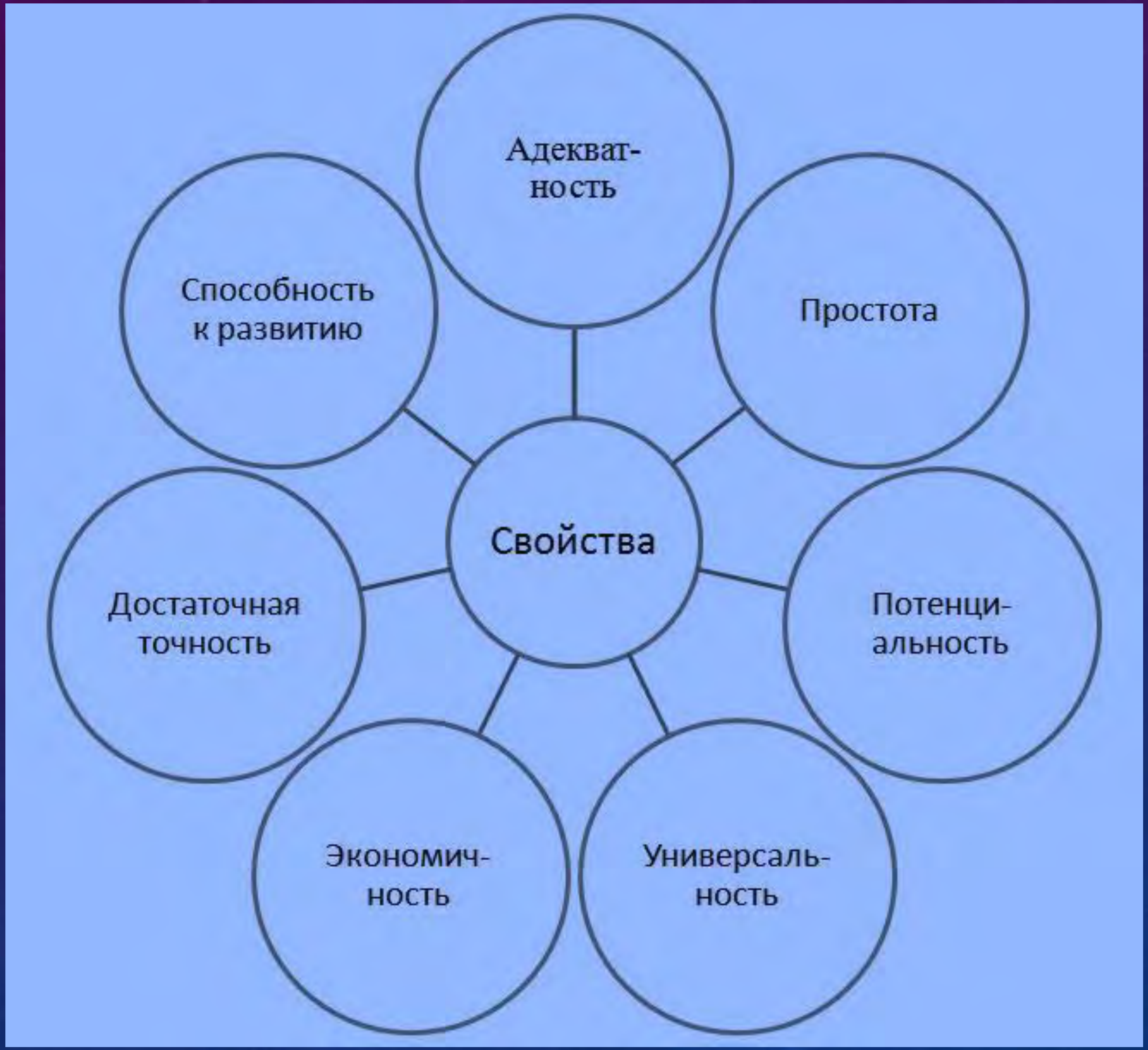
Потенциальность

Возможность получения новых знаний об исследуемом объекте с помощью применения модели.

Достаточная точность результатов

Решения задачи, надежность функционирования модели.

Свойства моделей



Можно выделить следующие шесть этапов математического моделирования.

- **Постановка проблемы и ее качественный анализ**.
- **Построение математической модели**.
- **Математический анализ модели**.
- **Подготовка исходной информации.**
- **Численное решение.**
- **Анализ численных результатов и их применение.**

Классификация математических методов

- *математическая статистика*
- *методы принятия оптимальных решений*
- *методы экспериментального изучения явлений*

Классификации математических моделей систем и процессов

- По общему целевому назначению
- По конкретному предназначению
- По типу информации
- По учету фактора времени
- По учету фактора неопределенности
- По характеристике математических объектов
- По типу подхода к изучаемым системам

Спасибо за внимание

ПРОГРАММИРОВАНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ПРИЛОЖЕНИЙ НА БАЗЕ ХРАНИЛИЩ ДАННЫХ

ТЕМА 2.ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ПРИНЯТИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ.

Основные определения

Принятие решений есть постоянно решаемая в процессе управления задача. Трактовка принятия решения как задачи позволяет более четко сформулировать ее содержание, определить технологию и методы ее решения.

Задача принятия решений (ЗПР) направлена на определение наилучшего (оптимального) способа действий для достижения поставленных целей. Под **целью** понимается идеальное представление желаемого состояния или результата деятельности. Если фактическое состояние не соответствует желаемому, то имеет место **проблема.** Выработка плана действий по устранению проблемы составляет сущность задачи принятия решений.

Проблемы могут возникать в следующих случаях:

- функционирование системы в данный момент не обеспечивает достижение поставленных целей;
- функционирование системы в будущем не обеспечит достижение поставленных целей;
- необходимо изменение целей деятельности.

Проблема всегда связана с определенными условиями, которые обобщенно называют **ситуацией.** Совокупность проблемы и ситуации образует **проблемную ситуацию**. Выявление и описание проблемной ситуации дает исходную информацию для постановки задачи принятия решений.

Субъектом всякого решения является **лицо, принимающее решение** (ЛПР). Понятие ЛПР является собирательным. Это может быть одно лицо – **индивидуальное** ЛПР или группа лиц, вырабатывающих коллективное решение, **групповое** ЛПР. Для помощи ЛПР в сборе и анализе информации и формировании решений привлекаются **эксперты** – специалисты по решаемой проблеме.

Принятие решений происходит во времени, поэтому вводится понятие **процесса принятия решений.** В процессе принятия решений формируются **альтернативные** (взаимоисключающие) **варианты решений** и оценивается их предпочтительность. **Предпочтение** – это интегральная оценка качества решений, основанная на объективном анализе (знании, опыте, проведении экспериментов и расчетов) и субъективном понимании ценности, эффективности решений.

Для осуществления выбора наилучшего решения индивидуальное ЛПР определяет **критерий выбора**. Групповое ЛПР производит выбор на основе **принципа согласования.** Конечным результатом ЗПР является **решение,** которое представляет собой предписание к действию.

Решение называется **допустимым,** если оно удовлетворяет ограничениям: ресурсным, правовым, морально-этическим. Решение называется **оптимальным** (наилучшим), если оно обеспечивает экстремум (максимум или минимум) критерия выбора при индивидуальном ЛПР или удовлетворяет принципу согласования при групповом ЛПР.

Обобщенной характеристикой решения является его **эффективность.** Эта характеристика включает **эффект решения**, определяющий степень достижения целей, и **стоимость решения** – совокупность затрат ресурсов для принятия и реализации решения. Таким образом, эффективность решения - это степень достижения целей, отнесенная к затратам на их достижение.

Формальная модель задачи принятия решений.

Формальная модель задачи принятия решений.

В самой общей форме любая задача может быть представлена в виде «дано...», «требуется определить...». Руководствуясь этой формой, формальная модель ЗПР может быть описана следующим образом:

для индивидуального ЛПР

$< S_o, T, Q \mid S, A, B, Y, f, K, Y_{opt} >$;

для группового ЛПР

$< S_o, T, Q \mid S, A, B, Y, F(f), L, Y_{opt} >$,

где слева от вертикальной черты расположены известные, а справа - неизвестные элементы задачи: S_o – проблемная ситуация; T –время для принятия решения; Q – имеющиеся для принятия решения ресурсы; $S = (S_1, \ldots, S_n)$ – множество альтернативных ситуаций, уточняющих проблемную ситуацию S_o; $A=(A_1,\ldots,A_k)$ – множество целей, преследуемых при принятии решения; $B=(B_1,\ldots,B_L)$ – множество ограничений; $Y=(Y_1,\ldots,Y_m)$ – множество альтернативных вариантов решения; f – функция предпочтения ЛПР; K – критерий выбора наилучшего решения; F(f) – функция группового предпочтения; L – принцип согласования индивидуальных предпочтений для формирования группового предпочтения; Y_{opt} – оптимальное решение.

Таким образом, **содержание задачи принятия решения** можно сформулировать следующим образом: в условиях проблемной ситуации S_o, располагаемого времени T и ресурсов Q необходимо уточнить ситуацию S_o множеством гипотетических ситуаций S, сформировать множества целей A, ограничений B и альтернативных вариантов решения Y, произвести оценку индивидуальных предпочтений решений f и найти оптимальное решение Y_{opt}, руководствуясь сформулированным критерием выбора K - для индивидуального ЛПР, или удовлетворяющее групповому предпочтению F(f), найденному на основе выбранного принципа согласования L - для группового ЛПР.

Рассмотрим более подробно элементы ЗПР.

Проблемная ситуация S_o описывается содержательно и, если это возможно, совокупностью количественных характеристик. Описание проблемной ситуации должно включать содержательную формулировку проблемы, которую необходимо решить, описание условий, в которых проблема возникла, причины ее возникновения и развития.

В зависимости от характера задачи время на принятие решения T может составлять секунды или часы, что характерно для оперативных задач, месяцы или годы - для долгосрочных задач. Располагаемое время существенно влияет на возможности получения полной и достоверной информации о проблемной ситуации и всестороннего обоснования последствий решений.

В качестве ресурсов Q для нахождения оптимального решения могут использоваться: знания и опыт ЛПР и экспертов, научно-технический потенциал исследовательских организаций, автоматизированные системы информационного обеспечения и управления, финансовые и материально- технические ресурсы.

В реальных управленческих задачах исходная проблемная ситуация S_o часто полностью не ясна. Неопределенность может быть обусловлена различными факторами, например, неизвестностью спроса на продукцию, неясностью в возможностях использования научно-технических достижений, климатическими факторами и другими причинами. Для доопределения проблемной ситуации необходимо сформулировать гипотетические ситуации (гипотезы, версии) Sj $(j=\overline{1,n})$, образующие конечное множество $S=(S_1,\ldots,S_n)$. Каждая ситуация Sj должна быть альтернативной всем остальным, то есть все ситуации должны быть взаимоисключающими и, следовательно, независимыми. Набор ситуаций должен образовывать **полную группу**, то есть охватывать все возможные ситуации, доопределяющие проблемную ситуацию S_o. Каждая ситуация описывается содержательно и набором количественных характеристик, включающих характеристику достоверности ситуации - **вероятность ситуации** Pj.

Для полной группы независимых ситуаций сумма вероятностей равна единице:

$$\sum_{j=1}^{n} P_j = 1,$$

где n – количество ситуаций, составляющих полную группу.

Доопределение проблемной ситуации путем формирования полной группы возможных альтернативных ситуаций уменьшает исходную неопределенность задачи, поскольку сформирован перечень содержательных событий и неопределенность сведена только к вероятностям их возникновения. В случаях, когда неопределенность в проблемной ситуации отсутствует, отпадает необходимость формирования множества ситуаций (гипотез, версий). Случай полной определенности проблемной ситуации можно рассматривать как частный, вытекающий из случаев неопределенности, так как при этом можно считать, что имеется одна альтернативная ситуация с вероятностью единица, а другие ситуации имеют нулевую вероятность появления.

Для четкого определения желаемого результата по устранению проблемной ситуации необходимо сформулировать множество целей $A=(A_1,\dots,A_k)$. Реальные задачи, как правило, многоцелевые и только в отдельных частных случаях может формулироваться единственная цель. Описание целей осуществляется содержательно и набором количественных характеристик. Наиболее важными характеристиками целей являются критерии достижения целей, степень достижения целей, приоритеты целей, характеризующие их важность.

Принятие решений всегда осуществляется в условиях различных ограничений: финансовых, материальных, правовых и т.п. Поэтому необходимо четко сформулировать множество ограничений $B=(B_1,\dots,B_L)$, влияющих на возможность реализации решений и достижения целей в конкретной проблемной ситуации.

Для достижения целей формируется множество альтернативных вариантов решений $Y=(Y_1,\dots,Y_m)$, из которых должно быть выбрано единственное оптимальное или приемлемое решение $\mathbf{Y_{opt}}$.

Функция предпочтения f используется для описания и сравнительной оценки качества решений на основе предпочтений ЛПР. Эта оценка может носить качественный характер, тогда все альтернативные варианты решения Yi упорядочиваются по предпочтению, или количественный характер, тогда можно сравнивать, на сколько или во сколько раз одно решение лучше другого.

Выбор оптимального или приемлемого решения Y_{opt} производится по критерию выбора К, формулировку которого осуществляет ЛПР в случае индивидуального ЛПР. В случае группового ЛПР на основе выбранного принципа согласования индивидуальных предпочтений L (например, принципа большинства голосов) строится функция группового предпочтения F(f), зависящая от вектора индивидуальных предпочтений членов группы $f=(f_1,\ldots,f_d)$, где d – количество членов в группе. Оптимальное решение должно удовлетворять групповому предпочтению.

Содержание задачи принятия решений позволяет сформулировать ряд ее **особенностей:**

1. Неизвестные элементы задачи: ситуации, цели, ограничения, решения, предпочтения - имеют прежде всего содержательный характер и только частично определяются количественными характеристиками. Количество неизвестных элементов задачи существенно больше, чем известных.
2. Определение неизвестных элементов задачи и, в конечном итоге, нахождение наилучшего решения не могут быть полностью формализованы, поскольку не существует методов и алгоритмов, позволяющих, например, сформулировать цели и варианты решения.
3. Элементы задачи описываются характеристиками, часть из которых может быть измерена объективно, а для другой части возможно только субъективное измерение (например, приоритеты целей, предпочтений, решений и т.п.).
4. В ряде случаев приходится решать ЗПР в условиях неопределенности, обусловленной неполным описанием проблемной ситуации и невозможностью достаточно точной оценки ожидаемых последствий. В этих случаях наряду с логическим мышлением важное значение имеет интуиция ЛПР.
5. Принимаемые решения могут непосредственно затрагивать интересы ЛПР и экспертов. Поэтому мотивы их поведения влияют на выбор решения.

Процесс принятия решений.

Решение принимается с целью разрешения какой-либо проблемы. Процесс разрешения проблемы состоит из трех стадий (рис. 1).

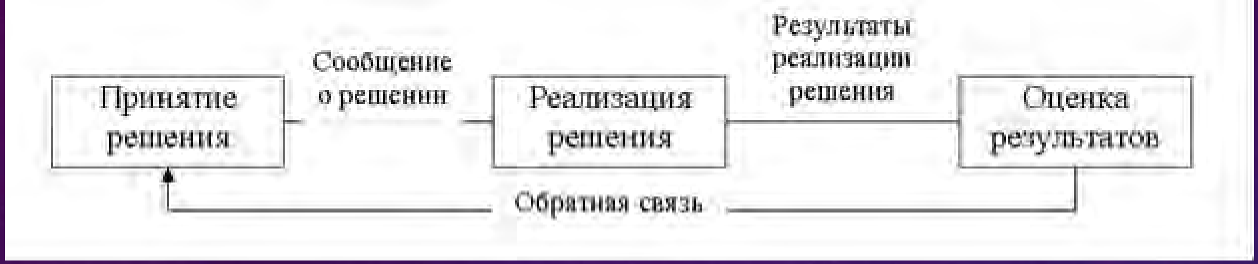


Рис. 1. Стадии разрешения проблемы

Первую стадию – принятие решения – с технологической точки зрения можно представить как процесс, состоящий из последовательности этапов и процедур, имеющих между собой прямые и обратные связи (рис. 2). На рисунке тонкими линиями показана последовательность выполнения процедур и итеративных циклов. Утолщенными линиями показаны потоки информации. Слева от этих линий обозначены результаты текущей процедуры, справа – накопленные результаты ЗПР. Обратные связи отражают итеративный циклический характер зависимости между этапами и процедурами. Итерации в выполнении элементов процесса принятия решений обусловлены необходимостью уточнения и корректировки данных после выполнения последующих процедур.

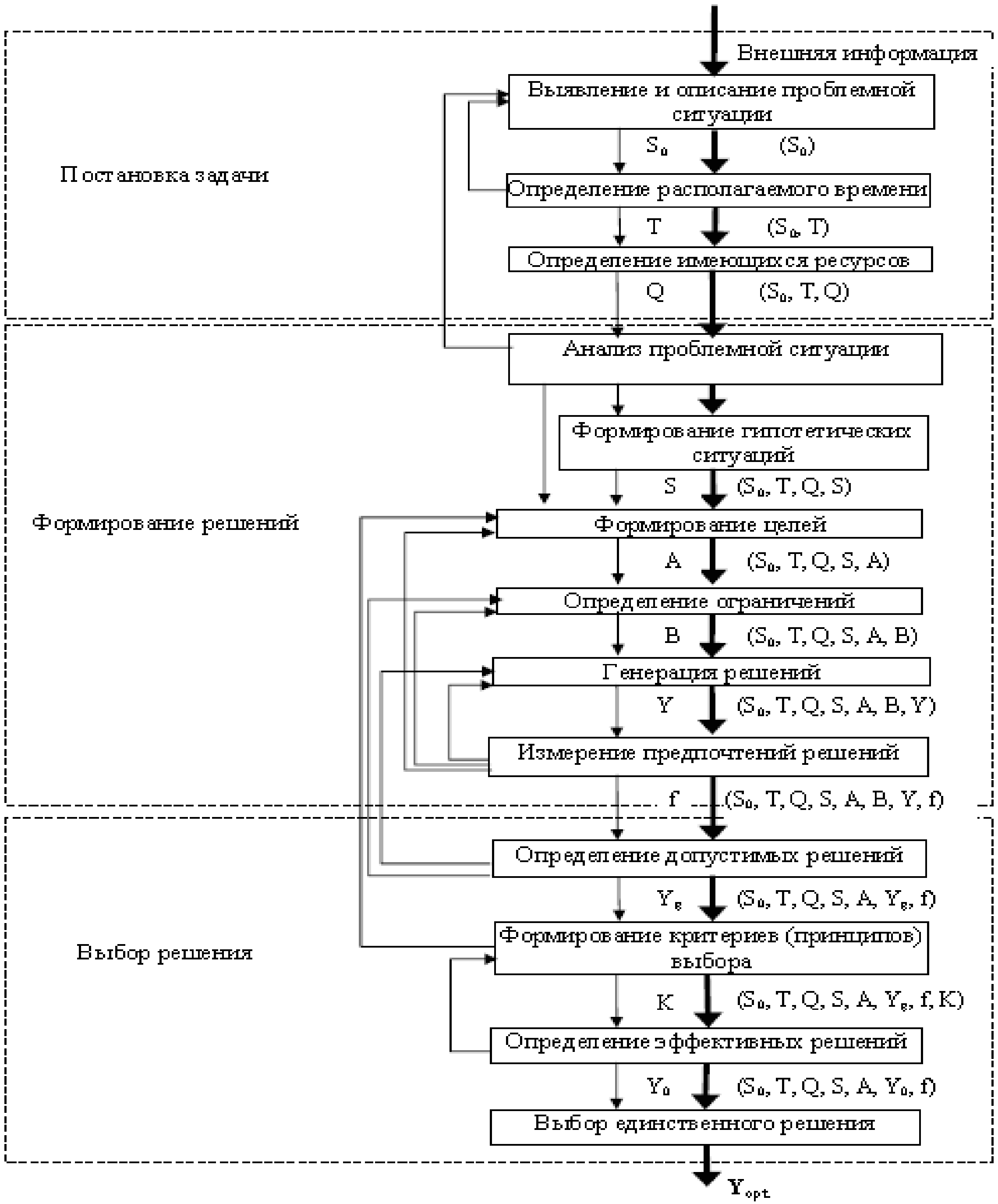


Рис. 2. Схема процесса принятия решения

С информационной точки зрения в процессе принятия решений происходит уменьшение неопределенности.

Формулировка проблемной ситуации как бы порождает вопрос «что делать?». Последовательное выполнение процедур приводит к формированию ответа на этот вопрос в виде «*что* и *как* нужно делать».

Процедуры принятия решений могут выполняться путем мышления ЛПР и экспертов, то есть творчески, неформальным образом, и с применением формальных средств – математических методов и ЭВМ. Формальные процедуры заключаются в проведении расчетов по определенным алгоритмам с целью анализа вариантов решения, оценки необходимых ресурсов, сужения множества вариантов решения и т.п. Выполнение формальных процедур осуществляется ЛПР, экспертами, техническим персоналом и техническими средствами.

Представление процесса принятия решений как логически упорядоченной совокупности неформальных и формальных процедур есть описание технологической схемы выполнения этого процесса. Такое описание позволяет структурно упорядочить процесс принятия решений и определить информационную модель процесса, на основе которой рационально организуется сбор, обработка и хранение необходимой информации.

В процессе принятия решений выделяют **три этапа**: постановка задачи, формирование решений и выбор решения.

На **этапе постановки задачи** выполняются следующие процедуры:

- выявление и описание проблемной ситуации;
- определение времени, имеющегося для принятия решения;
- определение необходимых и располагаемых для принятия решения ресурсов.

Этап постановки задачи должен дать ответы на вопросы: какую проблему и в каких условиях нужно решать? когда ее нужно решать? какими силами и средствами будет решаться проблема?

Различают две ситуации, при которых возникают проблемы: **ситуация новых затруднений** и **ситуация новых возможностей**.

На **этапе формирования решений** выполняются следующие процедуры:

- анализ проблемной ситуации;
- формирование гипотетических ситуаций;
- формирование целей;
- определение ограничений;
- генерация решений;
- измерение предпочтений решений.

Основной целью второго этапа является формирование вариантов решений и оценка их предпочтений.

При формулировании альтернативных вариантов решения проблемы в идеале желательно выявить все возможные действия по устранению причин проблемы. Однако, на практике руководитель редко располагает достаточными знаниями или временем, чтобы сформулировать и оценить каждую альтернативу. Более того, рассмотрение очень большого числа альтернатив, даже если они все реалистичны, часто лишь запутывает процесс решения проблемы. Поэтому руководитель, как правило, ограничивает число вариантов выбора для серьезного рассмотрения всего несколькими альтернативами, которые представляются наиболее желательными. При этом большую роль играют опыт и интуиция руководителя.

Для сформулированных альтернативных вариантов решения производится измерение и оценка их предпочтений. Измерение предпочтительности решений производится экспертами и ЛПР. Экспертные оценки должны отображаться числами с использованием качественных и количественных шкал. Для оценки решений необходимо сформулировать систему показателей, характеризующих качество этих решений и четко определяющих степень достижения сформулированных целей и затраты ресурсов.

На **этапе выбора** решения выполняются следующие процедуры:

- определение допустимых (приемлемых) решений;
- формирование критериев выбора решения;
- определение эффективных (недоминирующих) решений;
- выбор единственного (окончательного) решения.

Этот этап начинается с анализа и оценки выявленных альтернативных вариантов решения проблемы и определения допустимых (приемлемых) решений с учетом сформулированных ограничений. Конечно, при выявлении возможных альтернатив проводится их определенная предварительная оценка. Исследования, однако, показали, что как количество, так и качество альтернативных идей выше, когда начальная генерация идей (вариантов решений) отделена от окончательной их оценки. Это означает, что только после составления списка всех идей следует переходить к оценке каждой из них.

Важной процедурой на этом этапе является формирование критериев выбора решения – стандартов, по которым предстоит оценивать допустимые альтернативные варианты выбора. Они выступают в качестве рекомендаций по оценке решений. Например, при принятии решения о покупке автомобиля в качестве критериев могут использоваться: стоимость – не дороже 140 тыс. руб., расход топлива – не более 6 л. бензина на 100 км, вместимость – 5 человек, привлекательность, надежность. В случае группового ЛПР необходимо на основе выбранного принципа согласования определить функцию группового предпочтения.

Выбор окончательного решения осуществляется индивидуальным ЛПР на основе установленных им критериев, а групповым ЛПР – на основе вычисленного группового предпочтения.

Реализация любой альтернативы сопряжена с некоторыми отрицательными аспектами, поэтому, как уже отмечалось, почти все важные управленческие решения содержат компромисс. **Окончательное решение – это альтернатива с наиболее благоприятными общими последствиями.**

Рассмотренная схема отображает реальный процесс принятия решений в упрощенном виде. В действительности этот процесс является более сложным и не всегда строго выполняется по приведенной схеме.

Например, при генерации множества альтернативных решений человек может одновременно учитывать ограничения, по крайней мере часть из них, и не включать в это множество решения, не удовлетворяющие ограничениям. Следовательно, реальный процесс допускает определенную параллельность выполнения процедур.

Кроме того, при выполнении той или иной процедуры получаются результаты, дающие новую информацию, поэтому возникает необходимость корректировки и дополнения предшествующих процедур, то есть их повторения. Изложенное показывает, что приведенную схему не следует принимать как абсолютно точное и неизменное представление последовательности выполнения процедур в процессе принятия решений. Эта схема в основном отражает рациональную последовательность действий ЛПР при формировании и выборе решений.

Математические методы и модели поддержки принятия решений

ТЕМА 3: Типы задач линейного программирования

Линейное программирование

Методы линейного программирования используют в прогнозных расчетах, при планировании и организации производственных процессов.

Линейное программирование – это область математики, в которой изучаются методы исследования и отыскания экстремальных значений некоторой линейной функции, на аргументы которой наложены линейные ограничения.

Такая линейная функция называется **целевой**, а набор количественных соотношений между переменными , выражающих определенные требования экономической задачи в виде уравнений или неравенств, называется **системой ограничений**.

Слово программирование введено в связи с тем, что неизвестные переменные обычно определяют программу или план работы некоторого субъекта.

Совокупность соотношений, содержащих целевую функцию и ограничения на ее аргументы, называется <u>математической моделью задачи оптимизации.</u>

<u>ЗЛП</u> записывается в общем виде так:

$$F(\bar{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_jx_j + \ldots + c_nx_n \to \max(\min)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{12}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n \le b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases}.$$

$$x_j \ge 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Здесь x_j -неизвестные, a_{ij}, b_i, c_j -заданные постоянные величины. Ограничения могут быть заданы уравнениями.

Наиболее часто встречаются задачи в виде: имеется n ресурсов при m ограничениях. Нужно определить объемы этих ресурсов , при которых целевая функция будет достигать максимума (минимума), т. е. найти оптимальное распределение ограниченных ресурсов. При этом имеются естественные ограничения x_j >0.

При этом экстремум целевой функции ищется <u>на допустимом множестве решений,</u> определяемом системой ограничений, причем все или некоторые неравенства в системе ограничений могут быть записаны в виде уравнений.

Примеры задач, которые сводятся к ЗПЛ.

1. задача оптимального распределения ресурсов при планировании выпуска продукции на предприятии (задача об ассортименте);
2. задача на максимум выпуска продукции при заданном ассортименте;
3. задача о смесях (рационе, диете и т.д.);
4. транспортная задача;
5. задача о рациональном использовании имеющихся мощностей;
6. задача о назначениях.

1.Задача оптимального распределения ресурсов.

Предположим, что предприятие выпускает различных изделий. Для их производства требуется различных видов ресурсов (сырья, рабочего и машинного времени, вспомогательных материалов). Эти ресурсы ограничены и составляют в планируемый период $b_1, b_2, \ldots, b_m$ условных единиц. Известны также технологические коэффициенты a_{ij}, которые указывают, сколько единиц i-го ресурса требуется для производства изделия j-го вида.

Пусть прибыль, получаемая предприятием при реализации единицы изделия *j*-го вида , равна c_j .

В планируемый период все показатели $a_{ij}, \ b_i, \ c_j$ предполагаются постоянными.

Требуется составить такой план выпуска продукции, при реализации которого прибыль предприятия была бы наибольшей.

Экономико-математическая модель задачи

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = \overline{1, m},$$

$$x_j \ge 0, \qquad j=\overline{1, n}.$$

Целевая функция представляет собой суммарную прибыль от реализации выпускаемой продукции всех видов. В данной модели задачи оптимизация возможна за счет выбора наиболее выгодных видов продукции. Ограничения означают , что для любого из ресурсов его суммарный расход на производство всех видов продукции не превосходит его запасы.

$b_1, b_2, ..., b_m$ a_{ij} c_j

a_{ij}, b_i, c_j

Примеры

ГЛАВА 1

ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

§ 1.1. ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1.1. Для изготовления трех видов изделий A, B и C используется токарное, фрезерное, сварочное и шлифовальное оборудование. Затраты времени на обработку одного изделия для каждого из типов оборудования указаны в табл. 1.1. В ней же указан общий фонд рабочего времени каждого из типов используемого оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия каждого вида.

Таблица 1.1

Тип оборудования	Затраты времени (станко-ч) на обработку одного изделия вида			Общий фонд рабочего времени оборудования (ч)
	A	B	C	
Фрезерное	2	4	5	120
Токарное	1	8	6	280
Сварочное	7	4	5	240
Шлифовальное	4	6	7	360
Прибыль (руб.)	10	14	12	

Требуется определить, сколько изделий и какого вида следует изготовить предприятию, чтобы прибыль от их реализации была максимальной. Составить математическую модель задачи.

Допустим, что будет изготовлено x_1 изделий вида *A*, x_2 -изделий вида *B* и x_3 -изделий вида *C*. Тогда для производства такого количества изделий потребуется затратить $2x_1 + 4x_2 + 5x_3$ станко-часов фрезерного оборудования.

Так как общий фонд рабочего времени станков данного типа не может превышать 120, то должно выполняться неравенство $2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 120.$

Рассуждая аналогично, можно составить систему ограничений

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 120, \\ x_1 + 8x_2 + 6x_3 \le 280, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 240, \\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \le 360. \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$

Теперь составим целевую функцию. Прибыль от реализации x_1 изделий вида *А* составит 10x_1, от реализации x_2 -изделий вида *В* -14 x_2 и от реализации x_3 -изделий вида *С*-12 x_3

Общая прибыль от реализации всех изделий составит

$$F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3$$

Таким образом, приходим к следующей ЗЛП:

Требуется среди всех неотрицательных решений системы неравенств

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 120, \\ x_1 + 8x_2 + 6x_3 \le 280, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 240, \\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \le 360. \end{cases}$$

найти такое, при котором целевая функция

$$F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3$$

принимает максимальное значение.

Задача о смесях.

Имеется два вида продукции P_1, P_2, содержащие питательные вещества s_1, s_2, s_3, s_4 (жиры, белки и т.д.)

Таблица

Питательные вещества	Число единиц питательных веществ в единице продукции		Необходимый минимум питательных веществ
	P_1	P_2	
s_1	1	2	10
s_2	3	2	8
s_3	2	1	9
s_4	2	2	11
Стоимость единицы продукции	3	4	

Решение

Общая стоимость рациона

$$F = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \min$$

при ограничениях с учетом необходимого минимума питательных веществ

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ 2x_1 + x_2 \geq 9, \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 11, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0.$$

Математическая постановка задачи: составить дневной рацион $\overline{X}=(x_1;x_2)$, удовлетворяющий системе ограничений и минимизирующий целевую функцию.

В общем виде к группе задач о смесях относятся задачи по отысканию наиболее дешевого набора из определенных исходных материалов, обеспечивающих получение смеси с заданными свойствами. Полученные смеси должны иметь в своем составе *n* различных компонентов в определенных количествах, а сами компоненты являются составными частями *m* исходных материалов.

Введем обозначения: x_j -количество *j*-го материала, входящего в смесь; c_j -цена материала *j*-го вида; b_i -это минимально необходимое содержание *i*-го компонента в смеси. Коэффициенты a_{ij} показывают удельный вес *i*-го компонента в единице *j*-го материала

Решение

Общая стоимость рациона

$$F = 3x_1 + 4x_2 \to \min$$

при ограничениях с учетом необходимого минимума питательных веществ

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ 2x_1 + x_2 \geq 9, \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 11, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Экономико-математическая модель задачи.

$$F(\overline{X}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, \qquad i = \overline{1,m},$$

$$x_j \ge 0, \qquad j = \overline{1,n}.$$

Целевая функция представляет собой суммарную стоимость смеси, а функциональные ограничения являются ограничениями по содержанию компонентов в смеси: смесь должна содержать компоненты в объемах, не менее указанных.

Задача о раскрое

На швейной фабрике ткань может быть раскроена несколькими способами для изготовления нужных деталей швейных $100\,\text{ì}^{2}$ изделий.Пусть при *j*-ом варианте раскроя b_{ij} изготавливается деталей *i*-го вида, а величина отходов при данном варианте раскроя равна $c_{ij}\ \text{ì}^{2}$.

Зная, что деталей *i*-го вида следует изготовлять B_i штук, требуется раскроить ткань так, чтобы было получено необходимое количество деталей каждого вида при минимальных общих отходах. Составить математическую модель задачи.

Таким образом, приходим к следующей задаче:

Найти минимум функции

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$$

при условии, что ее переменные удовлетворяют ограничениям

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j = B_i \qquad (i = \overline{1, m}),$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j = \overline{1, n})$$

Свойства основной ЗЛП.

Перепишем ЗЛП в векторной форме: найти максимум функции $F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ при условиях

$$x_1P_1 + x_2P_2 + \ldots + x_nP_n = P_0,$$
$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,n}).$$

Здесь

$$P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}; P_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix}; \ldots; P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

План называется опорным, если все компоненты базисного решения системы ограничений канонической задачи линейного программирования неотрицательны. Число положительных компонент опорного плана не может быть больше m, т.е.числа уравнений в ограничениях.

Опорный план называется невырожденным, если он содержит m положительных компонент. В противном случае он называется вырожденным.

План, при котором целевая функция ЗЛП принимает свое максимальное (минимальное) значение , называется оптимальным.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

4.1.Понятие о стохастическом программировании

4.1.Понятие о стохастическом программировании

- В моделях математического программирования некоторые или все параметры, показатели качества и ограничения могут оказаться неопределенными или случайными.
- *Стохастическое программирование* (СП) – раздел математики, занимающийся условными экстремальными задачами, в которых параметры условий или составляющие решений являются случайными.
- Случаи, когда опыт, статистика или исследование процесса позволяют устанавливать вероятностные характеристики задач, называются *ситуациями, связанными с риском.*
- Случаи, когда неизвестны статистические особенности процесса, называются *неопределенными ситуациями*.
- СП программирование используется для решения задач двух типов.
- 1. В задачах первого типа прогнозируются статистические характеристики множества одинаковых экстремальных систем. Это задачи *пассивного* СП.
- 2. В задачах второго типа строятся алгоритмы планирования и управления в условиях неполной информации. Это задачи *активного* СП.
- В зависимости от постановки задачи стохастического программирования её решения или планы могут вычисляться в двух видах:
- в *чистых стратегиях*, когда результатом будет вектор оптимального плана или решения задачи. Решения в чистых стратегиях называются *решающими правилами;*
- в *смешанных стратегиях*, когда определяется вероятностное распределение компонент оптимального плана или решения, которые в этом случае называются *решающими распределениями.*
- При построении моделей управления в условиях неполной информации существует два подхода к использованию информации:
- в первом случае *решение предшествует наблюдению*, тогда решающие правила и решающие распределения зависят только от детерминированных параметров и статистических характеристик случайных параметров условий задачи, т. е. являются *априорной информацией*,
- во втором случае *наблюдения предшествуют решению*, тогда решающие правила и решающие распределения определяются *апостериорной информацией*, появляющейся в результате наблюдения за конкретной реализацией параметров условий задачи.
- Решающие распределения представляют собой функции, таблицы или инструкции, устанавливающие зависимость решения от некоторой априорной или апостериорной информации.

4.2. Постановка задач СП

- Большое число военных, экономических, технических задач записывается в виде задачи ЛП: $F = \sum_j^n c_j x_j \to min, \;\; \sum_j^n a_{ij} x_j \leq b_i, \;\; i = \overline{1,m}, \;\; x_j \geq 0$.
- В конкретных случаях коэффициенты c_j, a_{ij}, b_i могут быть случайными величинами. Простая замена случайных параметров их усредненными характеристиками не всегда возможна по двум причинам:
- может исказиться модель самой исследуемой операции и не отражать реальных условий;
- решение усредненной задачи может при конкретных реализациях не удовлетворять ограничениям.
- Задачи СП могут формулироваться в трех видах
- 1. Формулировка задачи, при которой требуется соблюдение ограничений при всех реализациях случайных параметров и любое их нарушение приводит к таким большим штрафам, что сводит на нет эффект от оптимизации целевой функции, называется *жесткой постановкой*.
- Жесткая постановка задачи требует расширения гиперплоскостей ограничений, и в результате ОДР может оказаться вырожденной, а сама задача потеряет смысл. Таким образом, замена случайных параметров их средними значениями при жесткой постановке не всегда приводит к правильному решению задачи СП.
- 2. Во многих задачах нет необходимости удовлетворять ограничениям при каждой реализации случайного изменения параметра.
- Если в конкретной задаче требуется только чтобы вероятность попадания решения в допустимую область превышала некоторое заранее заданное число $\alpha > 0$ (обычно $\alpha > 1/2$), то такая постановка задач СП называется *моделью с вероятностными ограничениями.*
- Если коэффициент c_j детерминирован, то целевая функция задачи с вероятностными ограничениями не изменяется. Если c_j случайно, то в качестве целевой функции задачи с вероятностными ограничениями берут математическое ожидание целевой функции
- $M[F] = M\left[\sum_j^n c_j x_j\right] \to max \qquad (4.1)$
- или вероятность превышения целевой функции некоторого фиксированного порога $F_0 : P(F > F_0)$.

- В некоторых задачах её условия позволяют заменить *ограничения со случайными параметрами* неравенствами, ограничивающими первые или вторые моменты распределения левых частей условий:
- $M\left[\sum_j^n a_{ij} x_j\right] \leq b_{mi}$ - математическое ожидание (4.2)
- $D\left[\sum_j^n c_j x_j\right] \leq b_{Di}$ - дисперсия
- 3. Если ограничения представляют собой не просто вторые моменты распределения условий, а вторые моменты некоторых *функций S от невязок условий*
- $D\left[S\left(\sum a_{ij} x_j - b_j\right)\right] \leq S_0$
- такая постановка задач СП называется *моделью со статистическими условиями.*
- В этом случае невязки в ограничениях задач со статистическими условиями исключены не во всех случаях (как в жесткой постановке) и не в большинстве случаев (как в задачах с вероятностными ограничениями), а в *среднем*, т. е. средняя величина невязки условий равна нулю.
- Если в задачах присутствуют как вероятностные, так и статистические и жесткие условия, такие модели называются моделями со *смешанными условиями.*

4.3. Модели задач СП

- Задачи СП различаются по трем признакам.
- 1. По характеру решений (детерминированный или случайный вектор, чистые или смешанные стратегии).
- 2. По выбору показателя качества, т. е. целевой функции. Если находится:
- а) математическое ожидание от целевой функции, т.е. $M[F] = M[CX] \rightarrow max$, то такие задачи называются M-*моделями;*
- б) если минимизируется дисперсия целевой функции $M[(CX - \overline{CX})] \rightarrow min$, то такие задачи называются V-*моделями;*
- в) если определяется вероятность превышения целевой функцией некоторого порога F_0, т. е. $P[F \geq F_0] = P[CX \geq F_0]$, то такие задачи называются P-*моделями.*
- 3. По способу расчленения ограничений задачи могут быть:
- а) С *построчными* вероятностными ограничениями, когда учитываются стохастические связи только в одной строке: $P\left\{\sum_j^n a_{ij}x_j \geq b_j\right\} \geq,\ i = \overline{1, m},$
- где α_i - вероятность соблюдения условий, $\alpha_{0i} = 1 - \alpha_i$ - вероятность несоблюдения условий.
- б) *С общими* вероятностными ограничениями $P[AX \geq B] \geq \alpha$, когда могут быть коррелированы параметры не только строки, но и между строками. В такой модели не учитывается сравнительная важность отдельных ограничений.
- **4.4. Примеры задач стохастического программирования**
- ***4.4.1. Задача планирования добычи угля в априорных решающих правилах***
- В угольной промышленности технико-экономические показатели сильно зависят от природных факторов, которые не всегда могут быть предсказаны заранее. Это:мощность и угол падения пластов,
- обводнённость участков,
- склонность к выбрасыванию газов,
- физико-механические свойства угля и пород,
- надежность оборудования, эксплуатационные расходы.

- Природные условия сказываются на надежности оборудования, эксплуатационных расходах и т. д. и, в конечном счете, на области определения допустимых решений. Поэтому выбор оптимального проекта плана (решения) – это задача стохастического программирования.
- Для простоты допускается:
- показатель плана определяется средним значением суммарных затрат,
- область определения плана задается спросом на добываемый уголь (требуемый объем добычи) и фондом заработной платы.
- Задача планирования угледобычи следующая.
- Для i шахты заранее разрабатывается несколько вариантов развития. Требуется установить наиболее рациональный, с точки зрения объединения шахт, вариант развития каждой шахты.
- Пусть $x_{ij} = 1$, если для i -й шахты принят j-й вариант, иначе $x_{ij} = 0$ По каждой шахте реализуется только один вариант, т. е. $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = \overline{1, m}$.
- $c_{ij}(w)$- годовые затраты на добычу угля в i-й шахте по j-му варианту при реализации w случайных параметров, зависящих от природных факторов.
- $d_{ij}(w)$- годовой объем добычи угля в i-й шахте по j-му варианту при реализации w случайных природных факторов.
- $k_{ij}(w)$- годовой фонд зарплаты i -й шахты по j-му варианту развития при реализации w случайных природных факторов.
- d — требуемая в соответствии с планом более высокого уровня годовая добыча угля по объединению в целом.
- k - общий фонд зарплаты по объединению.
- α_d, α_k - заданные вышестоящей организацией вероятности соблюдения ограничений по обеспечению спроса и по фонду зарплаты соответственно. В этом случае целевая функция соответствует М-модели
- $M\left\{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(w) x_{ij}\right\} \to min \qquad (4.5)$
- Ограничения имеют характер построчных вероятностных ограничений по соблюдению спроса и фонда заработной платы
- $P\left\{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{ij}(w) x_{ij} \geq d\right\} \geq \alpha_d \qquad (4.6)$
- $P\left\{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} k_{ij}(w) x_{ij} \leq k\right\} \geq \alpha_k \qquad (4.7)$
- В целом это типичная модель задачи стохастического программирования.

4.4.2. Стохастическая транспортная задача

Обычная транспортная задача имеет целевую функцию и ограничения в виде
$F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to min, \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le \alpha_{ij},, \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_i$.

- Будем рассматривать задачу при различном характере спроса, который является случайной величиной, т. е. зависит от случайных параметров w,
- $b_j = b_j^{/}(w)$При этом возможны два варианта формулировки модели задачи.
- *Вариант 1.* Пусть спрос b_j непрерывно распределен с плотностью вероятности $\varphi_j(b_j)$. Примем $y_j = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$ – это общий объем продукта, предназначенный в соответствии с планом, составленным до реализации $b_j(w)$, для j-го пункта потребления.
- После определения спроса может оказаться, что $y_j < b_j(w)$, тогда спрос не будет удовлетворен, и ущерб за невыполнение потребности будет пропорционален величине невыполнения с некоторым коэффициентом q_j, где q_j - штраф за невыполнение заявки за каждую единицу недовезенного продукта. Общий ущерб определяется как $q_j^-\left(b_j(w) - y_j\right)$
- В случае избытка, аналогично, возрастают затраты на хранение пропорционально величине избытка с коэффициентом (коэффициент штрафа за избыток). Общий ущерб от избытка при $y_j > b_j(w)$ будет
- $q_j^+\left(y_j - b_j(w)\right)$ (4.10)
- Математическое ожидание суммарных потерь, связанных с перевозкой продукта, ущерба от неудовлетворенного спроса и затрат на хранение избыточных продуктов определяется следующей целевой функцией
- $F_H(x,y) = M[F(x,y)] = \sum_{j=1}^{n} \left\{ \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij} + q_j^+ \int_0^{y_i} \left(y_j - b_j(w)\right) \varphi_j(b_j) db_j + q_j^- \int_{y_i}^{-\infty} \left(b_j(w) - y_j\right) \varphi_j(b_j) db_j \right\} \to min$ (4.11)
  (4.9)

где пределы интегрирования очевидны и определяются на рис. 4.1 избыточным (4.1) или недовезенным грузом (4.2) функции плотности распределения $\varphi_j(b_j)$.

- (4.1) или недовезенным грузом (4.2) функции плотности распределения $\varphi_j(b_j)$.
- В общем виде целевая функция может быть представлена как
- $F_H = \sum_{j=1}^{n}\{\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} +\}$ (4.12)
- Продифференцируем $f_j(y_j)$ дважды по y_j,
- $f_j^{//}(y_j) = (q_j^- + q_j^+)\varphi_j(b_j) \geq 0.$
- Это означает, что $f_j(y_j)$, а вместе с ней и $F\ (x, y)$ будут функцией, выпуклой вниз относительно y_j.
- Таким образом, детерминированный эквивалент стохастической транспортной задачи с непрерывно распределенным спросом представляет собой задачу *выпуклого программирования* с нелинейной целевой функцией и линейной системой ограничений.
- *Вариант 2.* Пусть спрос $b_j(w)$ распределен дискретно и в j-м пункте потребления принимает значения b_{ik} с вероятностями: p_{jk} $(k = 1, \ldots, s)$. Аналогично ранее рассмотренной задаче q_j^-, q_j^+ - коэффициенты штрафа за дефицит и издержки хранения единицы продукции.
- Введем вспомогательные переменные v_{jk}, u_{jk} - величины избытка и дефицита в j-м пункте потребления при реализации k-го варианта спроса, т.е. при $b_j(w) = b_{jk}$. Целевая функция – математическое ожидание суммарных затрат – будет включать общую стоимость перевозок и штрафы за дефицит и избыток:
- $F_D = \sum_{j=1}^{n}\{\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} + q_j^+ \sum_{k=1}^{s} p_{ik} v_{jk} + q_j^- \sum_{k=1}^{s} p_{ik} u_{jk}\} \rightarrow min$ (4.13)
- Всегда имеет место равенство $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} + u_{jk} - v_{jk} = b_{ik}, k = \overline{1, s}, j = \overline{1, n}$, которое означает, что спрос b_{jk} удовлетворяется привезенным продуктом $\sum_{j=1}^{n} x_j$и дефицитом u_{jk} за вычетом избытка v_{ik}. Подставляя полученное значение b_{jk} в целевую функцию после преобразования, получаем:
- $F_D = \sum_{j=1}^{n}\{\sum_{i=1}^{m}(c_{ij} + q_j^+)x_{ij} + (q_j^- + q_j^+)\sum_{k=1}^{s} p_{ik} u_{jk}\} - \sum_{j=1}^{n} q_j^+ \sum_{k=1}^{s} p_{ik} b_{jk}$ (4.14)

- Второе слагаемое не содержит параметра управления, поэтому формально в модели может не учитываться.
- Таким образом, детерминированный эквивалент стохастической транспортной задачи с дискретно распределенным спросом представляется моделью линейного программирования с целевой функцией F_D и линейными ограничениями:
- $F_D = \sum_{j=1}^{n}\{\sum_{i=1}^{m}(c_{ij} + q_j^+)x_{ij} + (q_j^- + q_j^+)\sum_{k=1}^{s} p_{ik} u_{jk}\} \to min,$
- $\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = a_i; \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + -v_{jk} = b_{jk}; \\ \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{s}(v_{jk} - u_{jk}) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{s} b_{jk} \end{cases}$
- Последнее ограничение означает, что разница между запасами и удовлетворенным спросом определяется дефицитом или избытками.
- Аналогично могут быть сформулированы и другие стохастические транспортные задачи, у которых случайным может быть, например, объем производства $a_i = (w)$.
- Эти задачи могут быть также сведены к задачам выпуклого или линейного программирования.

4.5. Задачи с построчными вероятностными ограничениями

- Типовая задача стохастического программирования представляет собой M-модель с построчными вероятностными ограничениями и имеет вид:
- $$\begin{cases} M[CX] \to max; \\ P\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i\} \ge \alpha_i, i = \overline{1,m}; \\ x_{j\ge 0} \end{cases}$$
- В зависимости от того, какие коэффициенты модели представляют собой случайные величины, выделяется несколько типов задач.
- *Вариант* А. $A = ||a_{ij}||$ - детерминированная матрица, $B = ||b_i||$- случайная матрица-столбец, $b_1, b_2, \dots, b_m$- случайные величины.
- Считается, что задана совместная плотность распределения составляющих b_i случайного вектора B: $\varphi(b_1, b_2, \dots, b_m) = \varphi(b_i)$, $i = \overline{1,m}$.
- Чтобы определить плотность распределения одной компоненты, необходимо проинтегрировать совместную плотность распределения $\varphi(b_i)$ по всем параметрам, за исключением b_i
- $\varphi_i(b_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(b_1, b_2, \dots, b_m) \prod_{k\ne i}^{m} db_k$
- Зная распределение одной случайной величины $\varphi_i(b_i)$, можно определить значение порога $\widetilde{b_i}$ из уравнения
- $\int_{\widetilde{b_i}}^{\infty} \varphi_i(b_i)\, db_i = \alpha_i$,

- где $\widetilde{b_i}$ является нижним пределом интегрирования.
- Она определяется как заданная вероятность α_i превышения случайной величиной b_i порога $\widetilde{b_i}$, что иллюстрируется на рис.4.2.
- Следовательно, построчные вероятностные ограничения
- $P\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i\right\} \ge \alpha_i,$ (4.18)
- можно записать в виде неравенства
- $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge \widetilde{b_i},\ i = \overline{1,m}.$ (4.19)
- Таким образом, задача для варианта A запишется в матричном виде
- $\begin{cases} M[CX] \to max; \\ AX \le \tilde{B}; \\ X \ge 0. \end{cases}$ (4.20)
- Где $\tilde{B} = \left\|\widetilde{b_i}\right\|$ – вычисленные значения порогов для всех построчных ограничений.
- Таким образом, задача при детерминированной матрице A и случайном столбце B будет решаться как детерминированная задача ЛП.а
- *Вариант* B. Принимаются элементы матрицы $A = \left\|a_{ij}\right\|$ - нормально распределенные независимые случайные величины со средним значением $\overline{a_{ij}}$ и дисперсией σ_{ij}^2. Составляющие случайного вектора $B = \left\|b_{ij}\right\|^T$ - нормально распределенные независимые случайные величины со средним значением $\overline{b_i}$ и дисперсией v_i^2. Принимаем, что вероятность соблюдения построчных ограничений $a_{ij} \ge 0{,}5$.
- При принятых допущениях невязка i-го вероятностного ограничения из (16) будет случайной величиной с нормальным распределением, как линейная комбинация нормально распределенных a_{ij} и b_i . Таким образом, невязка имеет вид
- $\delta_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i$

- Эта невязка имеет среднее значение $\bar{\delta}_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}} x_j - \bar{b_j}$ и дисперсию $\sigma_i^2(x) = \sum \sigma_{ij}^2 x_j^2 - \upsilon_i^2$
- Построчные вероятностные ограничения можно выразить через невязку в виде неравенства $P\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i\right] \geq \alpha_i$ следовательно, $P[\delta_i(x) \leq 0] \geq \alpha_i$. Или для нормального распределения вероятность можно определить по известной формуле нормального распределения
- $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i(x)} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{\left(\varepsilon - \bar{\delta}_i(x)\right)^2}{2\sigma_i^2(x)}} d\varepsilon\right) \geq \alpha_i$
- где ε - параметр интегрирования.
- Вводя интеграл вероятности Φ, соотношение (4.22) можно записать в виде
- $\Phi\left(-\frac{\bar{\delta}_i(x)}{\sigma_i(x)}\right) \geq \alpha_i$ или $-\frac{\bar{\delta}_i(x)}{\sigma_i(x)} \geq \Phi^{-1}(\alpha_i)$ $\qquad (4.23)$
- где Φ^{-1}- функция, обратная интегралу вероятности. Иначе: $\bar{\delta}_i(x) + \Phi^{-1}(\alpha_i)\sigma_i(x) \leq 0$ Подставляя сюда значения $\bar{\delta}_i(x), \sigma_i(x)$, получаем
- $\Phi^{-1}(\alpha_i)\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 x_j^2 - \upsilon_i^2} \leq \bar{b}_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \, \Phi^{-1}(\alpha_i \geq 0{,}5) \geq 0$. Область, ограничиваемая этим соотношением, выпукла, а сами ограничения квадратичны, т.к. x_j^2.
- Таким образом, при нормально распределенных случайных элементах матрицы A и составляющих вектора B решение задачи с построчными вероятностными ограничениями и решение в виде детерминированного вектора сводятся к решению задачи выпуклого программирования с линейной целевой функцией из (4.16) и квадратичными ограничениями из (4.24).
- *Вариант* C. Рассматривается P-модель, у которой требуется минимизация порога k при заданной вероятности α_0 непревышения целевой функцией этого порога.
- $P\left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq k\right) = \alpha_0$

- Заданы случайные коэффициенты целевой функции c_j, которые распределены нормально со средним значением $\overline{c_j}$ и коррелированы между собой.
- Корреляция определяется корреляционной матрицей $c_{ij} = M\left[(c_i - \overline{c_i})(c_j - \overline{c_j})\right]$. Целевая функция для нормально распределенной величины c_j будет также нормально распределенной со средним значением $\sum_{j=1}^{n} \overline{c_j}\, x_j$ и дисперсией $\sigma_i^2(x) = \sum_i \sum_j c_{ij} x_i x_j$.
- Среднее значение невязки из соотношения (4.25) $\overline{\delta_i}(x) = k - \sum_{j=1}^{n} \overline{c_j} x_j$. Вводя интеграл вероятности, аналогично (4.23) в принятых обозначениях получим $\Phi\left(\frac{k-\sum_{j=1}^{n} \overline{c_j} x_j}{\sqrt{\sum_i \sum_j c_{ij} x_i x_j}}\right) = \alpha_0$.
- Откуда $\Phi^{-1}(\alpha_0) = \frac{k-\sum_{j=1}^{n} \overline{c_j} x_j}{\sqrt{\sum_i \sum_j c_{ij} x_i x_j}}$. (4.26)
- Поэтому целевая функция для минимизации порога k запишется из выражения (4.26) в виде
- $k = \sum_j \overline{c_i} x_j + \Phi^{-1}(\alpha_0)\sqrt{\sum_i \sum_j c_{ij} x_i x_j} \rightarrow min$ (4.27)
- Таким образом, при минимизации порога для заданной вероятности непревышения его целевой функцией задача СП с построчными вероятностными ограничениями сводится к детерминированной задаче выпуклого программирования с квадратичной целевой функцией и квадратичными ограничениями.
- Например, рассмотрим задачу стохастического программирования, у которой заданы целевая функция в виде P – модели и построчные вероятностные ограничения в виде

- $P(c_1x_1 + c_2x_2 \le k) = \alpha_0, k \to max,$
- $P(3x_1 - 2x_2 \le b_1) \ge \alpha_1,$
- $P(-x_1 + 4x_2 \le b_2) \ge \alpha_2,$
- где заданы вероятности $\alpha_0 = 0{,}37; \alpha_1 = \alpha_2 = 0{,}9.$
- Матрица системы $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ детерминирована, c_1, c_2, b_1, b_2– нормально распределенные независимые между собой пары случайных величин со средними значениями $\bar{c} = [c_1, c_2] = [-1{,}2]$, $\bar{b} = [b_1, b_2] = [3{,}3]$, и корреляционными матрицами $[c_{ij}] = \begin{bmatrix} 10 & 7 \\ 7 & 20 \end{bmatrix}, [b_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
- Можно рассмотреть плотность распределения одной из случайных величин, например b_1, т. е. $\varphi_1(b_1)$, приведенную на рис. 4.3.
- По заданному среднему значению $\overline{b_1} = 3$ строится $\varphi_1(b_1)$, смещенная относительно начала координат. Известная величина $\alpha_1 = 0{,}9$ задает площадь под функцией плотности распределения, которая определяет границу $\widetilde{b_1} = 2{,}72$ порога в ограничении, как следует из уравнения (4.17). Из табличных значений обратного интеграла вероятности находится $\Phi^{-1}(0{,}37) = 0{,}33$.
- Таким образом, детерминированный эквивалент рассматриваемой задачи имеет целевую функцию $K = -x_1 + 2x_2 + 0{,}33\sqrt{10 + 14x_1x_2 + 20x_2^2} \to max$
- и систему ограничений
- $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 2{,}72 \\ -x_1 + 4x_2 \le 2{,}72 \end{cases}$
- Решение стохастической задачи полностью сводится к решению детерминированной задачи.

4.6. Одноэтапные стохастические задачи с линейными решающими правилами

- В рассмотренных ранее задачах решение определялось в виде детерминированного вектора.
- Теперь под оптимальным решением подразумевается набор решающих правил, т.е. зависимость компонент решения от реализованных и наблюдавшихся параметров условий задач.
- Имеется два типа таких моделей:
- *1-й тип моделей* - функциональный вид решающих правил *задается заранее.* Характер зависимости решения от реализованных параметров определяется из содержания задачи. Решение стохастической задачи сводится к вычислению детерминированных параметров решающих правил.
- *2-й тип моделей* - функциональный вид решающих правил *заранее не определяется,* а предполагается заданным функциональное пространство, которому принадлежит решающее правило. Решающие правила представляют собой инструкции, указывающие или конкретизирующие оптимальный план, как только становятся известными реализации случайных исходных данных задачи.
- Рассматриваем стохастические модели со следующими условиями:
- а) модель имеет построчные вероятностные ограничения;
- б) решающие правила представляют собой линейные функции случайных параметров условий задачи;
- в) распределение случайных составляющих вектора ограничений и целевой функции подчиняется нормальному закону распределения.

- Таким образом, анализируем М-модель с построчными вероятностными ограничениями в виде
- $\mathrm{M}[CX] \to max,\ P\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i\right] \ge \alpha_i, i = \overline{1,m},\ x_{j\ge 0}$
- где $A = \left\|a_{ij}\right\|$ - детерминированная матрица, B, C - независимые случайные векторы, компоненты которых a_{ij}, b_i, c_j могут быть коррелированы между собой.
- Задаем решающее правило в виде $X\ =\ DB,$ где $[D] = \left\|d_{ij}\right\|$ - неизвестная детерминированная матрица размерностью $n \times m$.
- Найти решение задачи означает вычислить элементы d_{ij} матрицы $D.$
- Экономический смысл решающего правила в следующем: в каких пропорциях изменять или выбирать решение X в зависимости от величины ограничений на ресурсы B.
- Вводим элементы определяемой матрицы в целевую функцию, учитывая, что $\bar{X}\ = D\bar{B}$:
- $\mathrm{M}[CX] = \bar{C}\bar{X} = \bar{C}D\bar{B} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} d\bar{c_j}\bar{b}_i \to max$ (4.29)
- где $\bar{C}, \bar{B}$ - математическое ожидание векторов C, B.
- Изменим вид ограничений задачи. Обозначим $a_i = \|a_{i1} \dots a_{in}\|$- i-ю строку матрицы А, тогда построчное вероятностное ограничение $P\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i\right] \ge p_i$ можно записать как
- $P[a_i DB \le b_i] \ge p_i$ (4.30)
- Рассмотрим невязку ограничения и обозначим её как S_i , т. е. $S_i = b_i - a_i DB,$ а её среднее значение будет $\bar{S}_i = \bar{b}_i - a_i D\bar{B}$.
- Вводим вспомогательную случайную переменную в виде
- $\lambda_i = \frac{S_i - \bar{S}_i}{\sigma_{S_i}}$ где σ_{S_i} – среднеквадратическое отклонение невязки:

  $\sigma_{S_i} = \sqrt{M[(S_i - \bar{S}_i)^2]}$.
- Тогда, подставив значения S_i и $\bar{S}_i$, получим
- $\lambda_i = \frac{S_i - \bar{S}_i}{\sqrt{M[(S_i - \bar{S}_i)^2]}} = \frac{(b_i - \bar{b}_i) - a_i D(B - \bar{B})}{\sqrt{M\left[\left((b_i - \bar{b_i}) - a_i D(B - \bar{B})\right)^2\right]}}$

- Её математическое ожидание $\bar{\lambda}_i = M[\lambda_i] = 0$, т.к. λ_i – центрированная случайная величина, а дисперсия $\sigma^2_{\lambda_i} = M\left[\left(\lambda_i - \bar{\lambda}_i\right)^2\right] = 1$, т.к. центрированная случайная величина $S_i - \bar{S}_i$ делится на свое среднеквадратичное отклонение $\sigma^2_{\lambda_i}$.
- Выразим ограничения (4.30) через невязку
- $P(S_i \geq 0) \geq p_i$ (4.33)
- а саму невязку – через вспомогательную случайную переменную из выражения (4.31)
- $S_i = \lambda_i \sigma_{S_i} + \bar{S}_i \geq 0.$
- Невязка в пределе будет равна нулю, если $\lambda_i = -\frac{\bar{S}_i}{\sigma_{S_i}}$.
- Ограничение (4.33) в этом случае будет $P\left(\lambda_i \geq -\frac{\bar{S}_i}{\sigma_{S_i}}\right) \geq p_i$ или $P\left(\lambda_i \geq -\lambda_i^0\right) \geq p_i$ где $\lambda_i = -\frac{\bar{S}_i}{\sigma_{S_i}}$ - неслучайная величина, т.к. σ_{S_i} и $\bar{S}_i$ - неслучайные параметры.
- С обратной функцией интеграла вероятности (аналогично варианту В) это ограничение будет $\lambda_i^0 \leq \Phi^{-1}(1-p_i)$,то есть $-\frac{\bar{S}_i}{\sigma_{S_i}} \leq -k_i$,где $k_i = \Phi^{-1}(1-p_i)$ – зависит только от вероятности p_i и не зависит от элементов матрицы D. Подставив значения $\sigma_{S_i}, \bar{S}_i$, получим $\bar{b}_i - a_i D\bar{B} \geq k_i\sqrt{M\left[\left(\left(b_i - \bar{b}_i\right) - a_i D(B - \bar{B})\right)^2\right]}$. Вводим вспомогательную переменную Z_i так, что
- $\bar{b}_i - a_i D\bar{B} \geq Z_i \geq k_i\sqrt{M\left[\left(\left(b_i - \bar{b}_i\right) - a_i D(B - \bar{B})\right)^2\right]}$. (10.34)
- Это соотношение эквивалентно системе неравенств:

$$\begin{cases} a_i D\bar{B} + Z_i \leq \bar{b}_i; \\ Z_i^2 - k_i^2\sqrt{M\left[\left(\left(b_i - \bar{b}_i\right) - a_i D(B - \bar{B})\right)^2\right]} \geq 0; \\ Z_i \geq 0, i = \overline{1,m} \end{cases} \qquad (4.35)$$

- Теперь можно ввести функции, зависящие от искомой величины D:
- $\mu_i(D) = M[b_i - a_i D\bar{B}]$ и $\sigma_I^2(D) = M[(b_i - a_i D\bar{B})^2]$.
- Таким образом, М-модель стохастического программирования с линейными решающими правилами и построчными вероятностными ограничениями сводится к детерминированной задаче выпуклого программирования с квадратичными ограничениями относительно переменных D и Z_i.

4.7. Двухэтапные задачи СП

- В практических задачах управления и планирования в условиях риска существуют ситуации, когда целесообразно принять решение в двух формах:
- в виде детерминированного вектора;
- в виде случайного вектора.
- Детерминированный вектор определяет *предварительное решение,* принимаемое до реализации условий задачи.
- Случайный вектор соответствует коррекции, вводимой в решение после наблюдения реализованных параметров условий задачи.
- Например, можно рассмотреть задачу планирования производства в условиях неопределенного спроса на продукцию. В этой задаче оптимальный план производства содержит две группы параметров:
- первая группа определяет предварительное решение об объеме продукции, что позволяет руководству предприятия подготовить технологию, заключить договора, заказать материалы и начать выпуск продукции;
- вторая группа параметров вычисляется после установления спроса (т.е. наблюдения реализации случайных параметров условий задачи) - это коррекция плана.
- Коррекция необходима для компенсации невязок - несоответствия между спросом и объемом выпускаемой продукции, определенными предварительным планом.
- Разработка предварительного плана и компенсация невязок - два этапа решения одной задачи. Такие задачи называются *двухэтапными задачами стохастического программирования*.

- В двухэтапных задачах на первом этапе выбирается предварительный план, позволяющий произвести необходимые подготовительные работы. На втором этапе производится компенсация невязок, выявленных после наблюдения реализованных значений случайных параметров.
- Целевая функция должна быть такой, чтобы минимизировать среднее значение суммарных затрат, возникающих на обоих этапах.
- Рассматриваем задачу, у которой часть элементов матрицы *A* имеет дополнительные ограничения:
- $$\begin{cases} CX \to min & (1) \\ AX = B & (2) \\ A^{(1)}X = B^{(1)} & (3) \\ X \geq 0 & (4) \end{cases} \qquad (4.37)$$
- $A(w), B(w), C(w)$ зависят от случайных параметров, т.е. элементы матрицы и векторов являются случайными величинами.
- Решение X следует принять до наблюдения реализации случайных параметров. Процесс решения задачи будет следующим.
- выбирается решение, удовлетворяющее условиям $(3), (4)$.
- фиксируется реализация $\widetilde{w}$ случайного события, вычисляются соответствующие ему значения $B(\widetilde{w})$ и $A(\widetilde{w})$.
- оценивается невязка условия (2), т.е. $B(\widetilde{w}) - A(\widetilde{w})\tilde{X}$.
- вычисляется вектор $Y \geq 0$, компенсирующий невязки в соответствии с соотношением $KY = B(\widetilde{w}) - A(\widetilde{w})\tilde{X}$, где $K = \left\|k_{ij}\right\|$ - матрица невязок компенсации.

- В общем случае элементы матрицы компенсации К случайны. В производственных терминах: если А - матрица основных технологических способов, то матрица К понимается как матрица аварийных технологических способов, определяющих пути компенсации обнаруженных невязок.
- За нарушение условий задачи устанавливается штраф, зависящий от величины составляющих вектора Y с некоторым случайным коэффициентом Q.
- Таким образом, вектор Y выбирается так, чтобы обеспечить минимальный штраф за компенсацию невязок условий задачи, определяющихся предварительным планом или решением X.
- Следовательно, на втором этапе решается задача:
- $$\begin{cases} QY \to min \\ KY = B - AX \\ Y \geq 0. \end{cases} \qquad (4.38)$$
- Оба этапа решения задачи (4.37) и (4.38), сведенные в один, приводят к двухэтапной задаче стохастического программирования:
- $$\begin{cases} \min\limits_X M_w \left\{ C(w)X + \min\limits_Y [Q(w)y] \right\} \\ A^{(1)}X = B^{(1)} \\ X \geq 0 \end{cases} \qquad (4.39)$$
- Таким образом, решение двухэтапной задачи СП состоит из двух векторов:
- детерминированного n-мерного вектора X, определяющего предварительный план;
- случайного п-мерного вектора $Y = Y(w)$, определяющего план компенсации невязок.
- Обобщением двухэтапных задач являются многоэтапные задачи СП, у которых на каждом последующем этапе необходимо полностью компенсировать невязки, связанные с принятыми ранее решениями и реализованными параметрами.

Математические методы и модели поддержки принятия решений

ТЕМА 2: Нелинейные модели оптимизации в управлении

Задачи нелинейного программирования

К задачам нелинейного программирования относятся задачи, в которых хотя бы одно из уравнений из системы ограничений целевой функции является нелинейным. Нелинейные задачи сложны, часто их упрощают тем, что приводят к линейным. Решать линейные задачи значительно проще, чем нелинейные, и если линейная модель обеспечивает адекватность реальным ситуациям, то ее и следует использовать.

Задачи нелинейного программирования - задачи математического программирования, в которых нелинейны или целевая функция, или ограничения в виде неравенств или равенств.

Классификация задач нелинейного программирования

Вид *F(x)*	**Вид функции ограничений**	**Число переменных**	**Название задачи**
Нелинейная	Отсутствуют	1	Безусловная однопараметрическая оптимизация
Нелинейная	Отсутствуют	Более 1	Безусловная многопараметрическая оптимизация
Нелинейная или линейная	Нелинейные или линейные	Более 1	Условная нелинейная оптимизация

- Нелинейное программирование (англ. NonLinear Programming) — математическое программирование, которое не сводится к постановке задачи линейного программирования. В данном случае, целевой функцией или ограничением является нелинейная функция.

Категории источников нелинейности в задачах

- \- Реально существующие и эмпирически наблюдаемые нелинейные соотношения, например, непропорциональные зависимости между объемом производства и затратами, между количеством используемого в производстве компонента и некоторыми показателями качества готовой продукции, между затратами сырья и физическими параметрами (давление, температура и т.п.) соответствующего производственного процесса, между выручкой и объемом реализации и т.п.
- -Установленные (постулируемые) руководством правила поведения или задаваемые зависимости, например, правила расчета с потребителями энергии или других видов услуг, правила определения страховых уровней запаса продукции, гипотезы о характере вероятностного распределения рассматриваемых в модели случайных величин, различного рода договорные условия взаимодействия между партнерами по бизнесу и др.

Отличие задач нелинейной оптимизации от задач линейной оптимизации (линейного программирования).

-решение нелинейных задач по сложности значительно превосходит решение рассмотренных ранее задач линейной оптимизации. В связи с этим, долгое время в практике экономического управления модели линейной оптимизации успешно применялись даже при наличии нелинейности.

-в отличие от задачи линейной оптимизации (линейного программирования), не существует одного или нескольких алгоритмов, эффективных для решения любых нелинейных задач. Какой-то алгоритм может быть эффективен при решении задач одного типа и неприемлемым для задач другого типа.

-программы, ориентированные на решение определенного класса задач, не гарантируют правильность решения любых нелинейных задач этого класса и оптимальность решения следует проверять в каждом конкретном случае.

наиболее употребительные методы решения задач нелинейной оптимизации (нелинейного программирования)

- -Оптимизация нелинейной функции с ограничениями на
- неотрицательность значений переменных
- -Модели выпуклого программирования
- -Сепарабельное программирование
- -Дробно-нелинейное программирование
- -Невыпуклое программирование

Решение оптимизационных задач в Excel

- Процессор электронных таблиц Excel является мощным и достаточно эффективным средством решения задач нелинейной оптимизации.

- Для решения общей оптимизационной задачи в Excel с использованием настройки Поиск решения следует выполнить следующие действия:
- •	Ввести формулу для целевой функции;
- •	Ввести формулы для ограниченй оптимизационной задачи;
- •	Выбрать в Excel пункт меню Сервис/Поиск решения;
- •	В окне Поиск решения выбрать целевую ячейку, изменяемые ячейки и добавить ограничения;
- •	Нажать кнопку Выполнить, после чего будет получено решение оптимизационной задачи.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу. Предприятие располагает ресурсами двух видов сырья и рабочей силы, необходимыми для производства двух видов продукции. Затраты ресурсов на изготовление одной тонны каждого продукта, прибыль, получаемая предприятием от реализации тонны продукта, а также запасы ресурсов приведены в таблице:

Ресурс	Расход ресурса		Запас ресурса
	На продукт 1	На продукт 2	
Сырье 1, т	3	5	120
Сырье 2, т	4	6	150
Трудозатраты, ч	14	12	400
Прибыль единицы продукта руб./т	72	103	

Стоимость одной тонны каждого вида сырья определяется следующими зависимостями:

(9+0,0088*r1) тыс. руб. для сырья 1

(5-0,0088*r2) тыс. руб. для сырья 2,

где r1, r2 - затраты сырья на производство продукции.

Стоимость одного часа трудозатрат определяется зависимостью

(1-0,0002*r),

где r - затраты времени на производство продукции.

Вопросы:

Сколько продукта 1 и 2 следует производить для того, чтобы обеспечить максимальную прибыль?

Какова максимальная прибыль?

Решение:

Пусть x_1 и x_2 - объемы выпуска продукции 1 и 2 в тоннах. Тогда задача может быть описана в виде следующей модели нелинейного программирования:

$$f(x_1,x_2)=11x_1+16x_2+0.1x_1^2+0.12x_2^2+0.22x_1x_2 \to \max,$$

$$3x_1+5x_2 \le 120,$$

$$4x_1+6x_2 \le 150,$$

$$14x_1+12x_2 \le 400,$$

$$x_1,x_2 \ge 0.$$

Решение данной задачи в Excel.

Отведем для искомых значений объемов выпуска продукции ячейки B8, C8, для расхода соответствующих ресурсов (включая трудозатраты) – ячейки B3, B4, B5. В данные ячейки необходимо ввести функции

=3*B8+5*C8
=4*B8+6*C8 и
=14*B8+12*C8
соответственно.

	A	B	C	D	E
1	Распределение ресурсов предприятия				
2					
3	Ресурс 1(сырье первого типа)		120		
4	Ресурс 2 (сырье второго типа)		150		
5	Ресурс 3 (трудозатраты)		400		
6					
7		X1	X2		
8					
9					Целевая функция
10					
11					

Решение задачи производится с помощью Поиска решения Excel. Изменяемыми ячейками будут, очевидно, ячейки B8, C8; целевая ячейка устанавливается равной максимальному значению; используются следующие ограничения: $B$3<=$C$3, $B$4<=$C$4, $B$5<=$C$5.

ЗАМЕЧАНИЕ:

- в связи с нелинейностью данной задачи необходимо в окне Параметры поиска решения
- отключить опцию Линейная модель
- В результате запуска Поиска решения
- получим ответ: x1=16,67; x2=13,89
- Значение максимальной прибыли равно 507.407 тыс.
-

Математические методы и модели поддержки принятия решений

Тема 6. Использование оптимизационных моделей при принятии решений.

Неопределенности природы

Важнейшей составляющей частью любого вида человеческой деятельности является принятие решений в условиях вероятностной неопределенности. Сложность выбора того или иного решения зависит от степени определенности возможных исходов или последствий. Неопределенность порождается множеством различных факторов, таких как экономическая ситуация в стране, уровень инфляции, курсы валют, рыночная конъюнктура, политические отношения, состояние погоды, стихийные обстоятельства и т.п. В этом случае речь идет о принятие решений в условиях вероятностной неопределенности.

Неопределенные факторы можно разбить на три группы

Первая — это факторы, людям попросту не известные или от них не зависящие. Они связаны с принципиальной неизвестностью или недостаточной изученностью внешних обстоятельств, которые могут повлиять на выбор.

Вторую группу составляет неопределенность человека, который может вести себя непоследовательно, противоречиво, допускать ошибки, зависеть от других лиц (партнеров, противников и т.д.), чьи действия он не может полностью учесть или предвидеть.

В третью группу входит неопределенность целей, которые могут различаться и не совпадать друг с другом.

Принцип наилучшего гарантированного результата; определение гарантирующей стратегии. Возможные подходы к улучшению гарантированной оценки.

Три случая степени неопределенности состояний природы

- Заданы вероятности нахождения природы в каждом из состояний.
- Вероятности состояний природы неизвестны, однако можно сделать предположение относительно их значений.
- Вероятности состояний природы неизвестны и невозможно сделать предположения об их распределении.

Игры с природой. Применение методов теории игр к анализу ЗПР в условиях риска и неопределенности.

Математическая модель ситуации, в которой принятие решений зависит от объективных обстоятельств, называется игрой с природой. Подобные модели изучает такой раздел математики как «Теория игр с природой» («Теория принятия решений»). Она служит для выработки рекомендаций по рациональному образу действий в условиях риска и неопределенности, вызванной не зависящими от нас причинами.

Игру с природой можно определить, как парную игру, в которой сознательный игрок А, заинтересованный в наиболее выгодном для него исходе игры, выступает против участника, совершенно безразличного к результату природа П.

Очевидно, что при решении игр с природой достаточно найти наилучшие рекомендации только для игрока А, потому как природа в рекомендациях не нуждается, развиваясь в соответствии с определенными законами независимо от того, удобно это человеку или нет.

Все критерии построены по одному принципу. Сначала каждой альтернативе (стратегии ЛПР) ставится в соответствие число – количественная оценка стратегии, затем из сопоставления этих оценок выбирается оптимальная стратегия.

Учитывая специфику игр с природой, при поиске оптимальных решений обращаются к различным методам-критериям, дающим некоторою логическую схему принятия решения.

ЗПР в условиях конфликта. Анализ конфликтной ситуации на примере двух субъектов: построение гарантированной оценки, возможности ее улучшения при различных предположениях о поведении субъектов. Проблема коллективного формирования компромисса. Точки равновесия.

Основные понятия и положения теории стратегических игр в природе и обществе часто встречаются явления, в которых отдельные участники имеют несовпадающие интересы и располагают различными путями достижения своих целей. Столкновение несовпадающих интересов участников приводит к возникновению конфликтных ситуаций.

Участники конфликта называются игроками; множество игроков обозначается In где I меняется от 1 до K . Стратегией игрока i∈I называется совокупность правил, однозначно определяющих последовательность его действий при любом развитии конфликта; стратегия игрока обозначается si , совокупность стратегий − Si. Процесс игры состоит в выборе каждым из игроков i∈I одной из своих стратегий si∈Si, в результате чего складывается игровая ситуация.

Алгоритм решения матричной игры состоит из следующих этапов.

Находим нижнюю и верхнюю цену игры и проверяем платежную матрицу на наличие седлового элемента.

Выявляем доминируемые стратегии игроков. Если игроки имеют доминируемые стратегии, их следует исключить из дальнейшего рассмотрения, понизив тем самым размерность задачи. Тем самым осуществляется сужение множества допустимых альтернатив (стратегий игроков) до множества эффективных (недоминируемых) альтернатив.

Находим оптимальные смешанные стратегии игроков и цену игры решением пары симметричных взаимно двойственных задач линейного программирования.

Принцип равновесия Нэша

Равновесие Нэша (Nash equilibrium) – это такая комбинация стратегий игроков и их выигрышей, при которой ни один из игроков не может увеличить свой выигрыш, изменив свою стратегию, если при этом другие участники своих стратегий не меняют.

Нахождение равновесия Нэша

Следующие правила полезны для определения равновесия Нэша в игре:

- Следование обоими игроками доминирующим стратегиям, которые обеспечивают им лучший выигрыш независимо от действий и решений соперника, ячейка, в которой пересекаются доминирующие стратегии обоих игроков, является равновесием Нэша.
- Если у одного игрока есть доминирующая стратегия, то ячейка в строке или столбце доминирующей стратегии, в которой противник имеет максимальный выигрыш, является равновесием Нэша.
- Если ни одна фирма не имеет доминирующей стратегии, следует определить любые доминирующие стратегии и вычеркнуть эти ячейки. Определить максимальные выплаты для каждого игрока в каждой строке и столбце и поставить галочки напротив них. Ячейки, в которых проверяются оба выигрыша, показывают потенциальное равновесие Нэша.

Пример использования принципа Равновесия Нэша

Рассмотрим две фирмы А и В, которые должны решить, каков их рекламный бюджет. Следующая матрица выплат показывает чистое увеличение прибыли каждой фирмы при различных сценариях развития событий:

		Убрать рекламу	**Ничего не менять**	**Увеличить рекламу**
Выплаты, млн USD		Фирма В		
Фирма А	Убрать рекламу	80, 100	-10, 90	-50, 80
	Ничего не менять	100, 60	0, 20	30, 50
	Увеличить рекламу	150, 20	130, 50	50, 20

Матричные игры

Рассмотрим игру, в которой участвуют два игрока, причем каждый из игроков имеет конечное число стратегий. Обозначим для удобства одного из игроков через А, в другого — через В.

Предположим, что игрок А имеет m стратегий — $A_1, A_2, \ldots, A_m,$

игрок В имеет n стратегий $B_1, B_2, \ldots, B_n.$

Пусть игрок А выбрал стратегию A_i, а игрок В стратегию B_k

Будем считать, что выбор игроками стратегий A_i и B_k

однозначно определяет исход игры — выигрыш a_{ik} игрока А и выигрыш b_{ik} игрока В,

причем эти выигрыши связаны равенством $\boxed{b_{ik} = -a_{ik}}$

(отрицательный выигрыш на бытовом языке обычно называют проигрышем).

Если нам известны значения выигрыша при каждой паре стратегий (в каждой ситуации)

$$\{A_i, B_k\},\ i = 1, 2, \ldots, m,\ k = 1, 2, \ldots, n,$$

то их удобно записывать или в виде прямоугольной таблицы, строки которой соответствуют стратегиям игрока А, а столбцы — стратегиям игрока В:

	B_1	B_2	$\ldots$	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2n}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\ldots$	a_{mn}

или в виде матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица имеет размер m x n и называется матрицей игры, или платежной матрицей (отсюда и название игры — *матричная*).

Рассматриваемую игру часто называют *игрой m x n* или *m x n игрой*.

Замечание:

Матричные игры относятся к разряду так называемых антагонистических игр, то есть игр, в которых интересы игроков прямо противоположны. Поэтому матричные игры используют в условиях конфликта.

Сведение матричных игр к задачам ЛПР.

В чистом виде антагонистические конфликты встречаются редко (разве только в боевых действиях и в спортивных состязаниях). Однако довольно часто конфликты, в которых интересы сторон противоположны, при допущении, что множество способов действия сторон конечно, можно моделировать матричными играми.

Рассмотрим пример задачи

«Переговоры о заключении контракта между профсоюзом и администрацией». Рассмотрим фирму, администрация которой ведет переговоры с профсоюзом рабочих и служащих о заключении контракта.

Предположим, что платежная матрица, отражающая интересы договаривающихся сторон, имеет следующий вид

$$\begin{pmatrix} 75 & 105 & 65 & 45 \\ 70 & 60 & 55 & 40 \\ 80 & 90 & 35 & 50 \\ 95 & 100 & 50 & 55 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что седловой точки у платежной матрицы нет. Кроме того, для дальнейшего анализа существенными являются лишь стратегии

A_1 и A_4 игрока А и стратегии B_3 и B_4 игрока В

(в этом нетрудно убедиться, воспользовавшись правилом доминирования стратегий). В результате соответствующего усечения получим матрицу $\begin{pmatrix} 65 & 45 \\ 50 & 55 \end{pmatrix}$.

Элементы матрицы $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,

связаны с элементами предыдущей матрицы соотношениями

$$65 = 5 \cdot 4 + 45, \quad 45 = 5 \cdot 4 + 45, \quad 50 = 5 \cdot 1 + 45, \quad 55 = 5 \cdot 2 + 45.$$

Воспользовавшись графическим методом, в итоге получим

$$P = \left\{\frac{1}{5}, 0, 0, \frac{4}{5}\right\}, \quad Q' = \left\{0, 0, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right\}, \quad \nu = 53.$$

Тем самым, профсоюзу следует выбирать стратегию A_1

в 20 % случаев и стратегию A_4 в 80 %.

Что касается администрации, то ей следует выбирать стратегию B_4 с вероятностью 0,6.

При этом ожидаемая цена игры равна 53.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

ТЕМА 7: МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРОЦЕССАХ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

7.1 МОДЕЛИ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

Слово «модель» произошло от латинского слова «modulus», что в переводе означает «образец», это понятие используется в различных сферах человеческой деятельности и имеет множество смысловых значений. Наскальные изображения древних людей, статуэтки, карты, картины, книги - все это модельные формы представления и передачи знаний об окружающем мире последующим поколениям людей (Рис.1).

ДРЕВНИЕ МОДЕЛИ - НАСКАЛЬНЫЕ РИСУНКИ

С ПОЯВЛЕНИЕМ КОМПЬЮТЕРА СИТУАЦИЯ РАДИКАЛЬНО ИЗМЕНИЛАСЬ. ЛЮДИ УЖЕ МОГЛИ ПЕРЕДАВАТЬ КОМПЬЮТЕРУ СВОИ ЗНАНИЯ, СОЗДАВ КОМПЬЮТЕРНУЮ МОДЕЛЬ РЕАЛЬНОГО ОБЪЕКТА ИЛИ ПРОЦЕССА. ПРОИСХОДИТ ВТОРОЕ ОТРАЖЕНИЕ МИРА, ТЕПЕРЬ УЖЕ ИЗ МЫШЛЕНИЯ ЧЕЛОВЕКА В КОМПЬЮТЕР. В ЭТОМ СМЫСЛЕ КОМПЬЮТЕРНЫЙ МИР ЯВЛЯЕТСЯ ТРЕТЬЕЙ РЕАЛЬНОСТЬЮ, СХЕМАТИЧНО ЭТО МОЖНО ОТОБРАЗИТЬ ТАК (РИС.2):

I. **этап Материя (живая и неживая)**

II. **этап Мышление человека**

III. **этап Неживая материя (компьютер)**

Схема отображения мира

ОПРЕДЕЛЕНИЯ МОДЕЛЕЙ

- Модель - искусственно созданный объект, который воспроизводит в определенном виде реальный объект - оригинал.
- Модель - это физический или информационный аналог объекта, функционирование которого по определенным параметрам подобно функционированию реального объекта.
- Модель - это новый объект, который отражает некоторые стороны изучаемого объекта, процесса или явления, существенные с точки зрения целей моделирования.
- Модель - это объект заместитель объекта оригинала, часто существующий в форме, отличной от формы существования оригинала, но сохраняющий некоторые его свойства.

ДОСТОИНСТВА И НЕДОСТАТКИ РАБОТЫ С МОДЕЛЯМИ

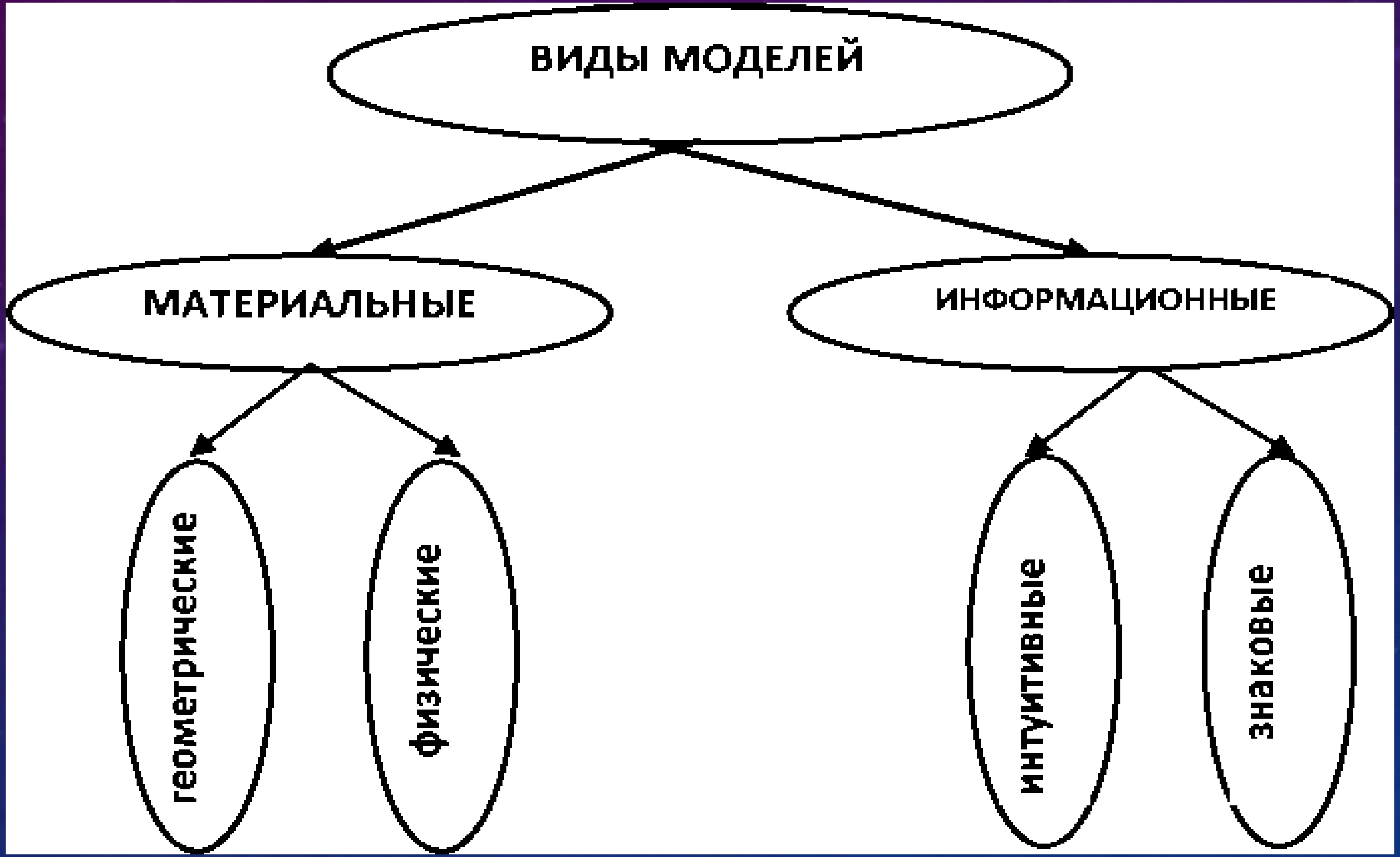
+

- **С моделями проще работать**
  - Человеческая система переработки информации ограничена, модель отражает только ограниченное число атрибутов сущности
- **Модели допускает эксперименты**
  - У реального объекта меньше степеней свобод
  - Эксперимент с моделью – это тоже модель, модель эксперимента дешевле
- **Модели дешевле, изменения модели требуют меньше времени**
  - Реализация изменений на модели требует значительно меньше ресурсов
  - В реальных системах существуют временные лаги
- **Изменения модели обратимы**
  - Проще, дешевле и быстрее вернуться к исходному состоянию
  - Модели прощают ошибки
- **Изменения многовариативны**
  - Можно разработать множество альтернатив
  - Вариации более многообразны

–

- **С моделями сложнее работать**
  - Модель не отражает связей с другими не отраженными в ней аспектами, она всегда беднее оригинала
  - Чем сложнее прототип, тем большего опыта и знаний требует моделирование
- **В некоторых случаях «выгоднее работать» с оригиналом**
  - Моделирование – это тоже затраты времени
  - Модель искажает реальную действительность (возможны ошибки)
  - Реализация изменений в модели вносит еще большие искажения
  - Выделение модели изменений и перенос этой модели на прототип требует разработки механизмов реализации (инсталляции)

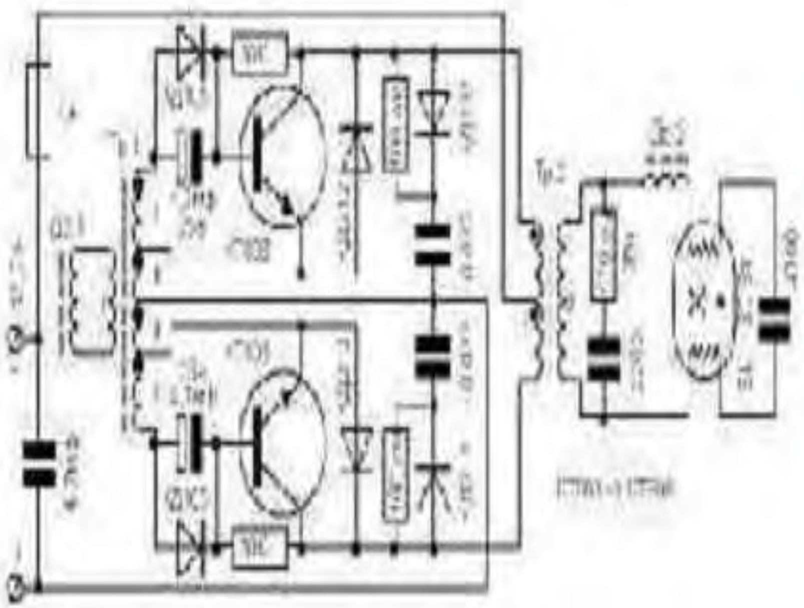
СХЕМА КЛАССИФИКАЦИИ МОДЕЛЕЙ ПО СУЩНОСТИ

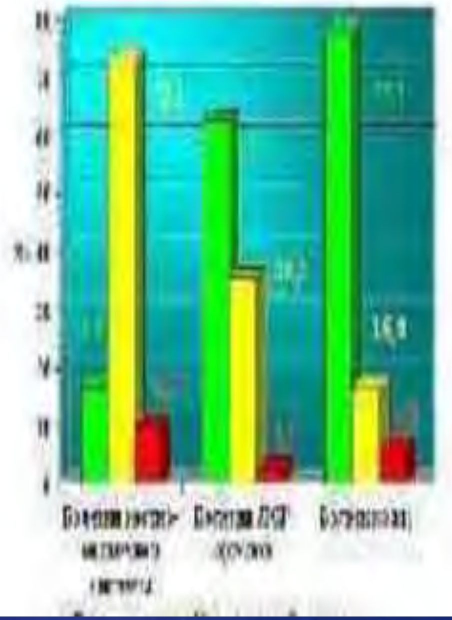


МЫСЛИМАЯ МОДЕЛЬ

МОДЕЛЬ-УМОЗАКЛЮЧЕНИЕ

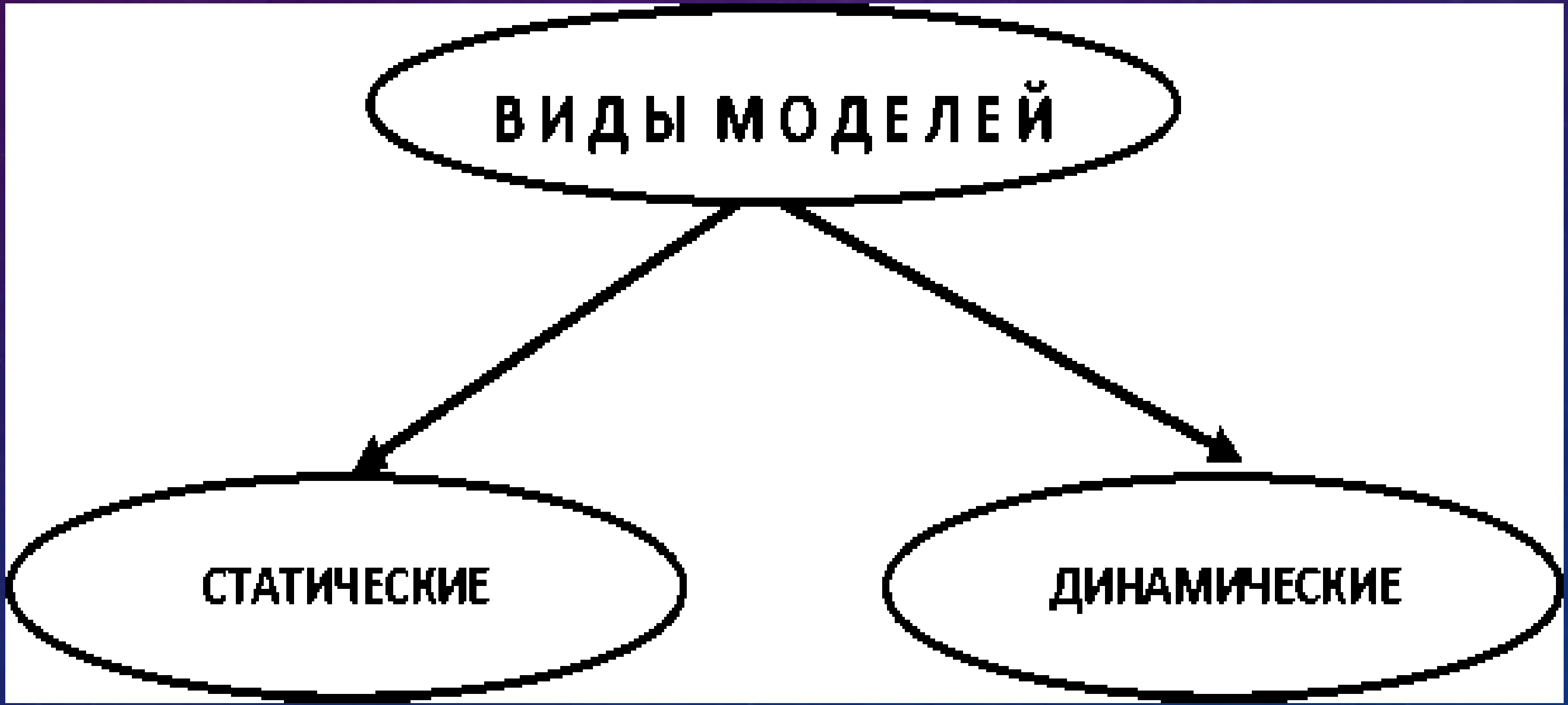
ЗНАКОВЫЕ МОДЕЛИ (СХЕМА, ДИАГРАММА, ФОРМУЛА)



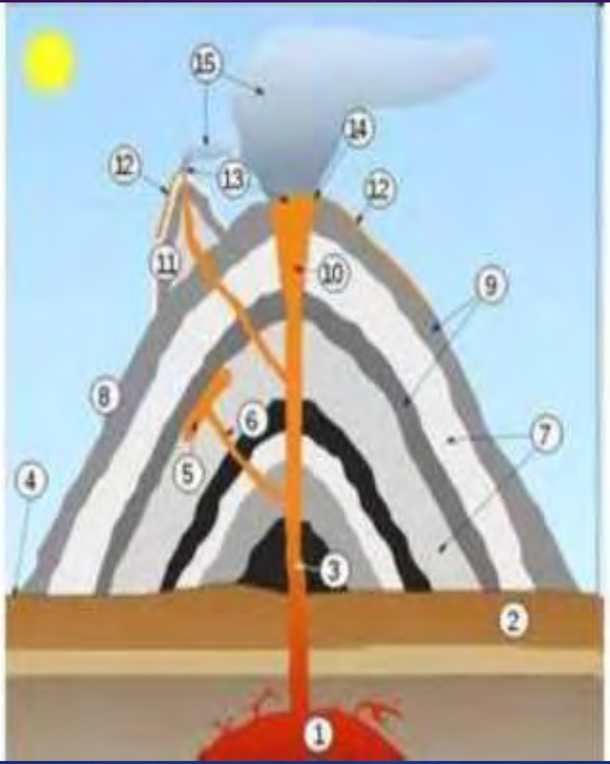


$$c_i = \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{k \neq i \\ k=0}}^{N} \frac{(t - t_k)}{(t_i - t_k)} \, dt$$

СХЕМА КЛАССИФИКАЦИИ МОДЕЛЕЙ ПО ВРЕМЕННОМУ ФАКТОРУ



СТАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ИЗВЕРЖЕНИЯ ВУЛКАНА



ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИЗМЕНЕНИЯ ЦЕПОЧКИ ДНК

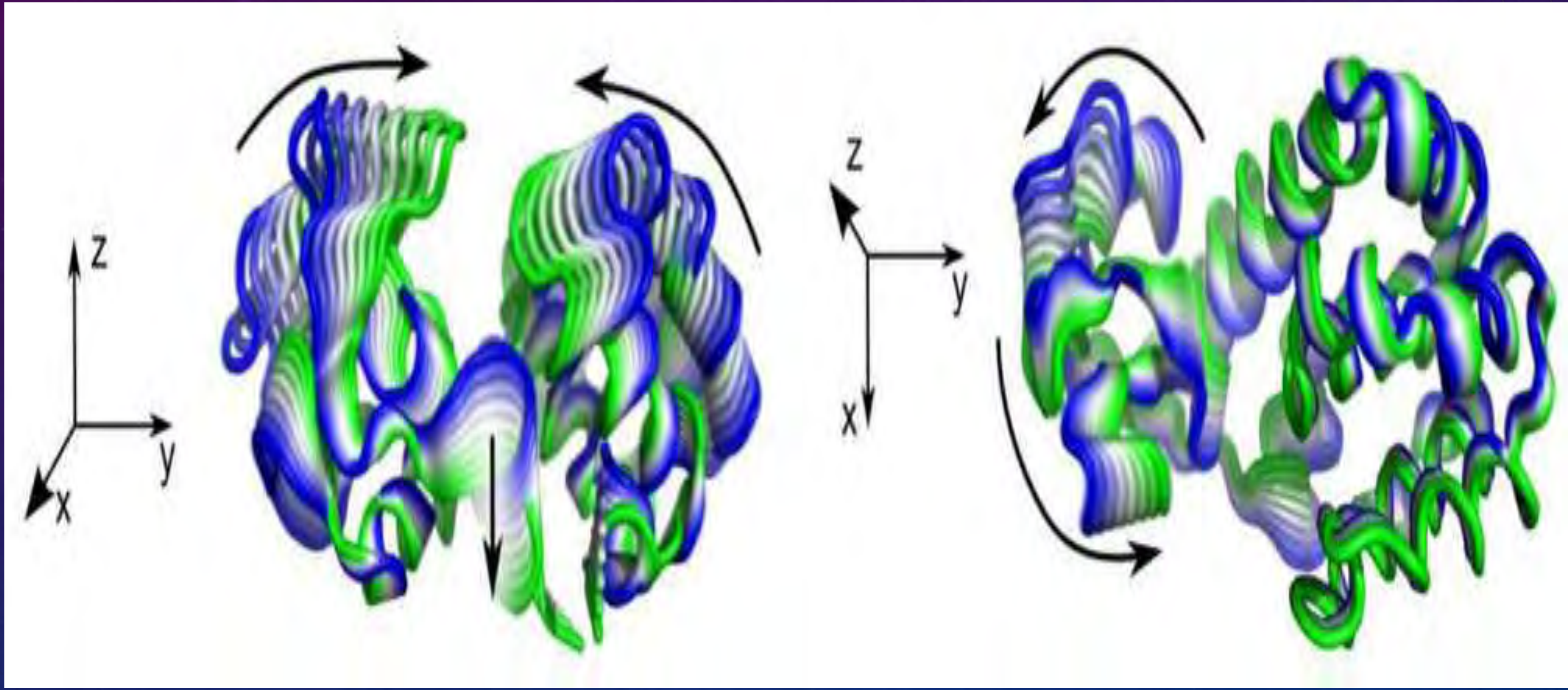
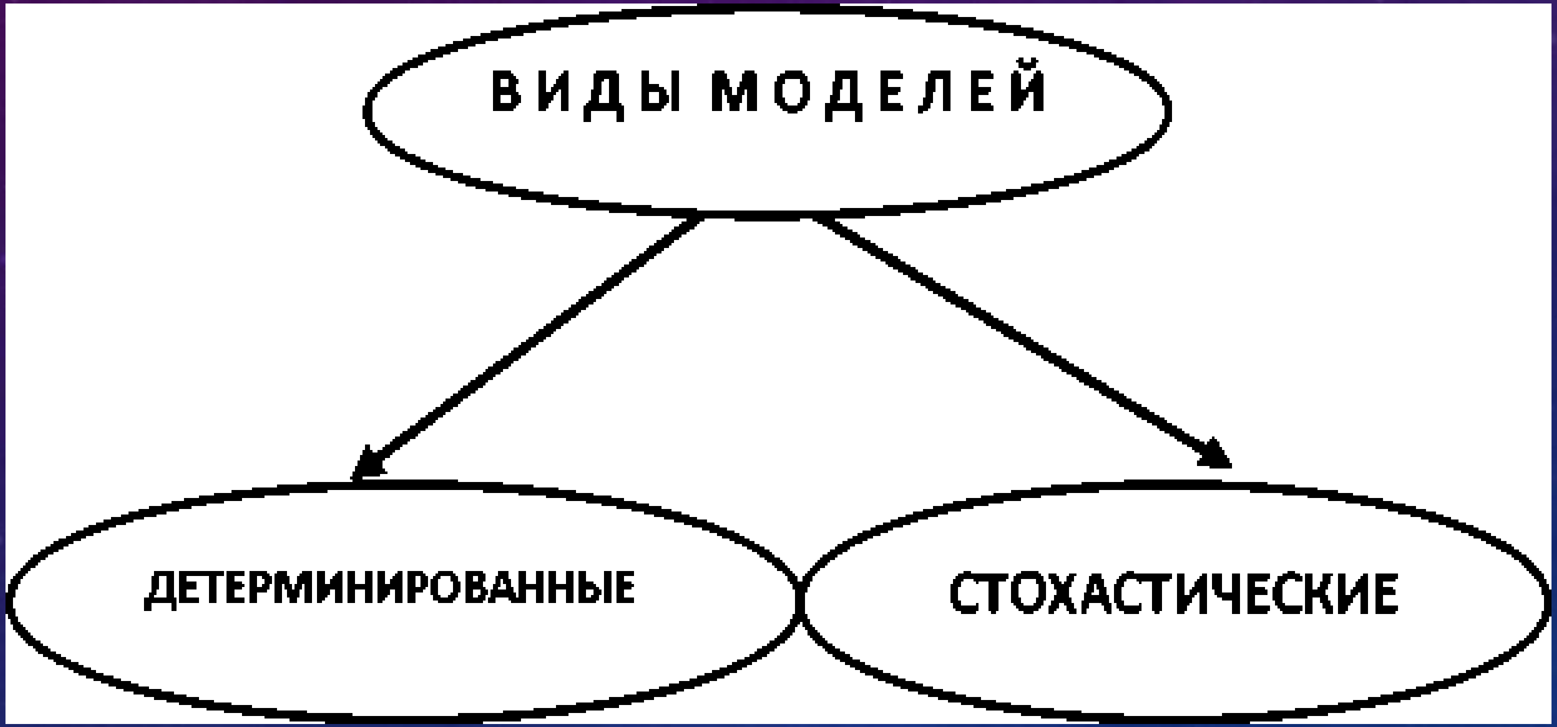
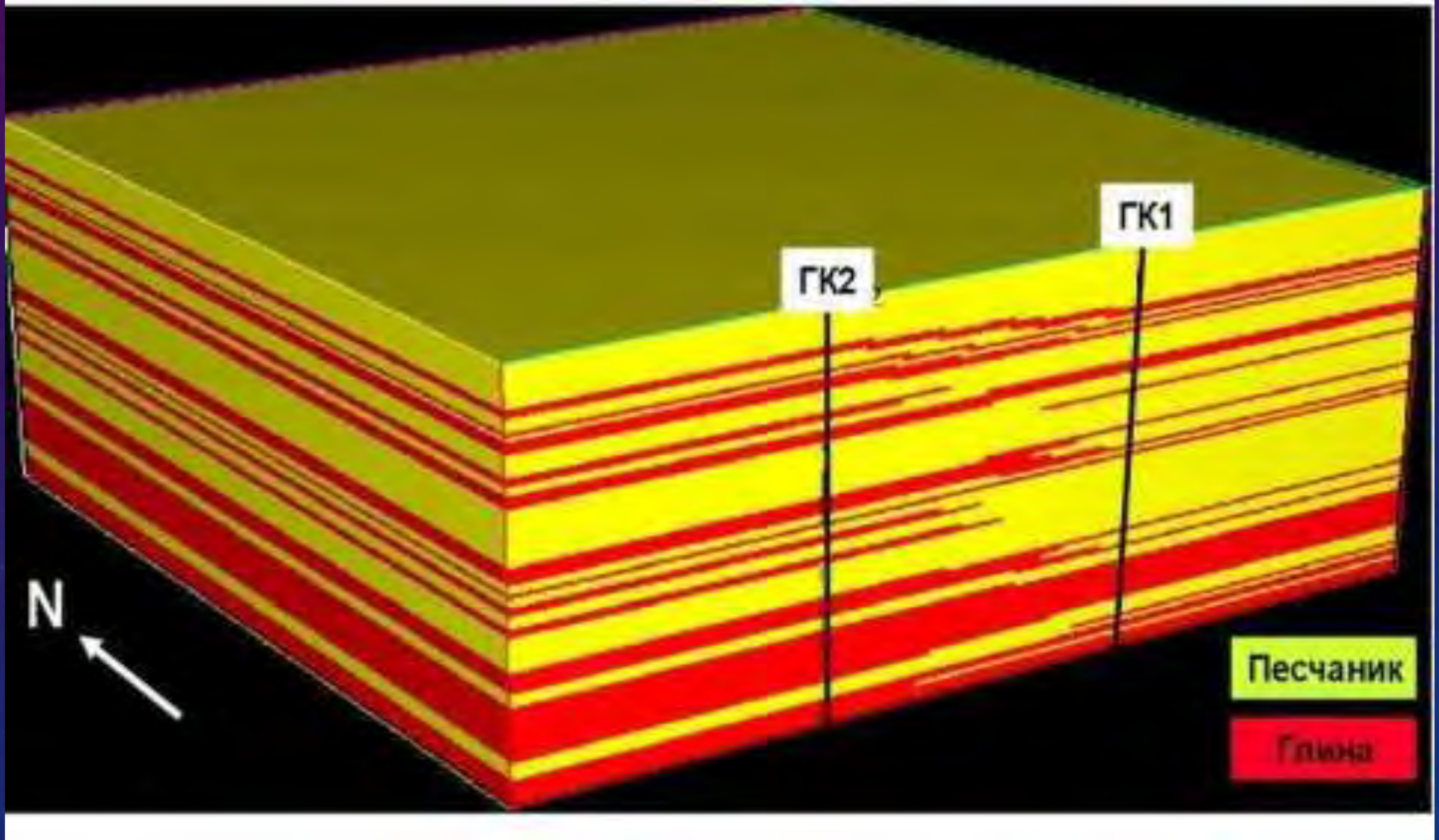


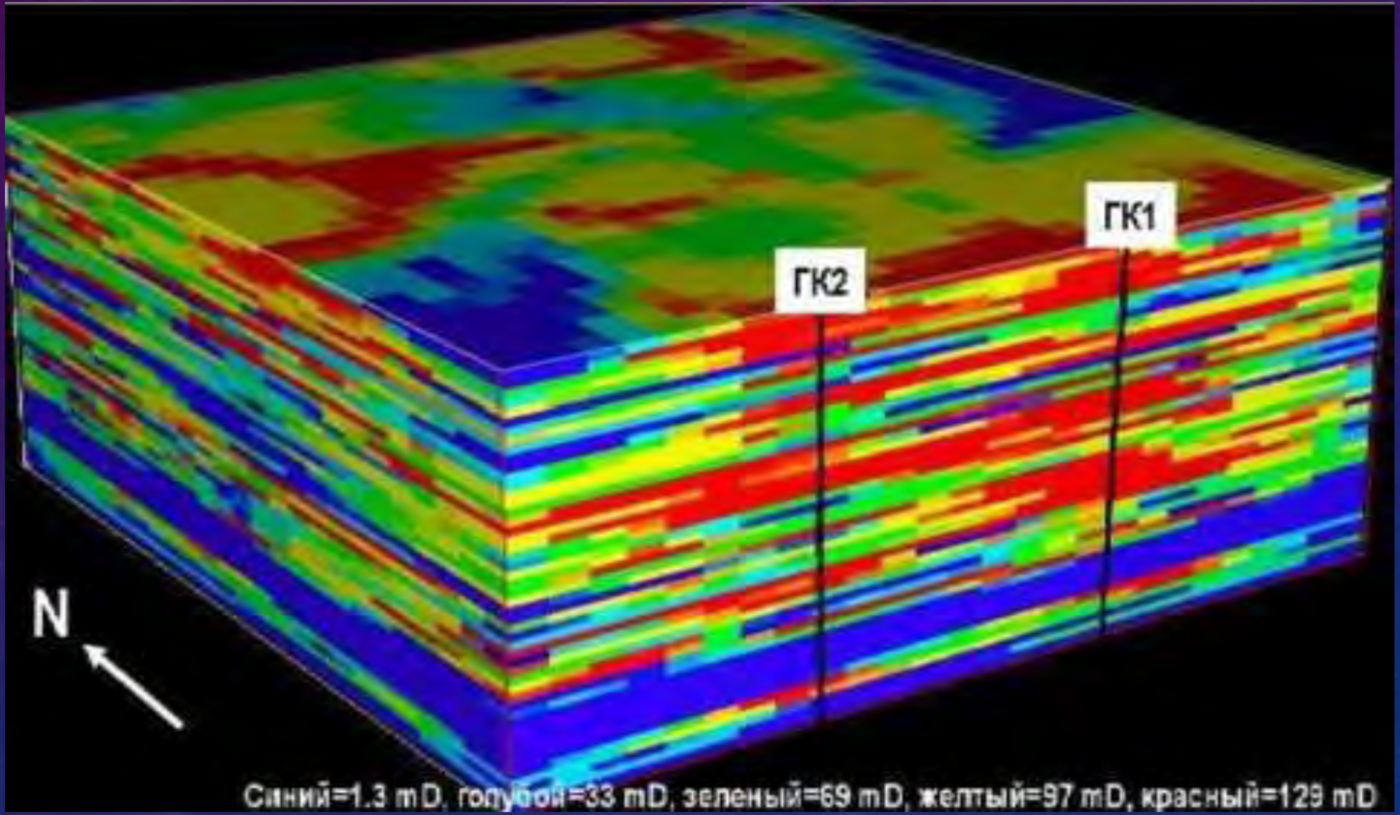
СХЕМА КЛАССИФИКАЦИИ МОДЕЛЕЙ ПО ХАРАКТЕРУ ПРОЦЕССА



ДЕТЕРМИНИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ ПРОНИЦАЕМОСТИ ПОЧВЫ



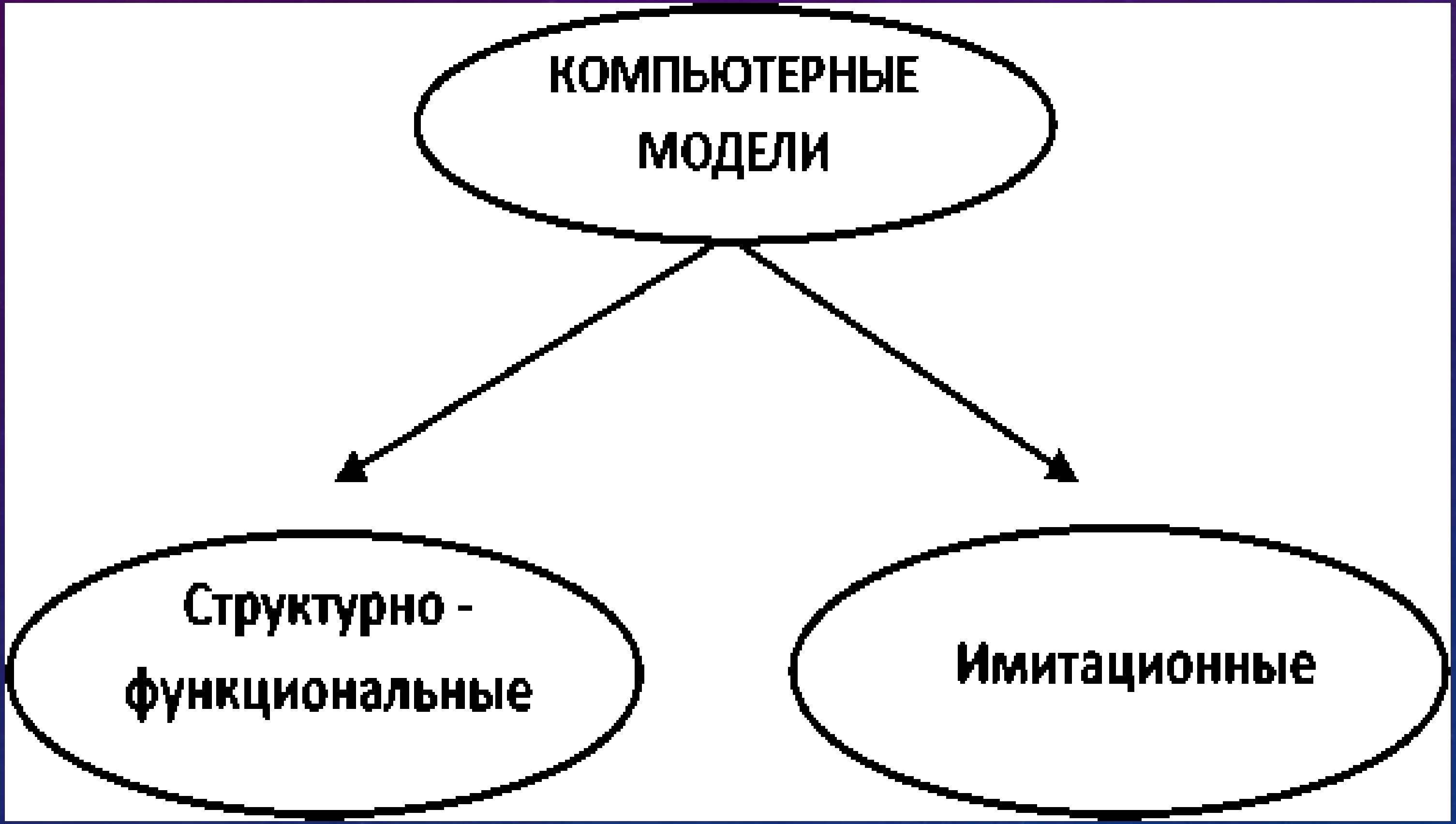
СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОНИЦАЕМОСТИ ПОЧВЫ



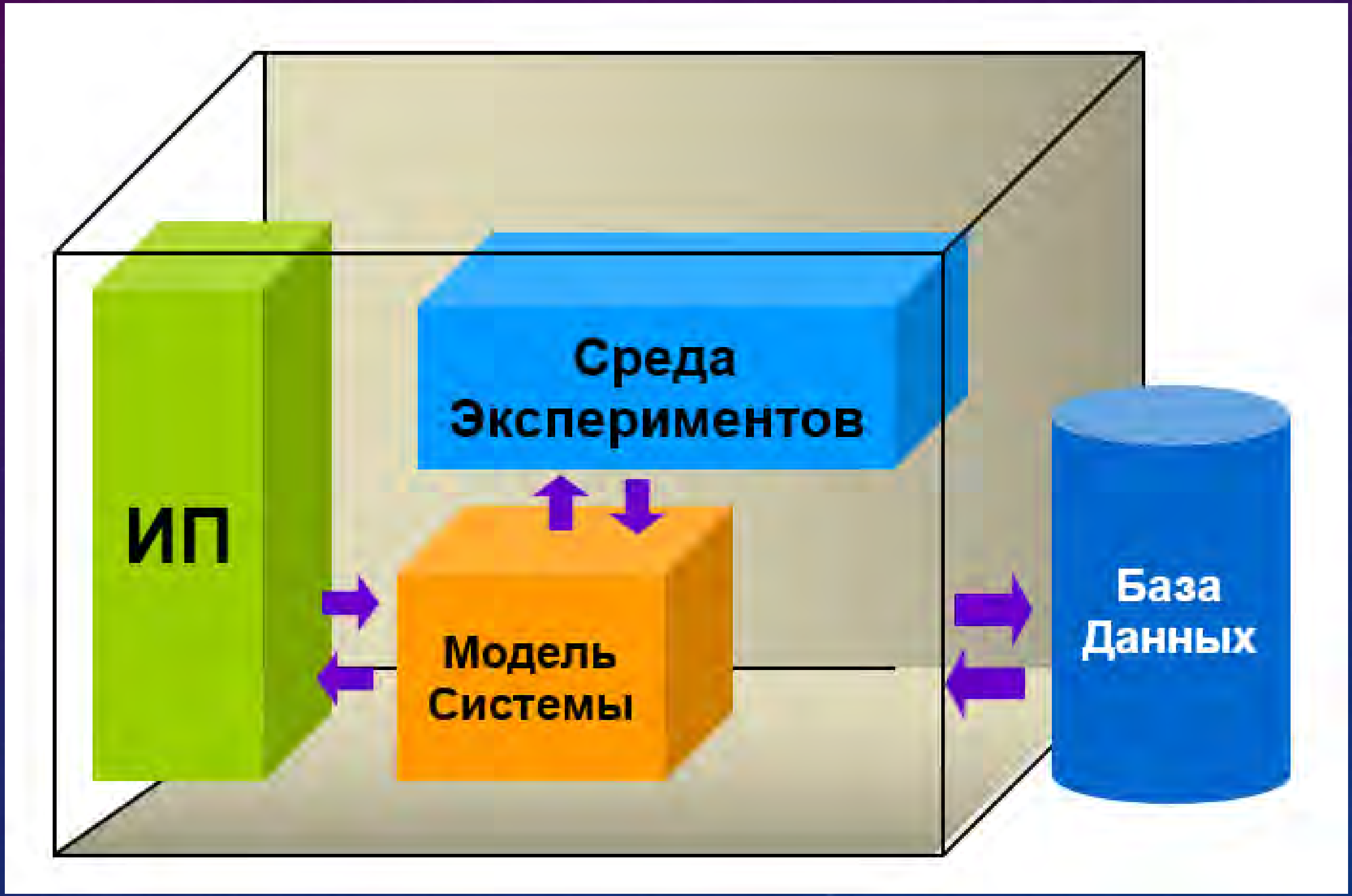
СТРУКТУРНАЯ СХЕМА ЯЗЫКА

СТРУКТУРНАЯ СХЕМА

СХЕМА КЛАССИФИКАЦИИ КОМПЬЮТЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ

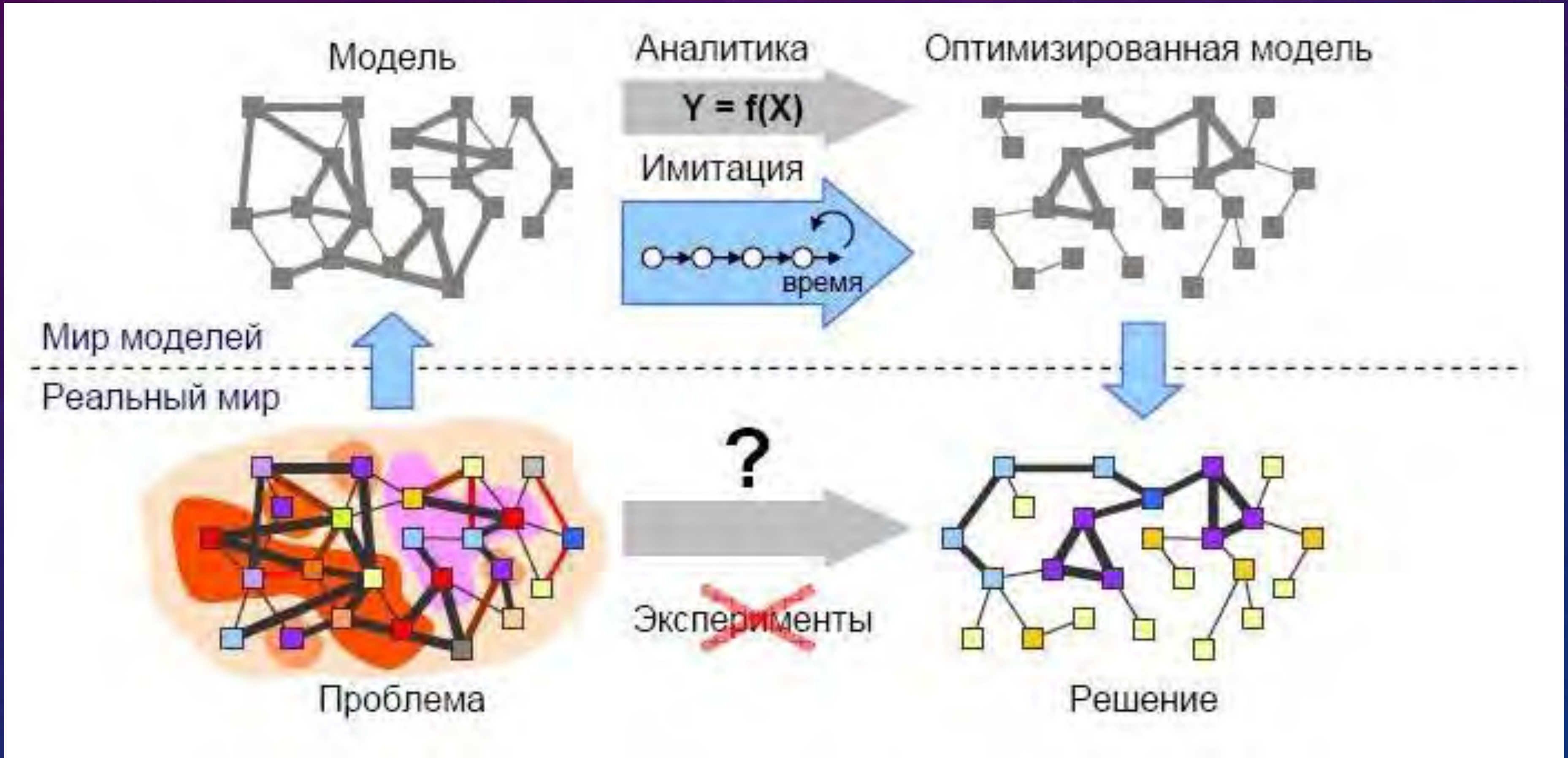


СИСТЕМА ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ



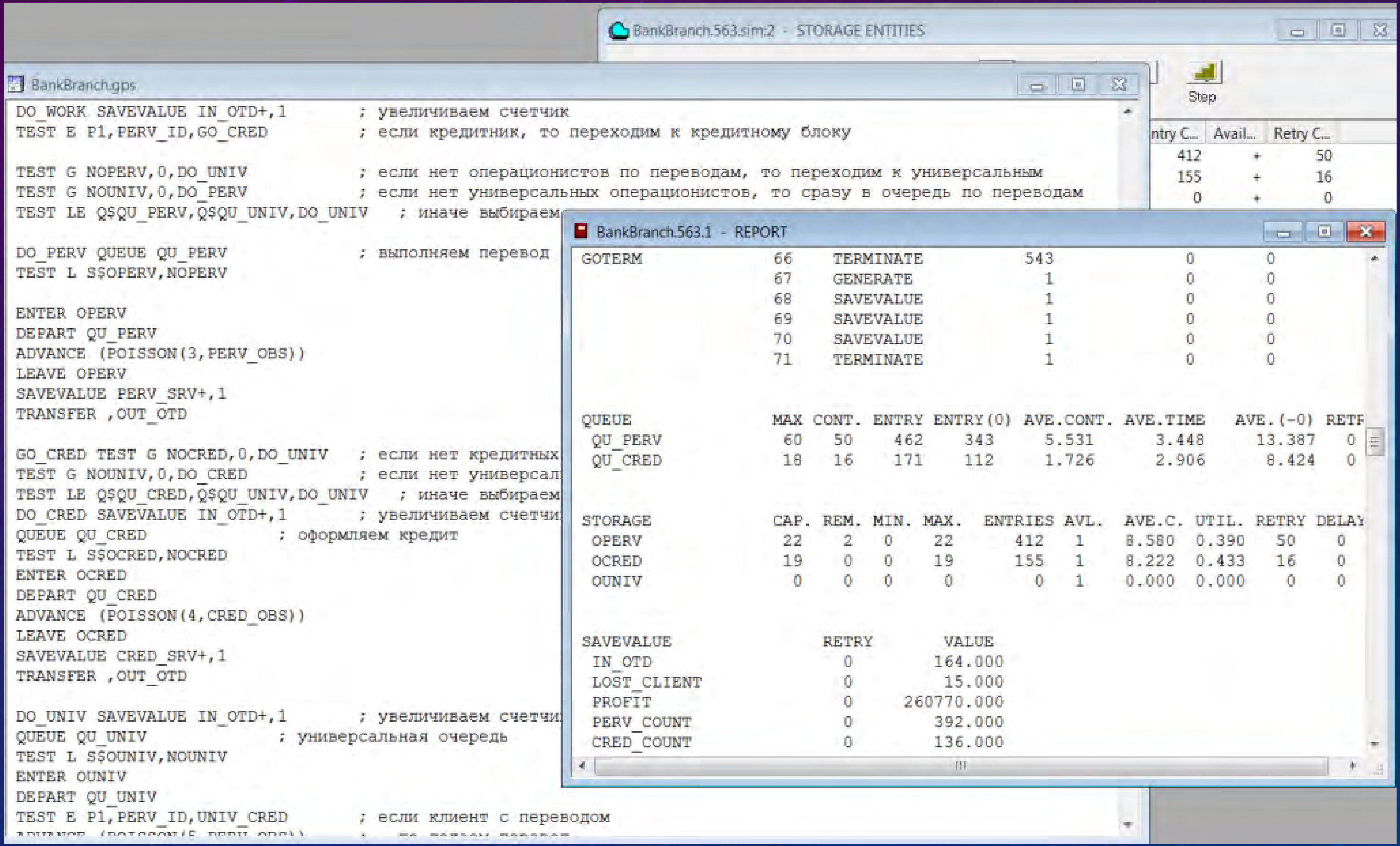
СТРУКТУРНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ КОМПЬЮТЕРНЫЕ МОДЕЛИ

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КАК ИНСТРУМЕНТ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ



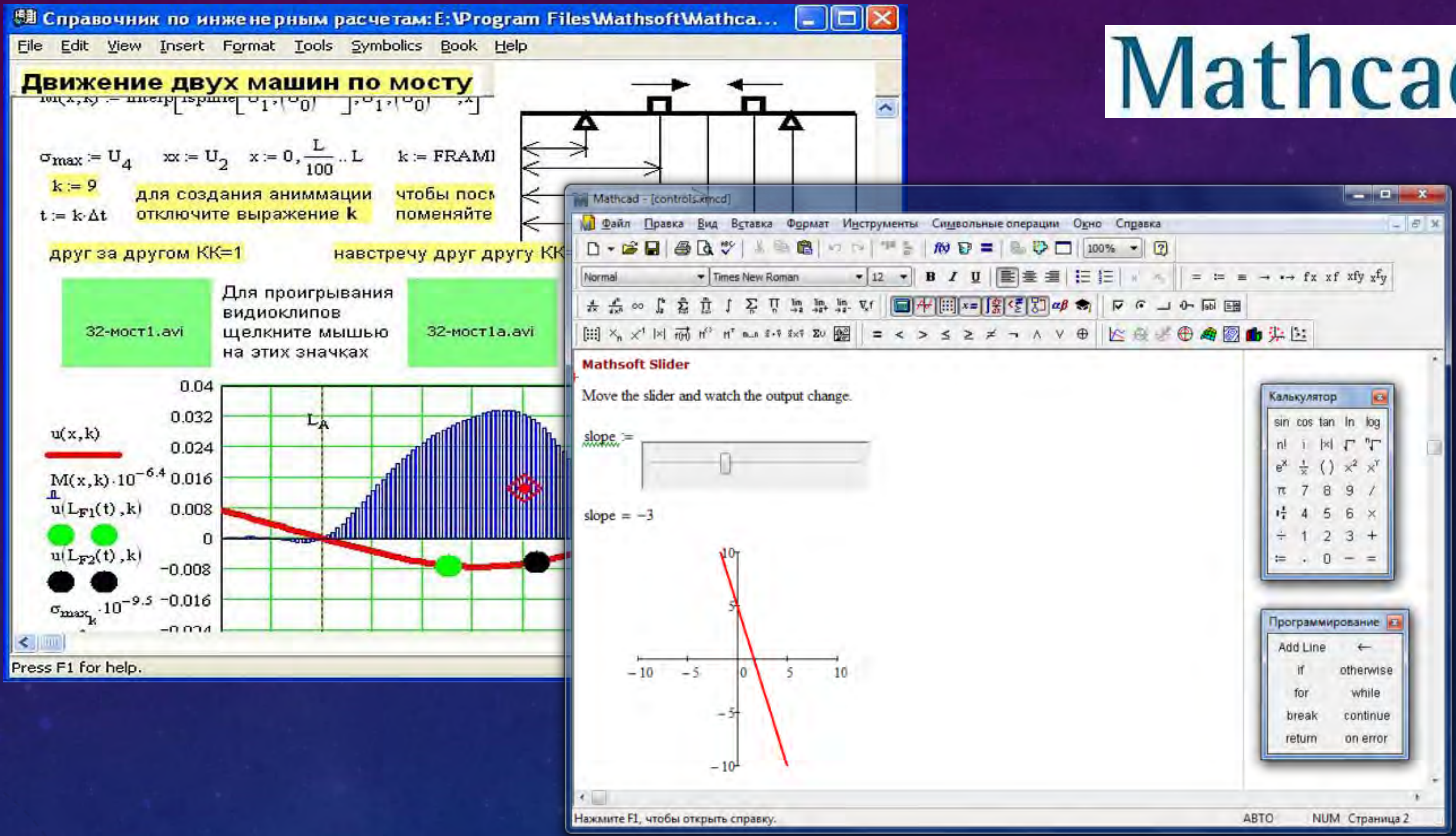
СУЩЕСТВУЮЩИЕ МЕТОДОЛОГИИ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

ЯЗЫКИ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

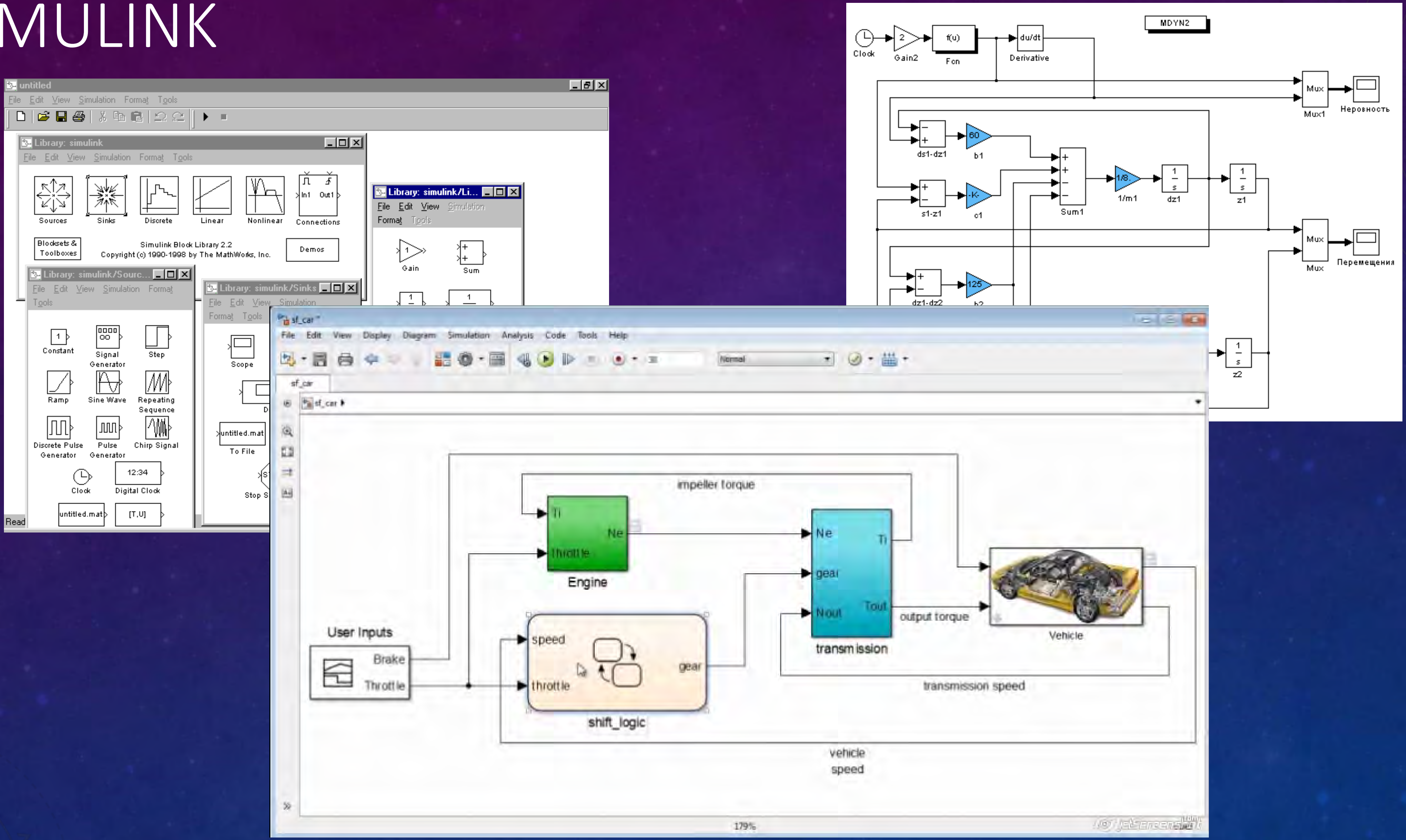


МАТЕМАТИЧЕСКИЙ РЕДАКТОР MATHCAD

Mathcad

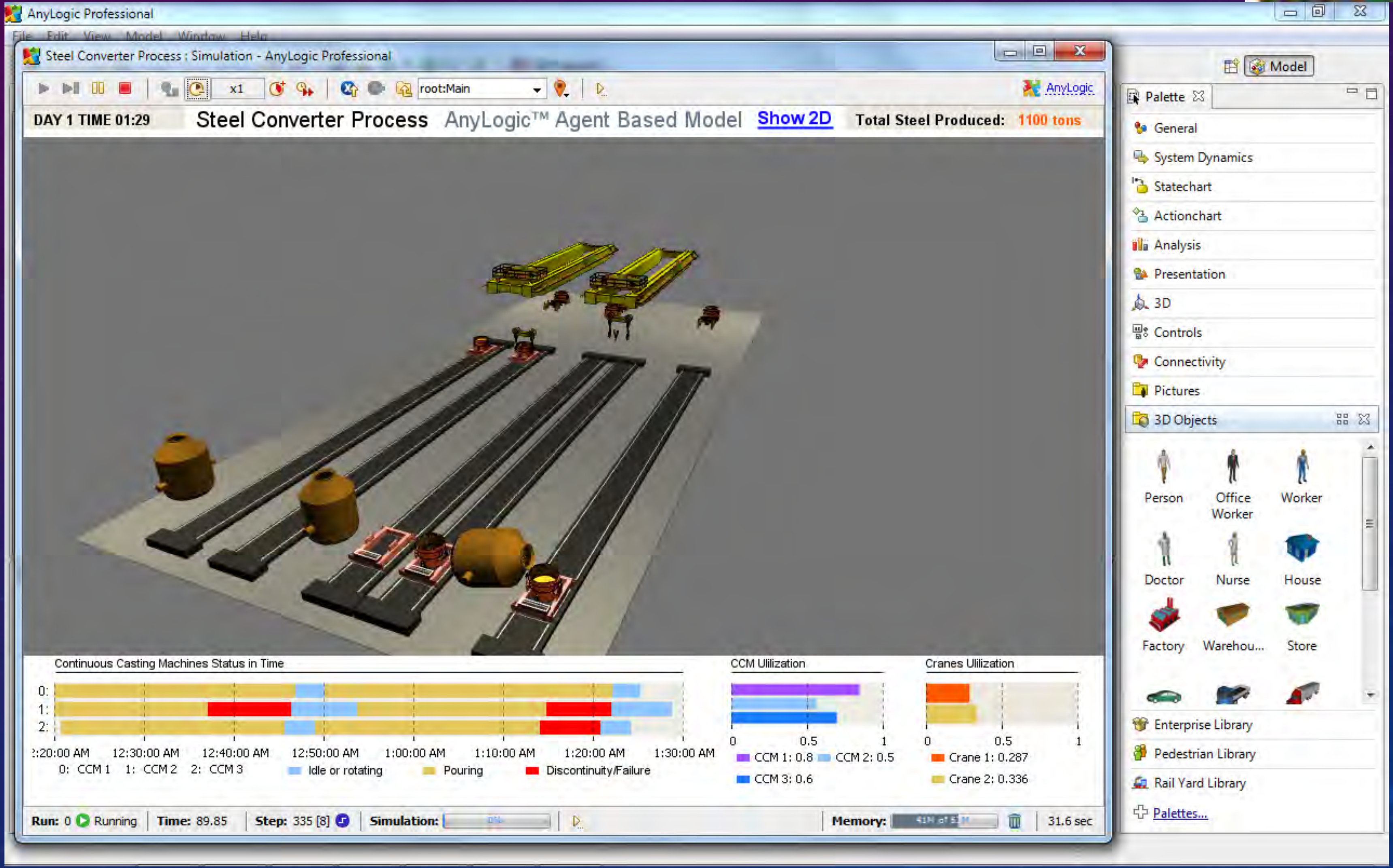


SIMULINK



untitled
File Edit View Simulation Format Tools
Library: simulink
Sources
Sinks
Discrete
Linear
Nonlinear
Connections
Blocksets & Toolboxes
Simulink Block Library 2.2
Copyright (c) 1990-1998 by The MathWorks, Inc.
Demos
Library: simulink/Sources
Constant
Signal Generator
Step
Ramp
Sine Wave
Repeating Sequence
Discrete Pulse Generator
Pulse Generator
Chirp Signal
Clock
Digital Clock
untitled.mat
[T,U]
Library: simulink/Sinks
Scope
untitled.mat
To File
Stop S
Library: simulink/Li...
Gain
Sum
Clock
Gain2
Fcn
Derivative
MDYN2
Mux
Mux1
Неровность
ds1-dz1
b1
s1-z1
c1
Sum1
1/m1
dz1
z1
Перемещения
dz1-dz2
z2
sf_car
File Edit View Display Diagram Simulation Analysis Code Tools Help
impeller torque
Ti
Ne
throttle
Engine
Ne
gear
Nout
Ti
Tout
transmission
output torque
Vehicle
User Inputs
Brake
Throttle
speed
throttle
gear
shift_logic
transmission speed
vehicle speed
179%

ANYLOGIC


AnyLogic Professional
Steel Converter Process : Simulation - AnyLogic Professional
DAY 1 TIME 01:29
Steel Converter Process
AnyLogic™ Agent Based Model
Show 2D
Total Steel Produced: 1100 tons
Palette
General
System Dynamics
Statechart
Actionchart
Analysis
Presentation
3D
Controls
Connectivity
Pictures
3D Objects
Person
Office Worker
Worker
Doctor
Nurse
House
Factory
Warehou...
Store
Enterprise Library
Pedestrian Library
Rail Yard Library
Palettes...
Continuous Casting Machines Status in Time
0: CCM 1 1: CCM 2 2: CCM 3
Idle or rotating
Pouring
Discontinuity/Failure
CCM Utilization
CCM 1: 0.8 CCM 2: 0.5
CCM 3: 0.6
Cranes Utilization
Crane 1: 0.287
Crane 2: 0.336
Run: 0 Running
Time: 89.85
Step: 335 [8]
Simulation:
Memory:
31.6 sec


Спасибо
за внимание!

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

ТЕМА 8. ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

8.1 МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО

- В настоящее время не существует единой точки зрения по вопросу о том, что понимать под имитационным моделированием. Определений термина «имитационное моделирование» к настоящему времени существует большое количество.
- *Имитационное моделирование* — метод, позволяющий строить модели, описывающие процессы так, как они проходили бы в действительности. Такую модель можно «проиграть» во времени как для одного испытания, так и заданного их множества. При этом результаты будут определяться случайным характером процессов. По этим данным можно получить достаточно устойчивую статистику.
- Другое определение: *имитационное моделирование* — это метод исследования, при котором изучаемая система заменяется моделью, с достаточной точностью, описывающей реальную систему, и с ней проводятся эксперименты с целью получения информации об этой системе.

Существует класс объектов, для которых по различным причинам не разработаны аналитические модели, либо не разработаны методы решения полученной модели. В этом случае математическая модель заменяется имитатором или имитационной моделью.

Имитационная модель — логико-математическое описание объекта, которое может быть использовано для экспериментирования на компьютере в целях проектирования, анализа и оценки функционирования объекта.

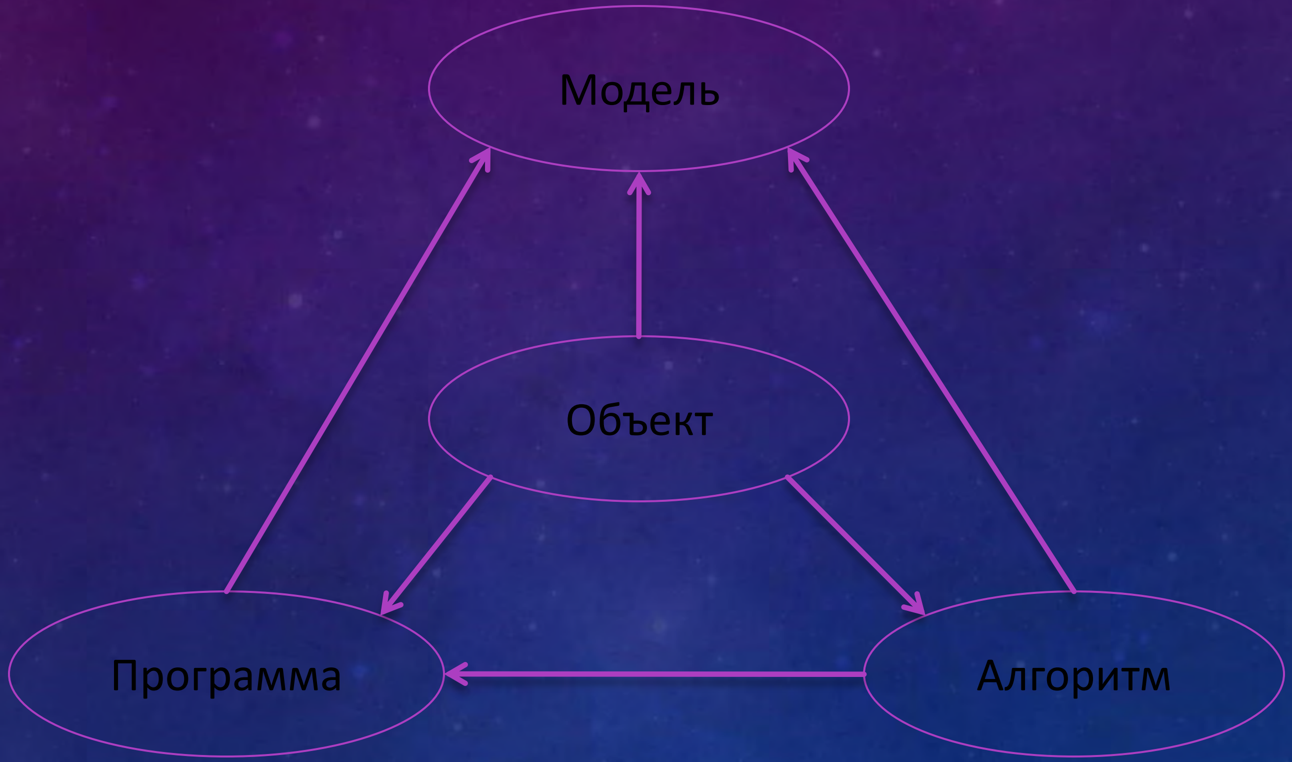
Имитационную модель можно рассматривать как множество правил (дифференциальных уравнений, карт состояний, автоматов, сетей и т. п.), которые определяют, в какое состояние система перейдет в будущем из заданного текущего состояния.

Имитация — это процесс «выполнения» модели, проводящий ее через (дискретные или непрерывные) изменения состояния во времени. Имитация, как метод решения нетривиальных задач, получила начальное развитие в связи с созданием ЭВМ в 1950-х — 1960-х годах. Цель имитационного моделирования состоит в воспроизведении поведения исследуемой системы на основе результатов анализа наиболее существенных взаимосвязей между ее элементами или, другими словами, — в разработке симулятора исследуемой предметной области для проведения различных экспериментов.

ЭТАПЫ ЭВОЛЮЦИИ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

1. 50-е годы XX века. Появление компьютерного моделирования. Использование универсальных языков программирования (ALGOL, COBOL, FORTRAN).
2. 60-е. Выделение методологии имитационного моделирования в отдельное направление. Появление первых специализированных языков имитационного моделирования (GPSS, SIMSCRIPT, SIMULA).
3. 70-е. Развитие специализированных языков и появление интерактивных средств моделирования.
4. 80-е. Появление ПК. Повышением интереса к моделированию. Публикация книг, посвященных математическому моделированию.
5. 90-е. Развитие методологии. Многочисленные публикации, монографии. Оригинальные частные методики. Совершенствование коммерческого ПО.
6. 2000-е. Становление новых методов и методик имитационного моделирования и системного анализа. Интеграция различных методов

СОСТАВЛЯЮЩИЕ ТЕОРИИ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

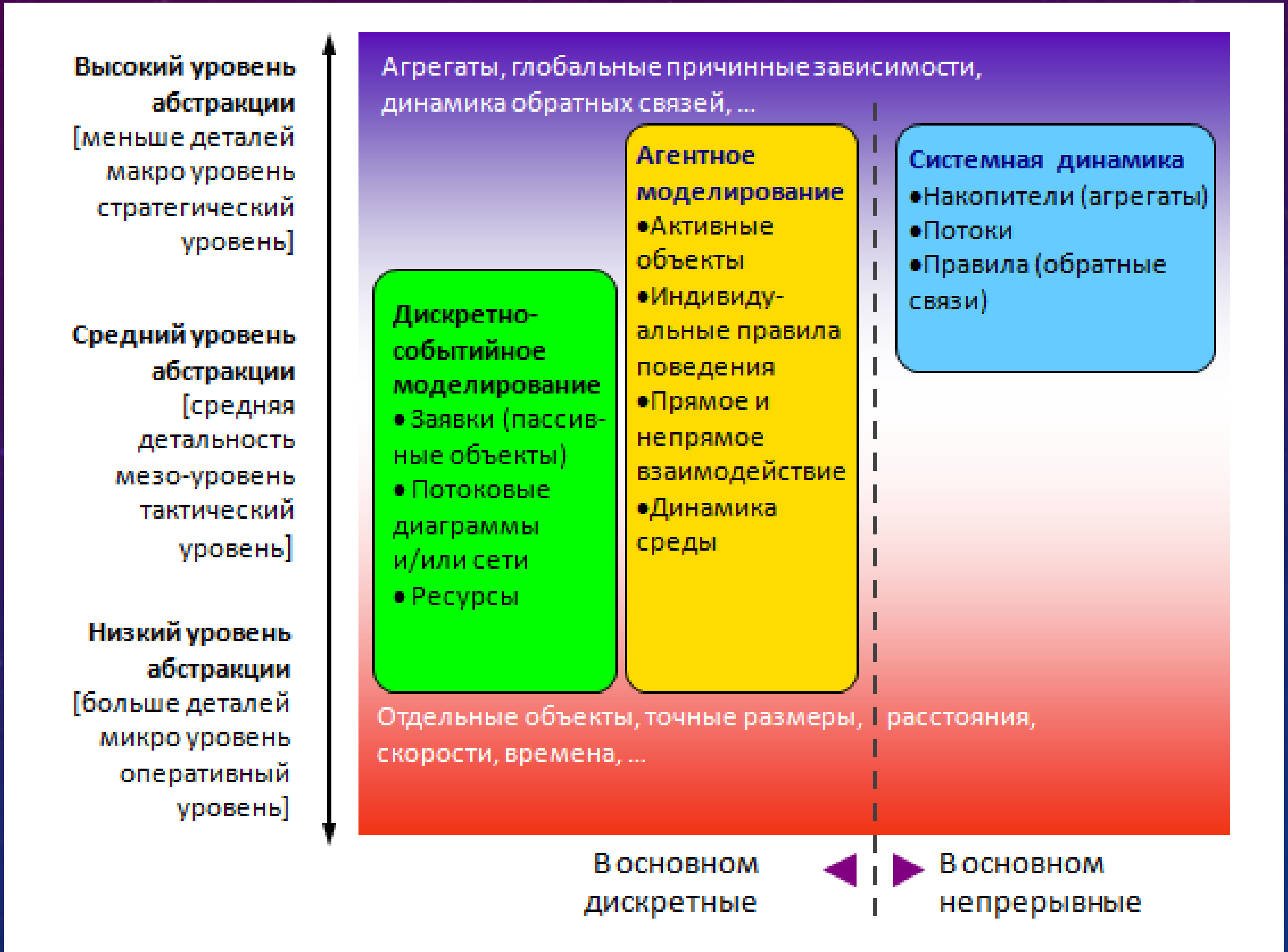


ВИДЫ МОДЕЛЕЙ

Модели

- Статические и динамические
- Аналоговые и дискретные
- Стохастические и детерминированные

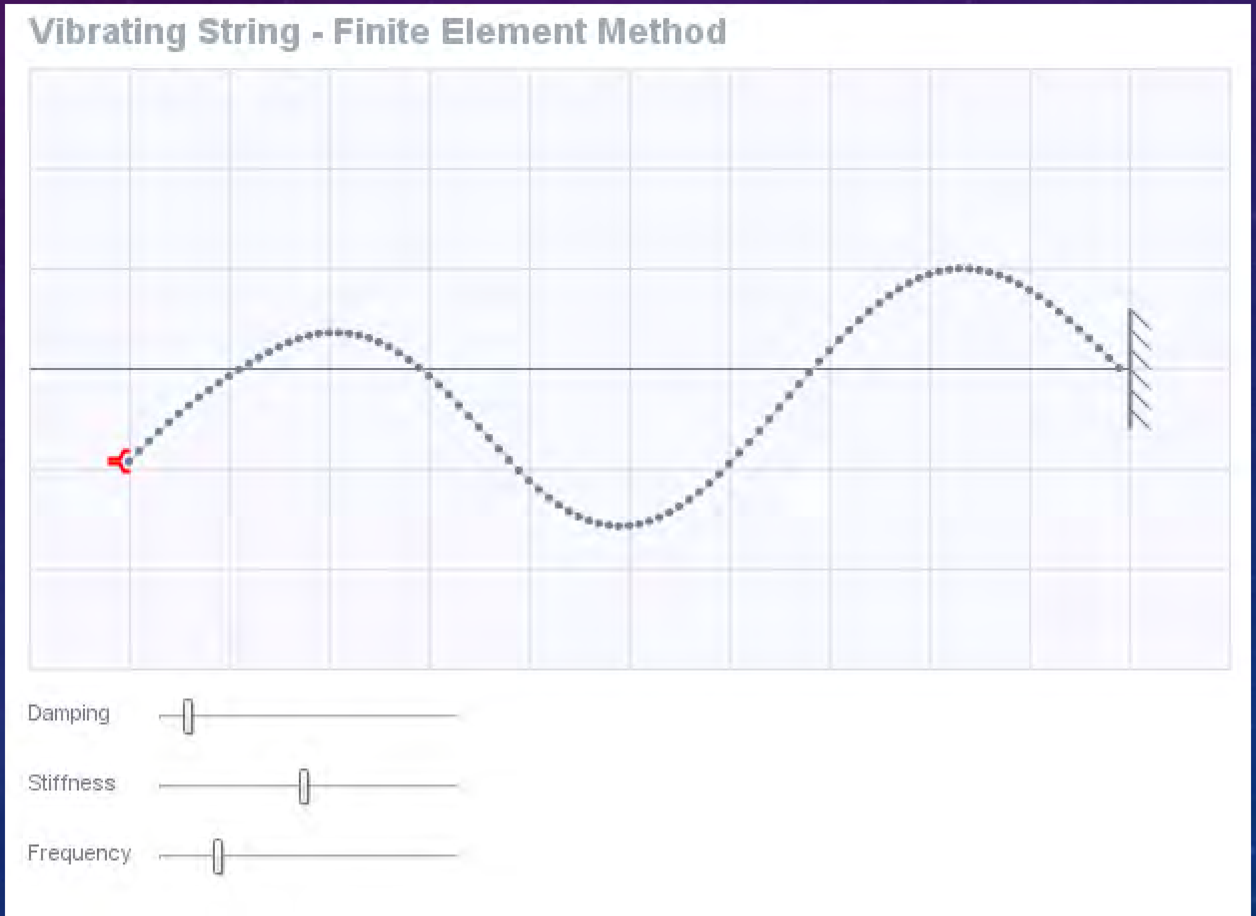
НАПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЯ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ



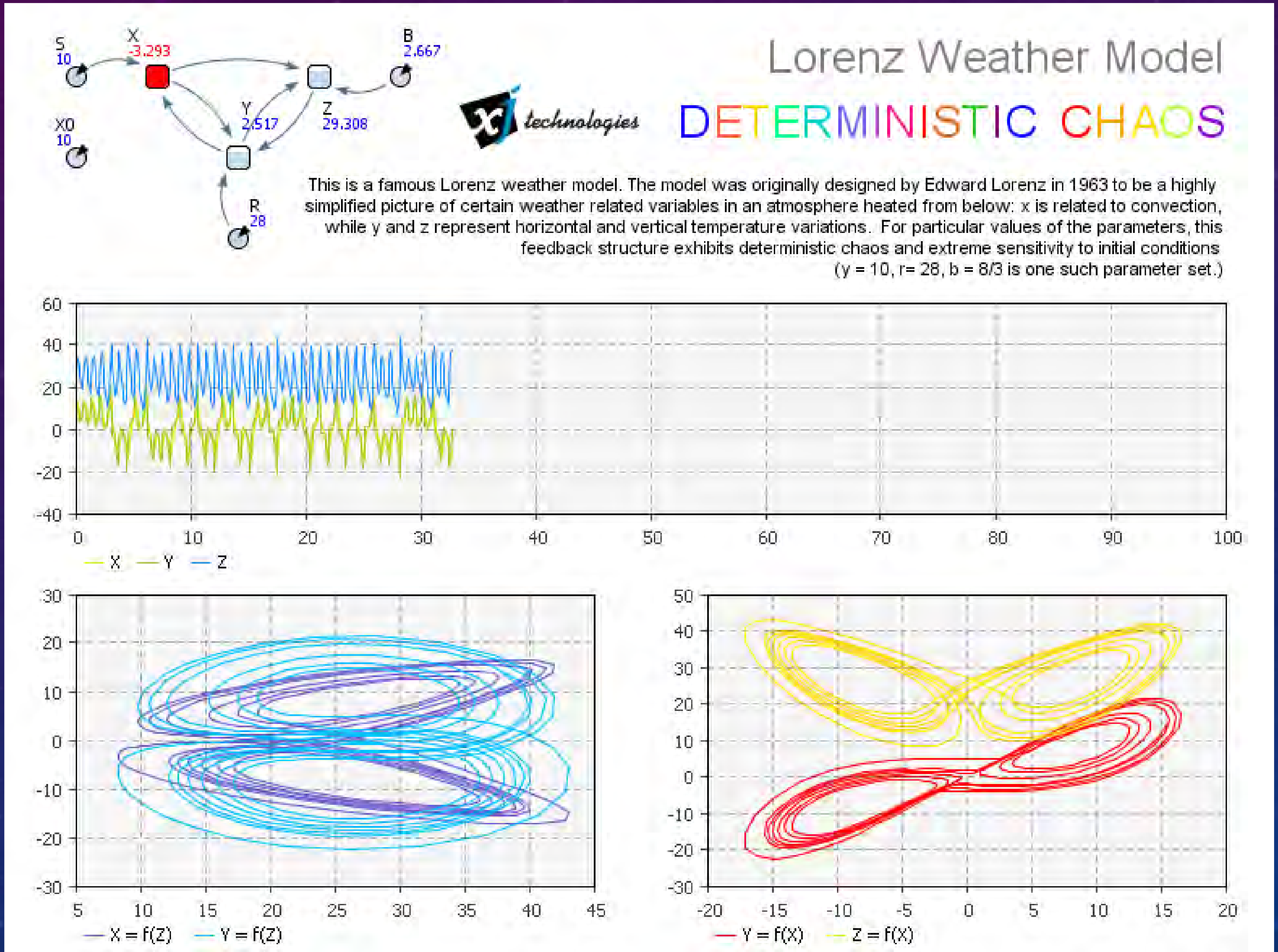
Высокий уровень абстракции
[меньше деталей
макро уровень
стратегический уровень]
Средний уровень абстракции
[средняя детальность
мезо-уровень
тактический уровень]
Низкий уровень абстракции
[больше деталей
микро уровень
оперативный уровень]
Агрегаты, глобальные причинные зависимости, динамика обратных связей, …
Агентное моделирование
•Активные объекты
•Индивидуальные правила поведения
•Прямое и непрямое взаимодействие
•Динамика среды
Системная динамика
•Накопители (агрегаты)
•Потоки
•Правила (обратные связи)
Дискретно-событийное моделирование
• Заявки (пассивные объекты)
• Потоковые диаграммы и/или сети
• Ресурсы
Отдельные объекты, точные размеры, расстояния, скорости, времена, …
В основном дискретные
В основном непрерывные

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

- Под “динамической системой в широком смысле” понимается объект, функционирующий в непрерывном времени, непрерывно наблюдаемый и изменяющий свое состояние под воздействием внешних и внутренних причин.
- Описываются алгебраическими или дифференциальными уравнениями



МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ



ДИСКРЕТНО-СОБЫТИЙНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

предлагает абстрагирование от непрерывной природы событий и рассматривает только основные события моделируемой системы («ожидание», «обработка заказа», «движение с грузом», «разгрузка» и др.) Дискретно-событийное моделирование наиболее развито и имеет огромную сферу приложений — от логистики и систем массового обслуживания до транспортных и производственных систем. Наиболее подходит для моделирования производственных процессов. Основан Джеффри Гордоном в 1960-х годах.

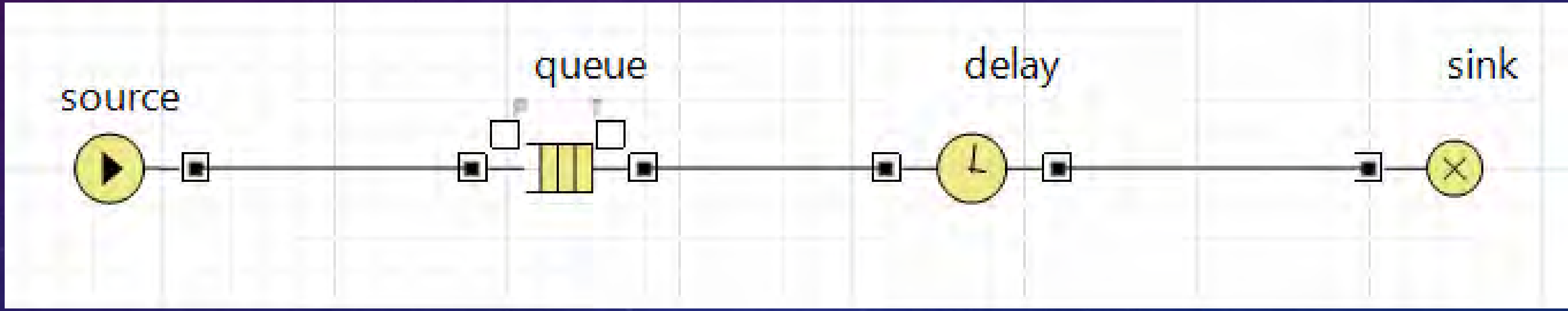
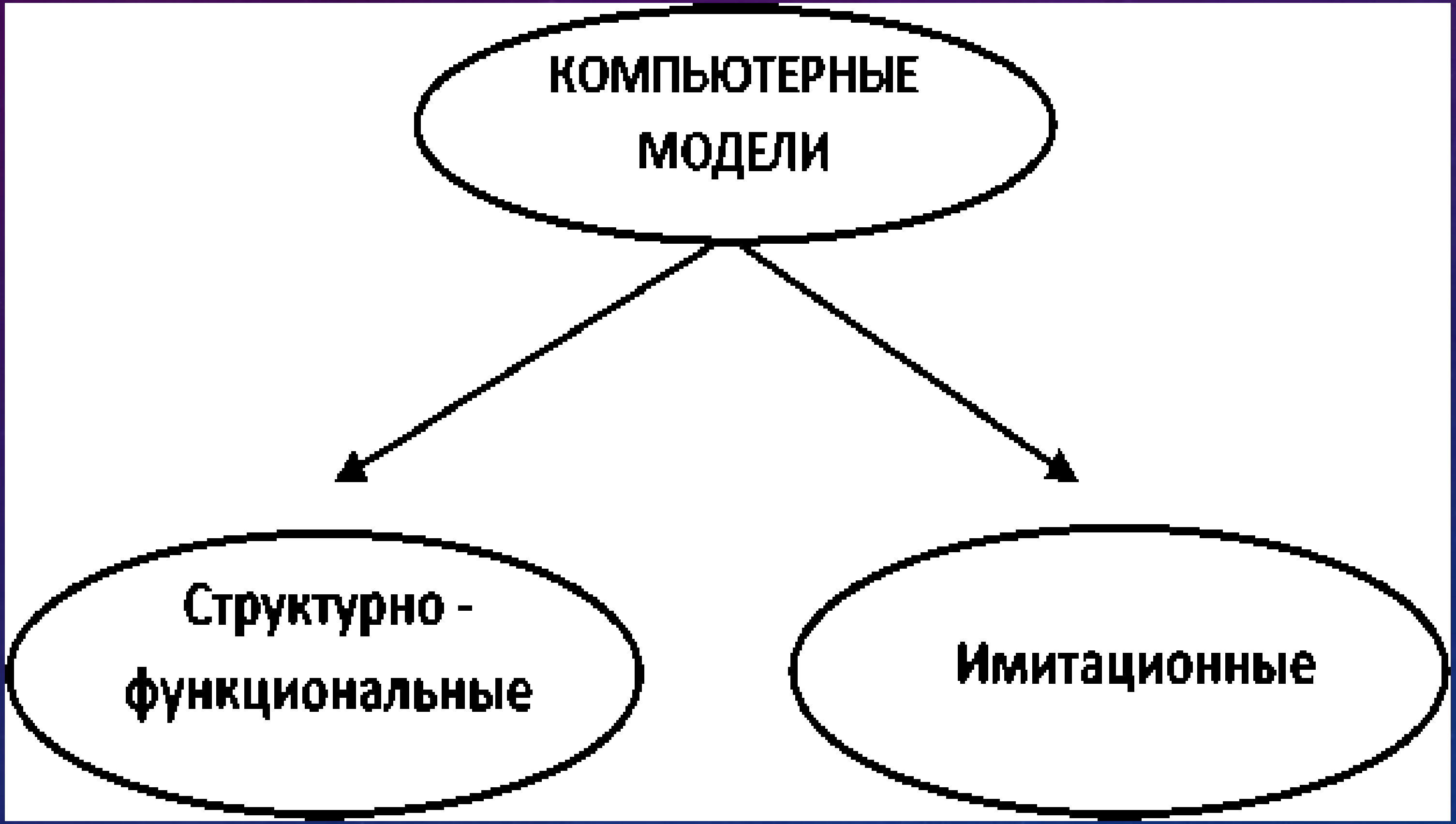
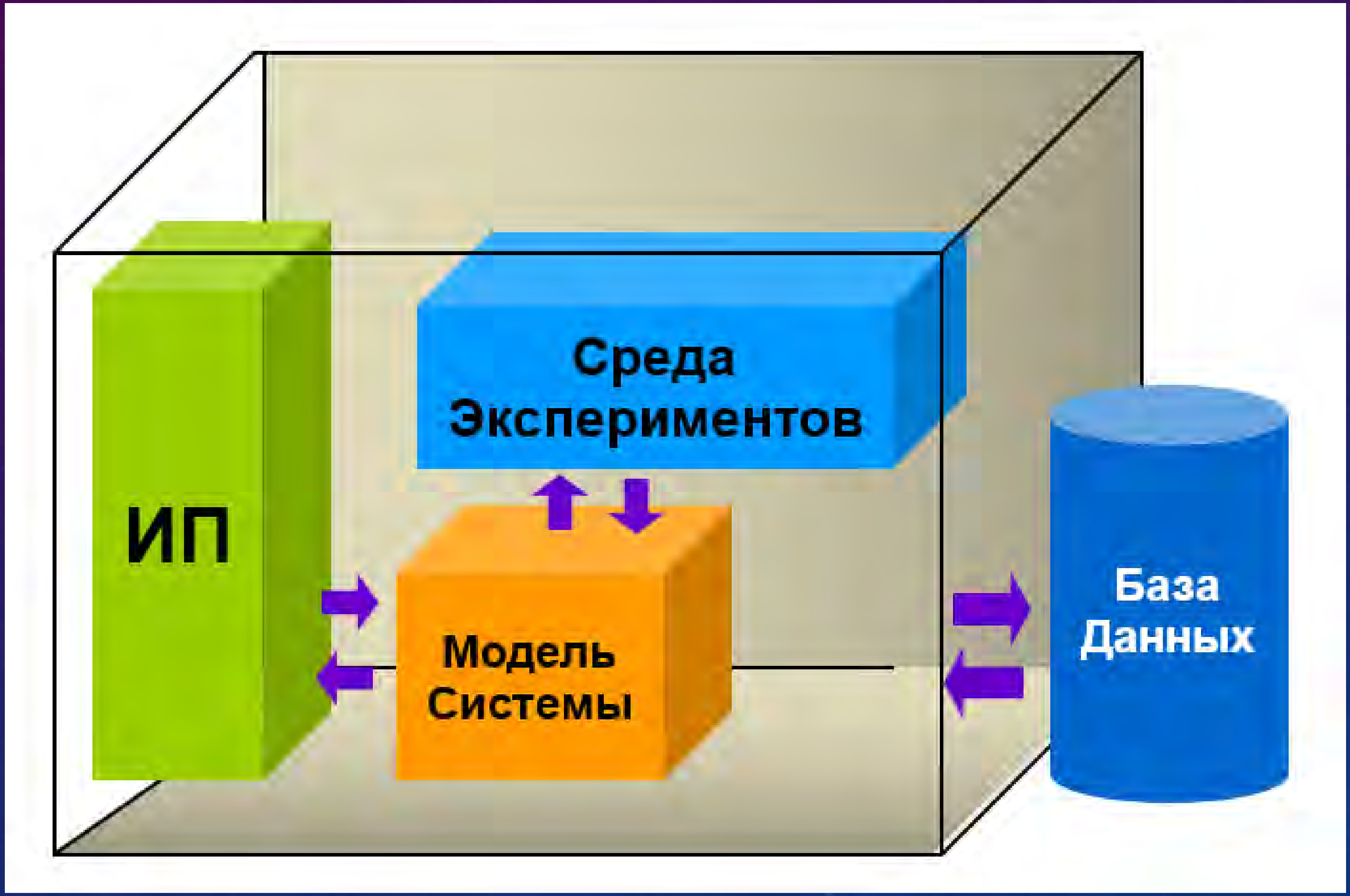


СХЕМА КЛАССИФИКАЦИИ КОМПЬЮТЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ

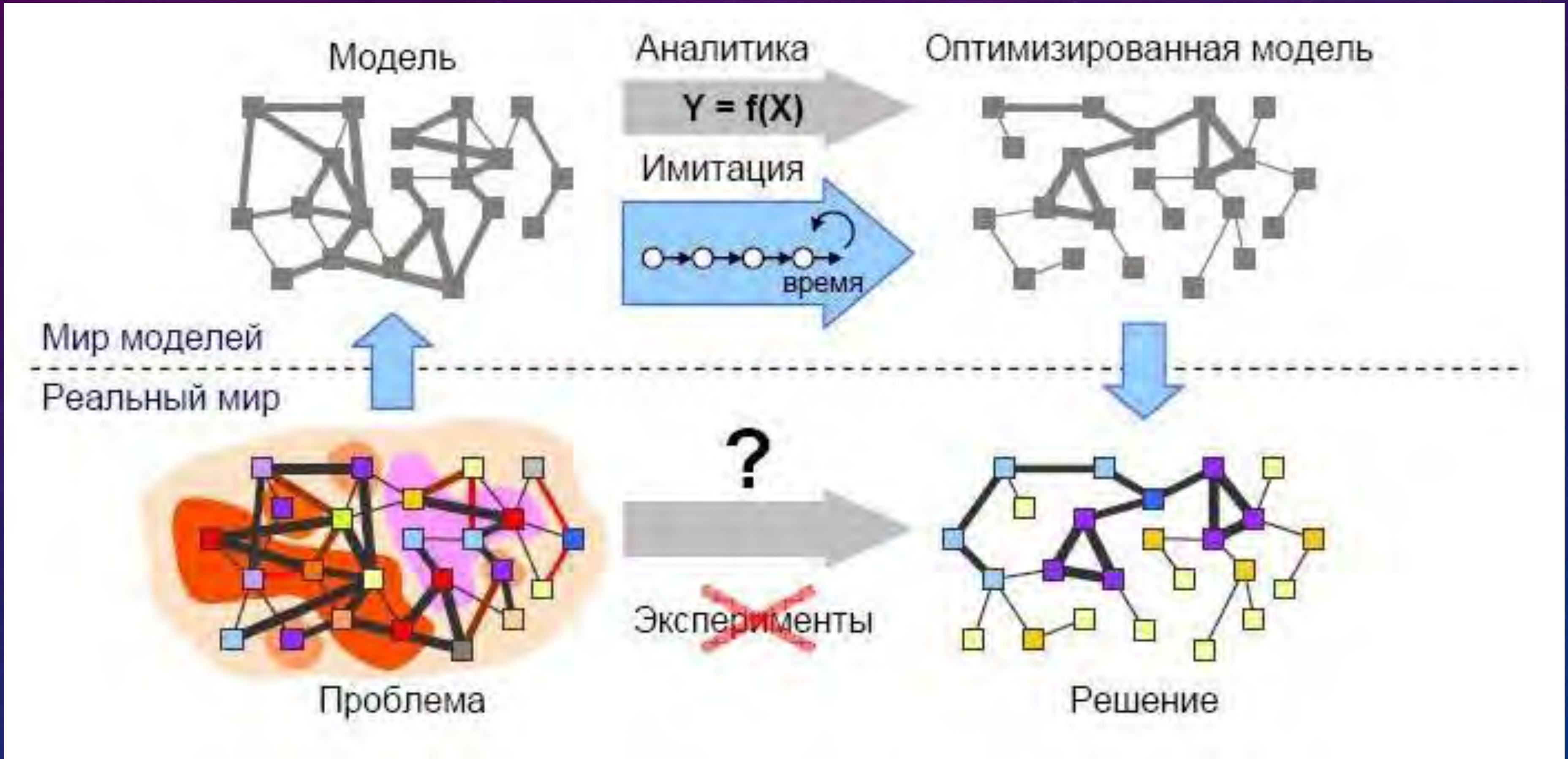


СИСТЕМА ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ



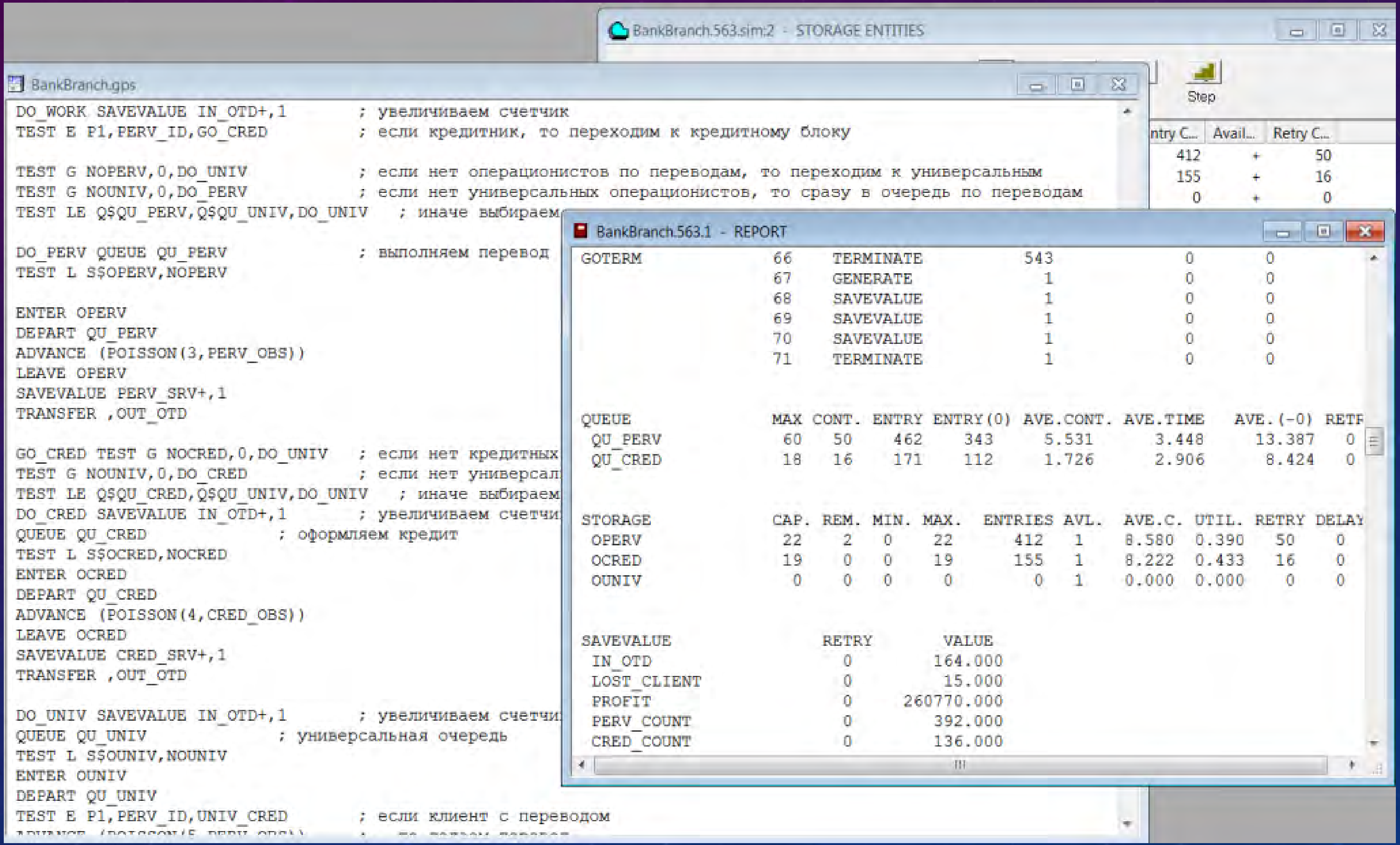
СТРУКТУРНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ КОМПЬЮТЕРНЫЕ МОДЕЛИ

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КАК ИНСТРУМЕНТ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ



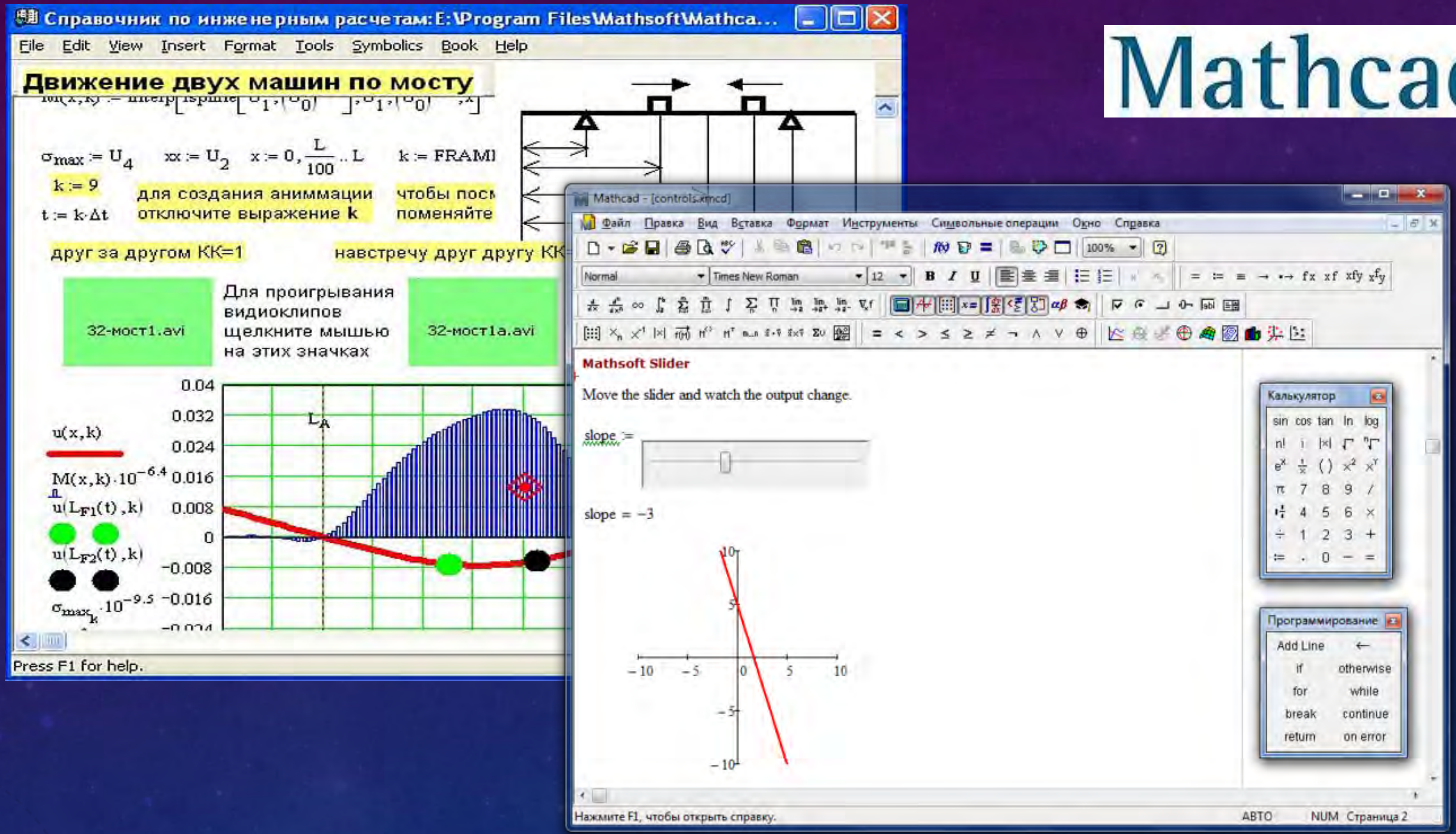
СУЩЕСТВУЮЩИЕ МЕТОДОЛОГИИ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

ЯЗЫКИ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

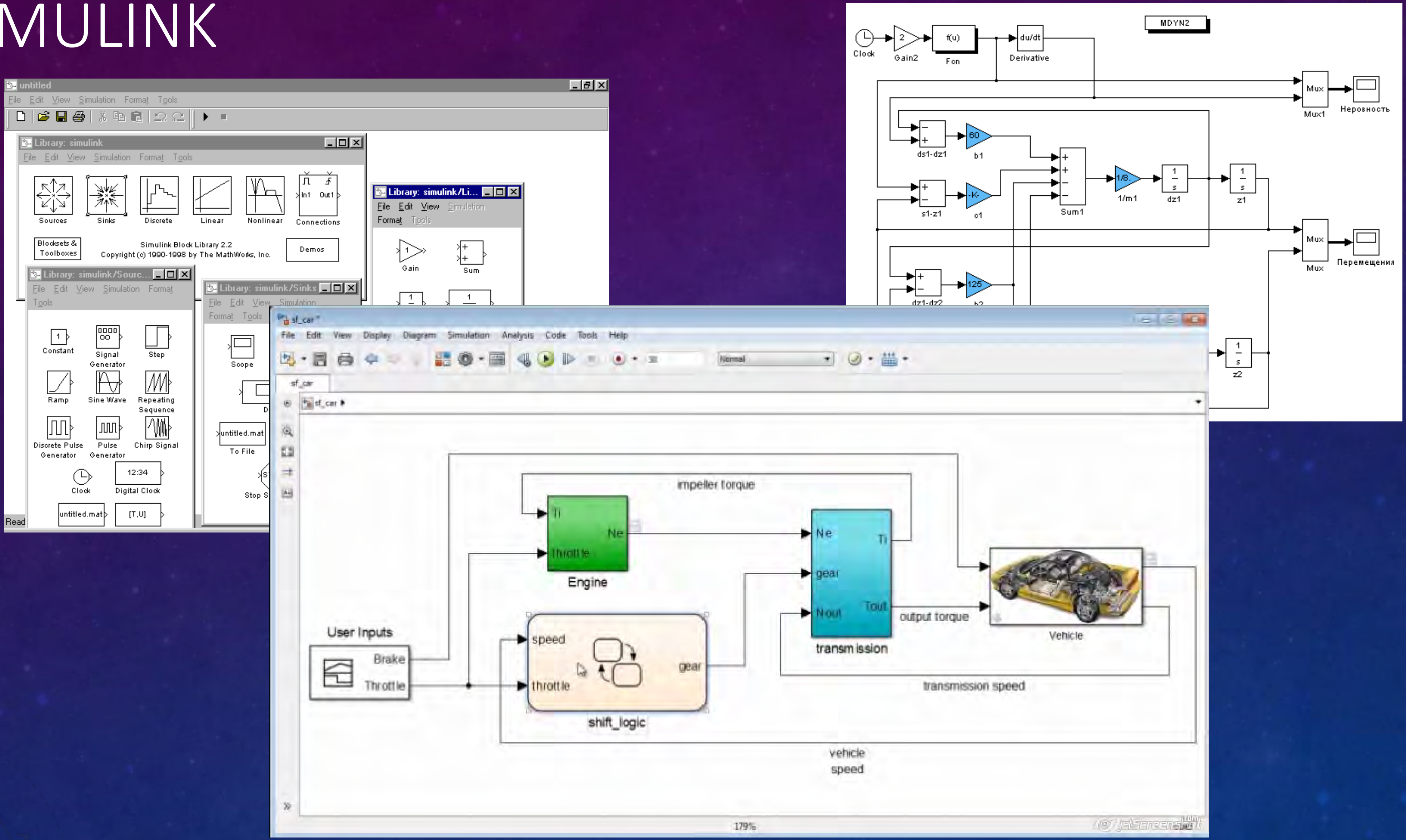


МАТЕМАТИЧЕСКИЙ РЕДАКТОР MATHCAD

Mathcad

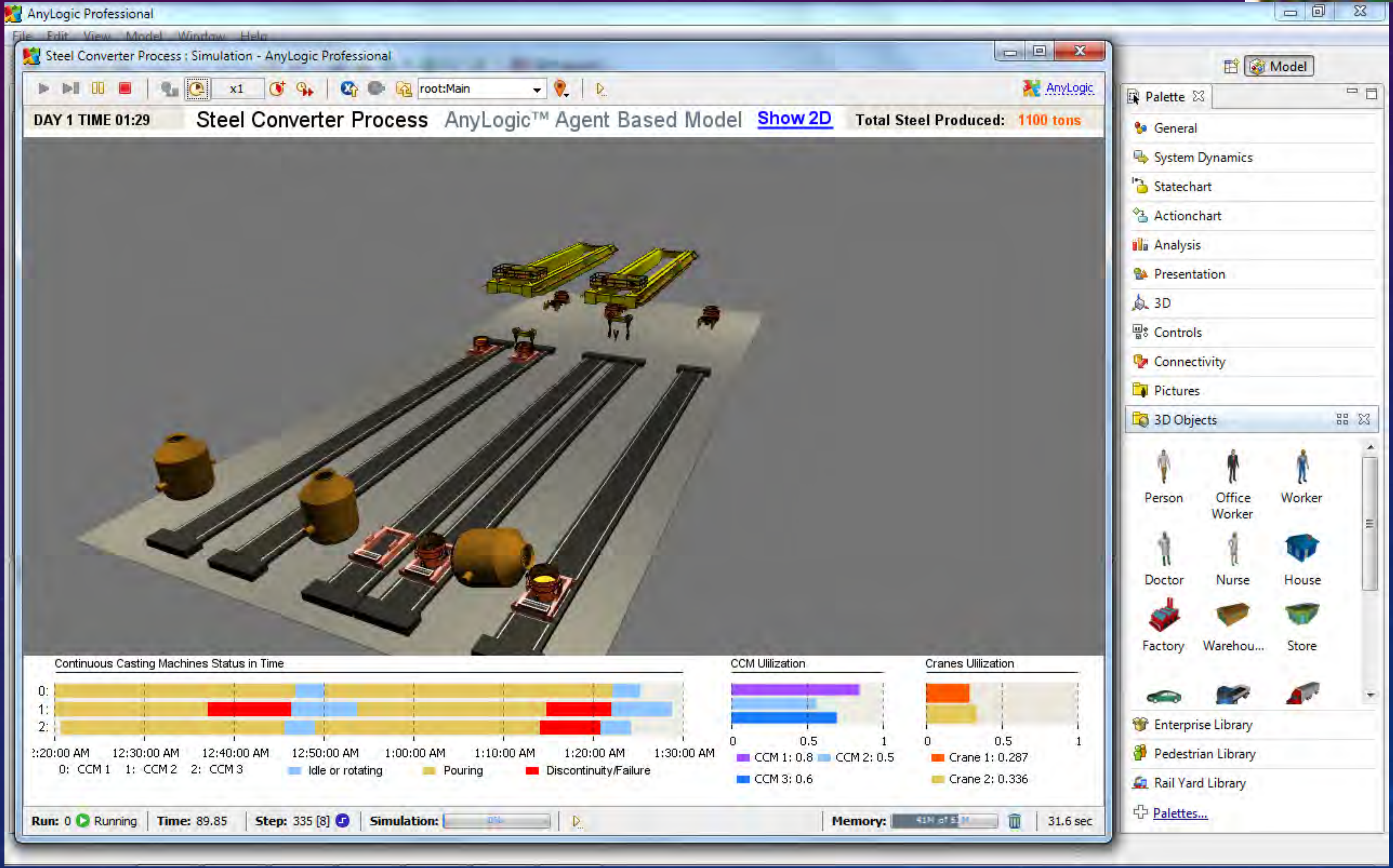


SIMULINK

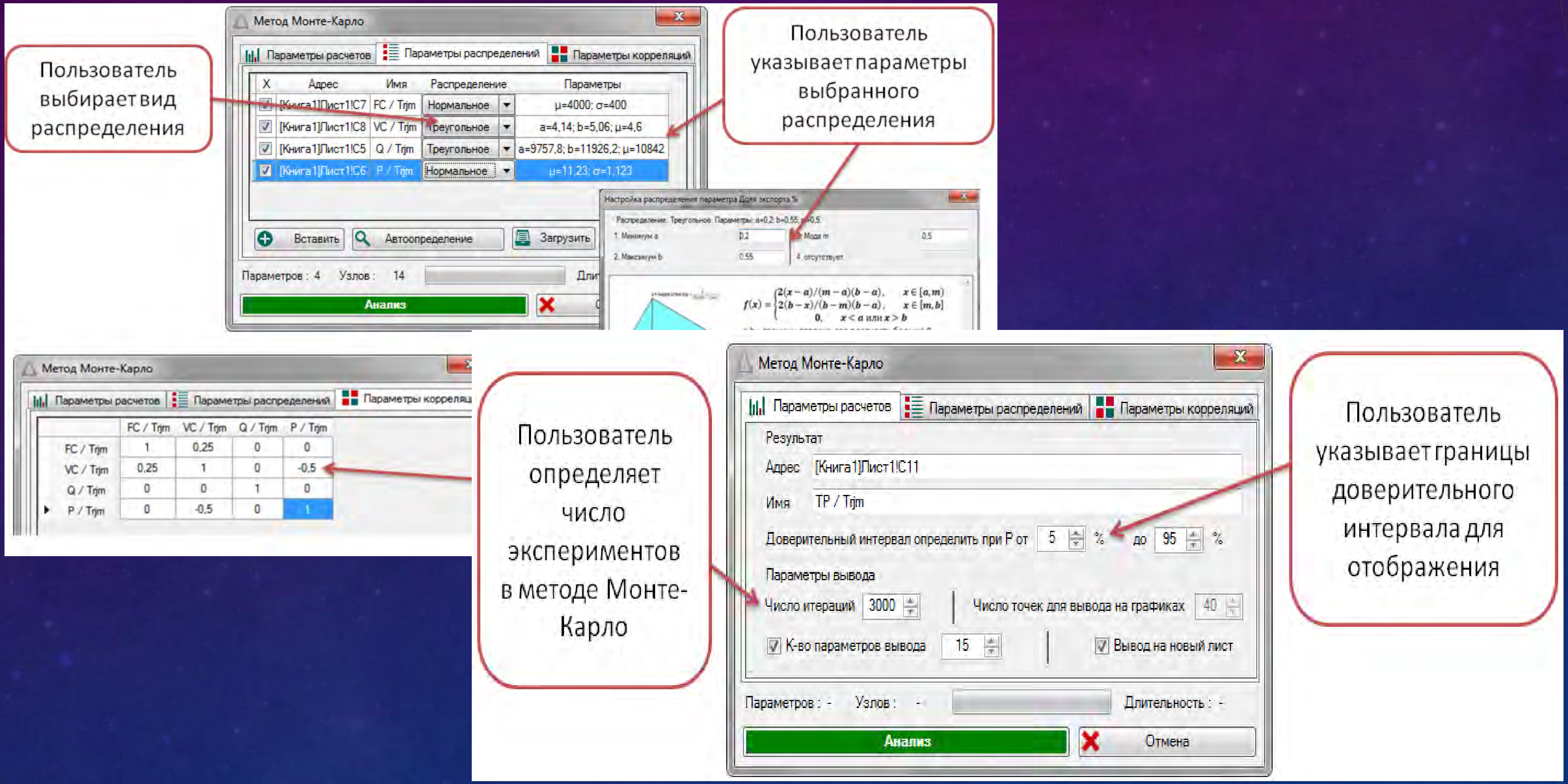


untitled
File Edit View Simulation Format Tools
Library: simulink
Sources
Sinks
Discrete
Linear
Nonlinear
Connections
Blocksets & Toolboxes
Simulink Block Library 2.2
Copyright (c) 1990-1998 by The MathWorks, Inc.
Demos
Library: simulink/Li...
Gain
Sum
Library: simulink/Sourc...
Constant
Signal Generator
Step
Ramp
Sine Wave
Repeating Sequence
Discrete Pulse Generator
Pulse Generator
Chirp Signal
Clock
Digital Clock
12:34
untitled.mat
[T,U]
Library: simulink/Sinks
Scope
untitled.mat
To File
Stop S
MDYN2
Clock
Gain2
Fcn
Derivative
du/dt
f(u)
Mux
Mux1
Неровность
ds1-dz1
b1
60
s1-z1
c1
Sum1
1/m1
1/8
dz1
z1
Перемещения
dz1-dz2
125
z2
sf_car
File Edit View Display Diagram Simulation Analysis Code Tools Help
Normal
impeller torque
Ti
Ne
throttle
Engine
Ne
Ti
gear
Nout
Tout
transmission
output torque
Vehicle
User Inputs
Brake
Throttle
speed
throttle
gear
shift_logic
transmission speed
vehicle
speed
179%

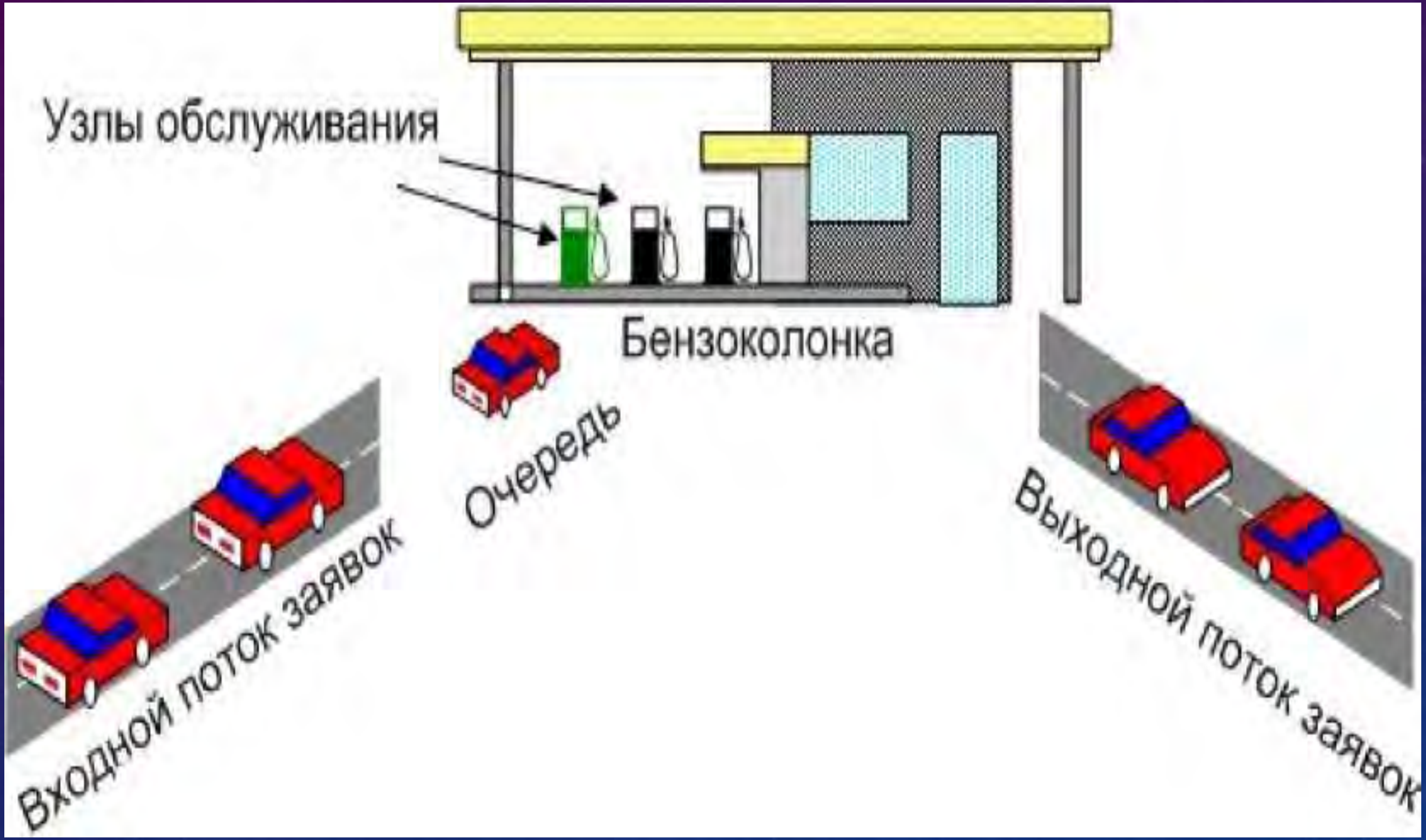
ANYLOGIC


AnyLogic Professional
File Edit View Model Window Help
Steel Converter Process : Simulation - AnyLogic Professional
root:Main
AnyLogic
DAY 1 TIME 01:29
Steel Converter Process
AnyLogic™ Agent Based Model
Show 2D
Total Steel Produced: 1100 tons
Continuous Casting Machines Status in Time
0: CCM 1 1: CCM 2 2: CCM 3
Idle or rotating
Pouring
Discontinuity/Failure
CCM Utilization
CCM 1: 0.8 CCM 2: 0.5
CCM 3: 0.6
Cranes Utilization
Crane 1: 0.287
Crane 2: 0.336
Run: 0 Running
Time: 89.85
Step: 335 [8]
Simulation:
Memory:
31.6 sec
Model
Palette
General
System Dynamics
Statechart
Actionchart
Analysis
Presentation
3D
Controls
Connectivity
Pictures
3D Objects
Person
Office Worker
Worker
Doctor
Nurse
House
Factory
Warehou...
Store
Enterprise Library
Pedestrian Library
Rail Yard Library
Palettes...

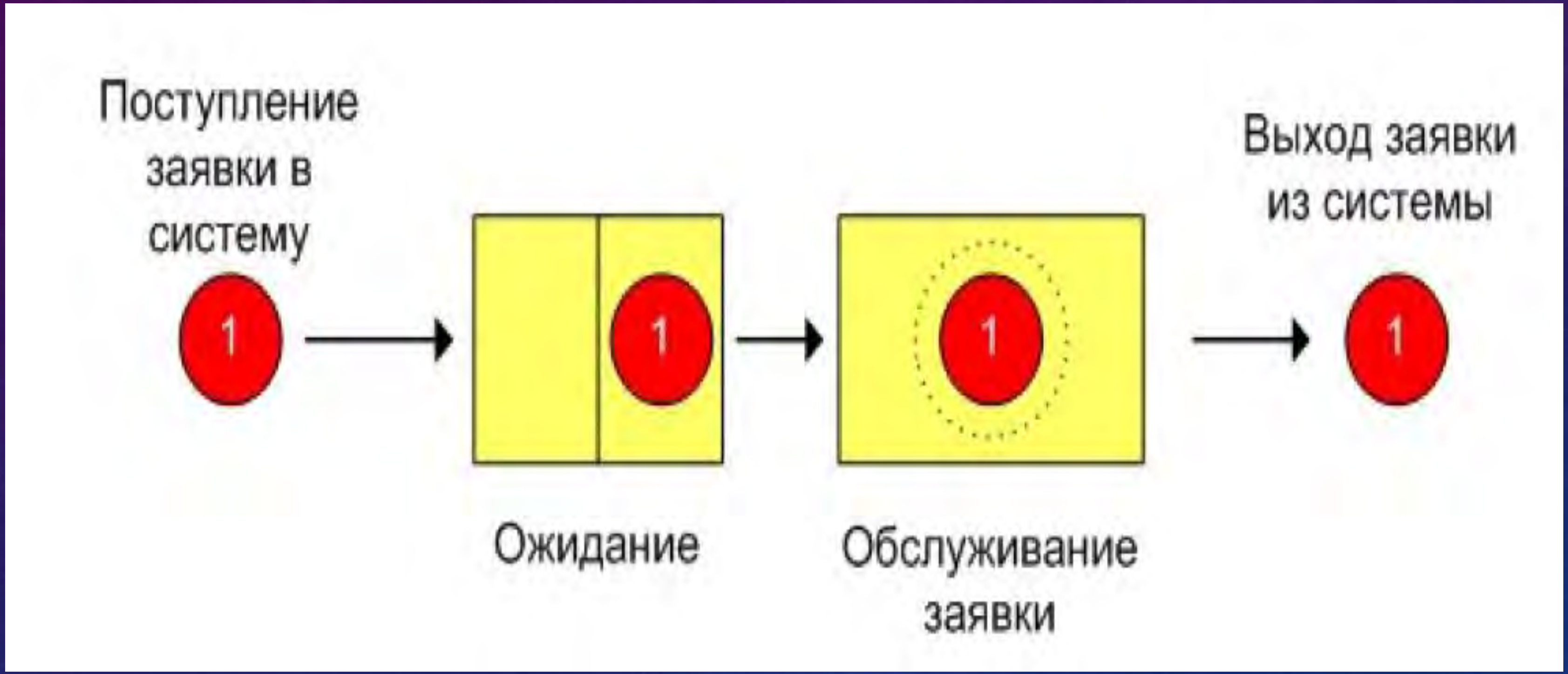
ПРИМЕНЕНИЕ EXCEL ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО



ПРИМЕР СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ



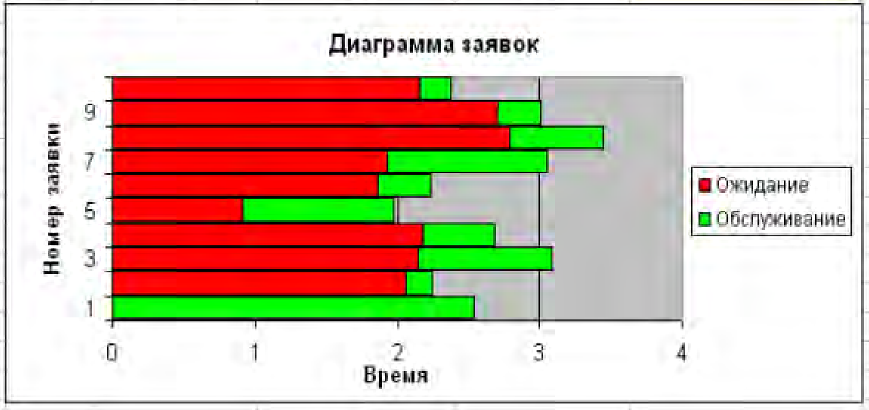
ОДНОКАНАЛЬНАЯ СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ



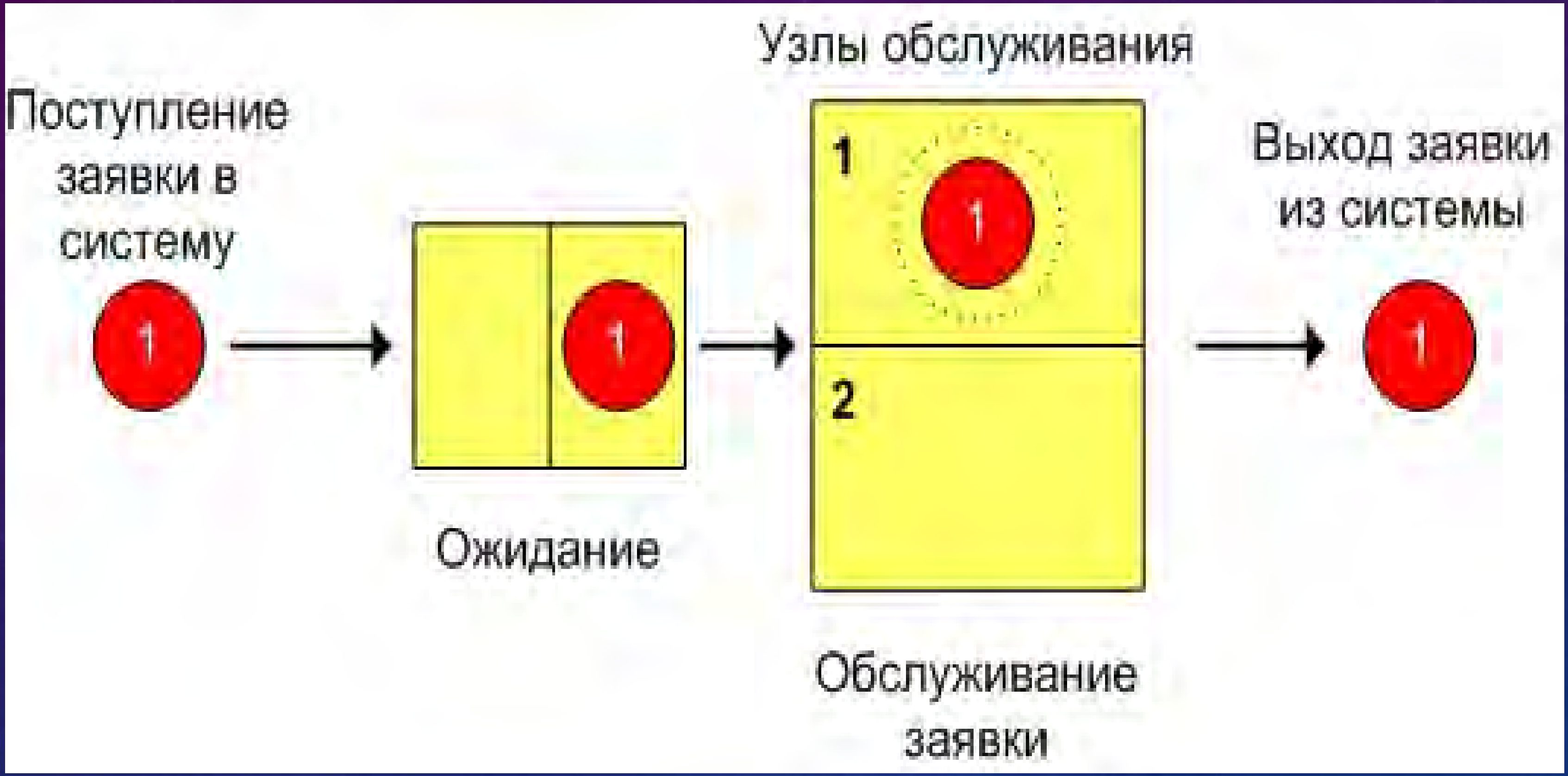
РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ОДНОКАНАЛЬНОЙ СМО

Среднее время между заявками, tz	0,50
Среднее время обслуживания заявки, to	1,00

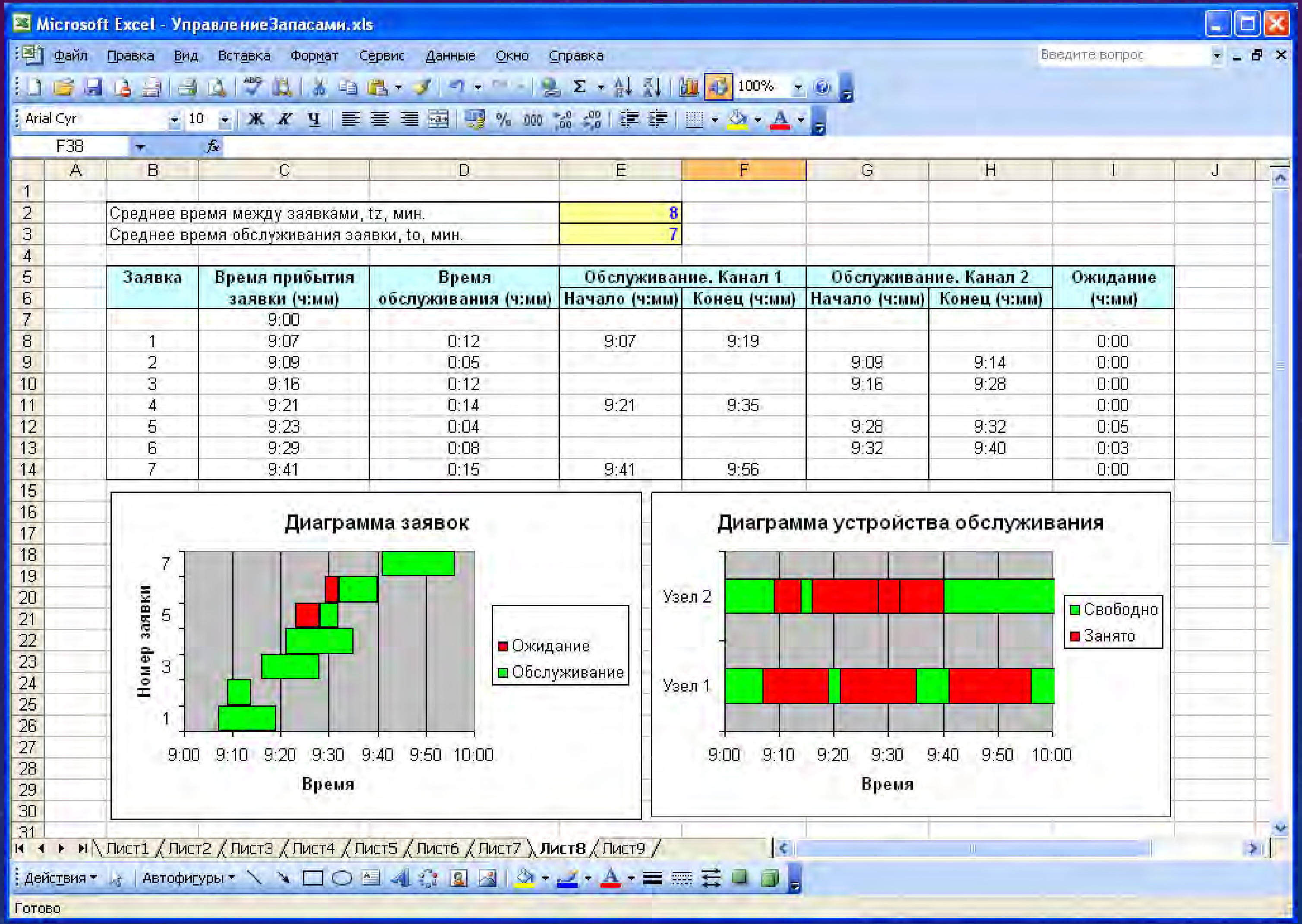
Заявка, n	Время ожидания, Wn	Время обслуживания, Xn	Время между заявками, Yn	Wn+Xn-Yn
1	0	2,55	0,49	2,06
2	2,06	0,19	0,11	2,14
3	2,14	0,95	0,91	2,18
4	2,18	0,51	1,77	0,92
5	0,92	1,06	0,12	1,86
6	1,86	0,38	0,32	1,93
7	1,93	1,14	0,28	2,79
8	2,79	0,67	0,75	2,70
9	2,70	0,31	0,85	2,16
10	2,16	0,23	0,47	1,92



ДВУХКАНАЛЬНАЯ СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ



МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУХКАНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ



Заявка	Время прибытия заявки (ч:мм)	Время обслуживания (ч:мм)	Обслуживание. Канал 1		Обслуживание. Канал 2		Ожидание (ч:мм)
			Начало (ч:мм)	Конец (ч:мм)	Начало (ч:мм)	Конец (ч:мм)	
	9:00						
1	9:07	0:12	9:07	9:19			0:00
2	9:09	0:05			9:09	9:14	0:00
3	9:16	0:12			9:16	9:28	0:00
4	9:21	0:14	9:21	9:35			0:00
5	9:23	0:04			9:28	9:32	0:05
6	9:29	0:08			9:32	9:40	0:03
7	9:41	0:15	9:41	9:56			0:00


Спасибо
за внимание!

Математические методы и модели поддержки принятия решений

Тема 9 Сетевые модели

Поиски более эффективных способов планирования сложных процессов привели к созданию принципиально новых методов сетевого планирования и управления (СПУ).

Система методов СПУ - система методов планирования и управления разработкой крупных народнохозяйственных комплексов, научными исследованиями, конструкторской и технологической подготовкой производства, новых видов изделий, строительством и реконструкцией, капитальным ремонтом основных фондов путем применения сетевых графиков. Первые системы, использующие сетевые графики, были применены в США в конце 50-х годов и получили названия CPM (английская аббревиатура, означающая метод критического пути) и PERT (метод оценки и обзора программы). Система CPM была впервые применена при управлении строительными работами, система PERT - при разработке систем «Поларис».

В России работы по сетевому планированию начались в 60-х годах. Тогда методы СПУ нашли применение в строительстве и научных разработках. В дальнейшем сетевые методы стали широко применяться и в других областях народного хозяйства.

СПУ основано на моделировании процесса с помощью сетевого графика и представляет собой совокупность расчетных методов, организационных и контрольных мероприятий по планированию и управлению комплексом работ.

Модели сетевого планирования и управления.

Система СПУ позволяет:

• формировать календарный план реализации некоторого комплекса работ;

• выявлять и мобилизовывать резервы времени, трудовые, материальные и денежные ресурсы;

• осуществлять управление комплексом работ по принципу «ведущего звена» с прогнозированием и предупреждением возможных срывов в ходе работ;

• повышать эффективность управления в целом при четком распределении ответственности между руководителями разных уровней и исполнителями работ.

Диапазон применения СПУ весьма широк: от задач, касающихся деятельности отдельных лиц, до проектов, в которых участвуют сотни организаций и десятки тысяч людей (например, разработка и создание крупного территориально-промышленного комплекса). Под *комплексом работ (комплексом операций,* или *проектом)* мы будем понимать всякую задачу, для выполнения которой необходимо осуществить достаточно большое количество разнообразных работ. Это может быть и строительство некоторого здания, корабля, самолета или любого другого сложного объекта, и разработка проекта этого сооружения, и даже процесс построения планов реализации проекта. Для того чтобы составить план работ по осуществлению больших и сложных проектов, состоящих из тысяч отдельных исследований и операций, необходимо описать его с помощью некоторой математической модели. Таким средством описания проектов (комплексов) является *сетевая модель.*

Сетевая модель представляет собой план выполнения некоторого комплекса взаимосвязанных работ (операций), заданного в специфической форме сети, графическое изображение которой называется *сетевым графиком*. Отличительной особенностью сетевой модели является четкое определение всех временных взаимосвязей предстоящих работ.

Главными элементами сетевой модели являются события и работы.

Термин работа используется в СПУ в широком смысле. Во-первых, это действительная работа - протяженный во времени процесс, требующий затрат ресурсов (например, сборка изделия, испытание прибора и т.п.). Каждая действительная работа должна быть конкретной, четко описанной и иметь ответственного исполнителя.

Во-вторых, это ожидание - протяженный во времени процесс, не требующий затрат труда (например, процесс сушки после покраски, старения металла, твердения бетона и т.п.).

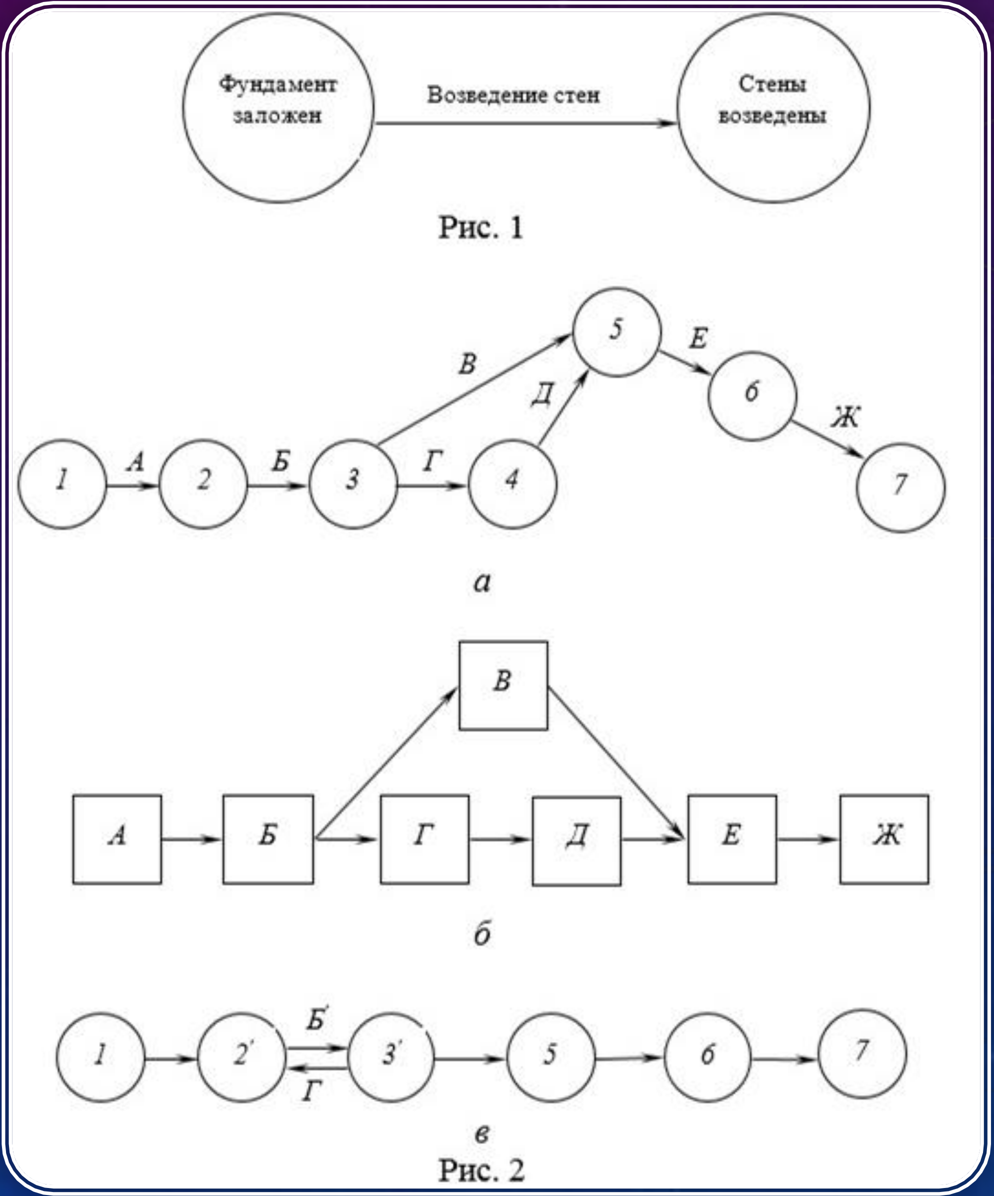
В-третьих, это зависимость, или фиктивная работа - логическая связь между двумя или несколькими работами (событиями), не требующими затрат труда, материальных ресурсов или времени. Она указывает, что возможность одной работы непосредственно зависит от результатов другой. Естественно, что продолжительность фиктивной работы принимается равной нулю

Событие - это момент завершения какого-либо процесса, отражающий отдельный этап выполнения проекта. Событие может являться частным результатом отдельной работы или суммарным результатом нескольких работ. Событие может свершиться только тогда, когда закончатся все работы, ему предшествующие. Последующие работы могут начаться только тогда, когда событие свершится. Отсюда *двойственный* характер события: для всех непосредственно предшествующих ему работ оно является конечным, а для всех непосредственно следующих за ним - начальным. При этом *предполагается, что событие не имеет продолжительности и свершается как бы мгновенно.* Поэтому каждое событие, включаемое в сетевую модель, должно быть полно, точно и всесторонне определено, его формулировка должна включать в себя результат всех непосредственно предшествующих ему работ.

Среди событий сетевой модели выделяют *исходное* и *завершающее* события. Исходное событие не имеет предшествующих работ и событий, относящихся к представленному в модели комплексу работ. Завершающее событие не имеет последующих работ и событий.

События на сетевом графике (или, как еще говорят, *на графе* изображаются кружками (вершинами графа), а работы - стрелками (ориентированными дугами), показывающими связь между работами. Пример фрагмента сетевого графика представлен на рис.1.

На рис. 2. *а* приведен сетевой график задачи моделирования и построения оптимального плана некоторого экономического объекта. Чтобы решить эту задачу, необходимо провести следующие работы: *Л* -сформулировать проблему исследования; *Б* - построить математическую модель изучаемого объекта; *В* - собрать информацию; *Г*- выбрать метод решения задачи; *Д* - построить и отладить программу для ЭВМ; *Е* - рассчитать оптимальный план; *Ж* - передать результаты расчета заказчику. Цифрами на графике обозначены номера событий, к которым приводит выполнение соответствующих работ.



Из графика, например, следует, что работы *В* и *Г* можно начать выполнять независимо одна от другой только после свершения события *3,* т.е. когда выполнены работы *А* и *Б;* работу *Д* - после свершения события *4,* когда выполнены работы *А, Б* и *Г,* а работу *Е* можно выполнить только после наступления события *5,* т.е. при выполнении всех предшествующих ему работ *А, Б, В, Г, Д.*

В сетевой модели, представленной на рис. 2 *а* нет числовых оценок. Такая сеть называется *структурной.* Однако на практике чаще всего используются сети, в которых заданы оценки продолжительности работ (указываемые в часах, неделях, декадах, месяцах и т.д. над соответствующими стрелками), а также оценки других параметров, например трудоемкости, стоимости и т.п. Именно такие сети мы будем рассматривать в дальнейшем.

Прежде сделаем следующее замечание. В рассмотренных примерах сетевые графики состояли из работ и событий. Однако может быть и иной принцип построения сетей - без событий. В такой сети вершины графа (например, изображенные прямоугольниками) означают определенные работы, а стрелки - зависимости между этими работами, определяющие порядок их выполнения. В качестве примера сетевой график «события - работы» задачи моделирования и построения оптимального плана некоторого экономического объекта, приведенный на рис. 2 *а,* представлен в виде сети «работы – связи» на рис. 2 *б.* А сетевой график «события – работы» той же задачи, но с неудачно составленным перечнем работ, представлен на рис. 2 *в.*

Следует отметить, что сетевой график «работы – связи» в отличие от графика «события – работы» обладает известными преимуществами: не содержит фиктивных работ, имеет более простую технику построения и перестройки, включает только хорошо знакомое исполнителям понятие работы без менее привычного понятия события. Вместе с тем сети без событий оказываются значительно более громоздкими, так как событий обычно значительно меньше, чем работ *(показатель сложности сети,* равный отношению числа работ к числу событий, как правило, существенно больше единицы). Поэтому эти сети менее эффективны с точки зрения управления комплексом. Этим и объясняется тот факт, что (при отсутствии в целом принципиальных различий между двумя формами представления сети) в настоящее время наибольшее распространение получили сетевые графики «события – работы».

Порядок и правила построения сетевых графиков.

Сетевые графики составляются на начальном этапе планирования. Вначале планируемый процесс разбивается на отдельные работы, составляется перечень работ и событий, продумываются их логические связи и последовательность выполнения, работы закрепляются за ответственными исполнителями. С их помощью оценивается длительность каждой работы. Затем составляется *(сшивается)* сетевой график. После упорядочения сетевого графика рассчитываются параметры событий и работ, определяются резервы времени и *критический путь.* Наконец, проводятся анализ и оптимизация сетевого графика, который при необходимости вычерчивается заново с пересчетом параметров событий и работ.

При построении сетевого графика необходимо соблюдать ряд правил.

1. *В сетевой модели не должно быть «тупиковых» событий, т.е. событий, из которых не выходит ни одна работа, за исключением завершающего события* (рис. 3 а). Здесь либо работа *(2, 3)* не нужна и ее необходимо аннулировать, либо не замечена необходимость определенной работы, следующей за событием *3* для свершения какого-либо последующего события. В таких случаях необходимо тщательное изучение взаимосвязей событий и работ для исправления возникшего недоразумения.

2. *В сетевом графике не должно быть «Хвостовых» событий (кроме исходного), которым не предшествует хотя бы одна работа* (событие *3* - на рис. 3 б). Здесь работы, предшествующие событию *3,* не предусмотрены. Поэтому событие *3* не может свершиться, а следовательно, не может быть выполнена и следующая за ним работа *(3,* 5). Обнаружив в сети такие события, необходимо определить исполнителей предшествующих им работ и включить эти работы в сеть.

3. *В сети не должно быть замкнутых контуров и петель, т.е. путей, соединяющих некоторые события с ними же самими* (рис. 3 *в, г).*

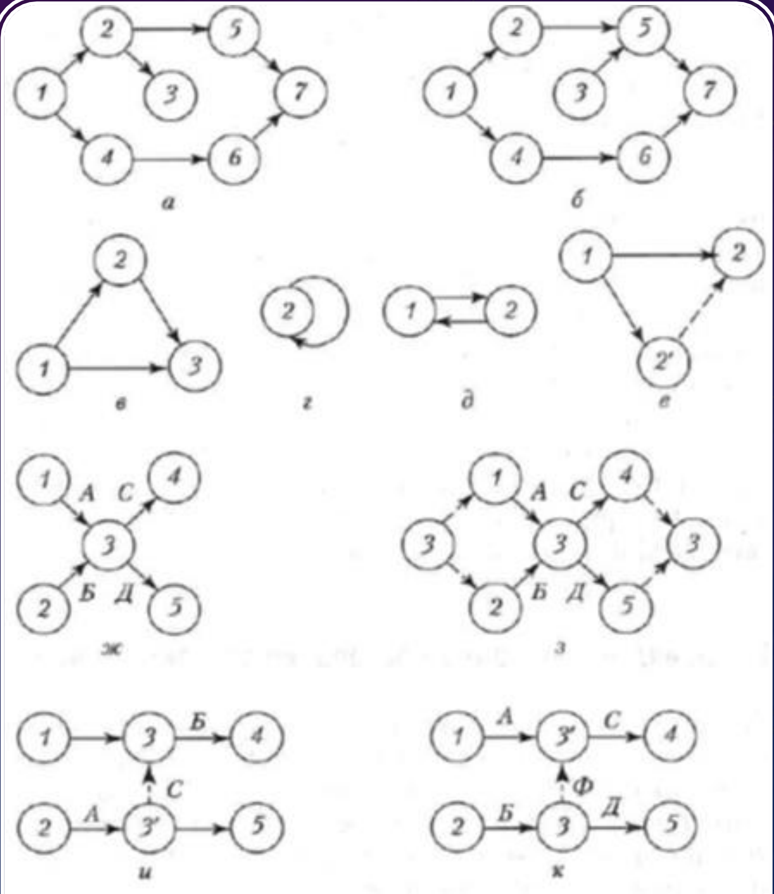


Рис. 3

Представим себе, что в сетевом графике, изображенном на рис 2 *а*, работы Б и Д при формулировании первоначального списка работ мы объединили бы в одну работу $Б_1$. Тогда получили бы сетевой график, представленный на рис. 2 *в*. Событие 2’значает, что к работе *Б',* которую нельзя выполнить до выбора метода расчета (работа *Г),* а выбор метода расчета нельзя начинать до окончания построения модели (событие *3').* Другими словами, в сети образовался простейший контур: *2'-3'-2'.*

При возникновении контура (а в сложных сетях, т.е. в сетях с высоким показателем сложности, это встречается довольно часто и обнаруживается лишь при помощи ЭВМ) необходимо вернуться к исходным данным и путем пересмотра состава работ добиться его устранения. Так, в нашем примере потребовалось бы разделение работы *Б'* на *Б* и *Д.*

4. *Любые два события должны быть непосредственно связаны не более чем одной работой-стрелкой.* Нарушение этого условия происходит при изображении параллельно выполняемых работ (рис. 3 *д).* Если эти работы так и оставить, то произойдет путаница из-за того, что две различные работы будут иметь одно и то же обозначение (7, *2);* обычно принято под *(i,* у) понимать работу, связывающую событие с *j-м* событием. Однако содержание этих работ, состав привлекаемых исполнителей и количество затрачиваемых на работы ресурсов могут существенно отличаться.

В этом случае рекомендуется ввести *фиктивное событие* (событие *2'* на рис. 3 *è)* и *фиктивную работу* (работа *2', 2),* при этом одна из параллельных работ (7, 2) замыкается на это фиктивное событие. Фиктивные работы изображаются на графике пунктирными линиями.

5. *В сети рекомендуется иметь одно исходное и одно завершающее событие.* Если в составленной сети это не так *(см* рис. 3 *ж),* то добиться желаемого можно путем введения фиктивных событий и работ, как это показано на рис. 3 з. Фиктивные работы и события необходимо вводить и в ряд* других случаев. Один из них - отражение зависимости событий не связанных с реальными работами. Например, работы *А* и *1* (рис. 3 *и)* могут выполняться независимо друг от друга, но по условиям производства работа *Б* не может начаться раньше, чем окончится работа *А.* Это обстоятельство требует введения фиктивной работы С.

Другой случай - неполная зависимость работ. Например, работа С требует для своего начала завершения работ *А* и *Б,* но работа *Д* связана только с работой *Б,* а от работы *А* не зависит. То гда требуется введение фиктивной работы Ф и фиктивного события *3',* как показано на рис. 3 *к.*

Кроме того, фиктивные работы могут вводиться для отражения реальных отсрочек и ожидания. В отличие от предыдущих случаев здесь фиктивная работа характеризуется протяженностью во времени.
Для каждого события рассчитывают три характеристики: ранний, поздний срок свершения события, а также его резерв.

Ранний срок свершения события определяется временем между величиной наиболее длительного отрезка пути от исходного до рассматриваемого события, причем

$$t_{\Pi}(1) = 0,\text{ а } t_{\Pi}(N) = t_{\text{Кр}}(L);$$
$$t_{\Pi}(j) = \max_{i}\{t_{\Pi}(i) + t(i,j)\}.$$

Поздний срок свершения события характеризует самый поздний допустимый срок (время /$_{\text{п}}$), к которому должно свершиться событие, не вызывая при этом срыва срока свершения конечного события:

$$t_{\Pi}(j) = \max_{i}\{t_{\Pi}(j) + t(i,j)\}.$$

Этот показатель определяется обратным ходом, начиная с завершающего события, с учетом соотношения.

$$t_{\Pi}(N) = t_{\Pi}(N).$$

Полный резерв времени показывает, на сколько можно увеличить время выполнения конкретной работы при условии, что срок выполнения всего комплекса работ не изменится.

Независимый резерв времени рассчитывается для случая, когда все предшествующие работы заканчиваются в поздние сроки, а все последующие начинаются в ранние сроки. Использование этого резерва не влияет на величину резервов времени других работ.

Путь характеризуется двумя показателями — продолжительностью и резервом.

Продолжительность пути определяется суммой продолжительностей составляющих его работ. **Резерв** определяется как разность между длинами критического и рассматриваемого путей. Из этого определения следует, что работы, лежащие на критическом пути, и сам критический путь имеют нулевой резерв времени. Резерв времени пути показывает, насколько может увеличиться продолжительность работ, составляющих данный путь, без изменения продолжительности общего срока выполнения всех работ.
Перечисленные выше характеристики СМ могут быть получены на основе приведенных аналитических формул, а процесс вычислений отображен либо непосредственно на графике, либо в матрице, либо в таблице.

Пример. Этап формализации в начале моделирования состоит в том, что предлагается представить данные задачи в виде таблицы (таблица 1). В ней записываются все виды работ, последовательность их выполнения и предполагаемое время исполнения. На этапе внутримодельного решения нужно построить сетевой график (рис. 4) по правилам построения графов. Далее выполнить расчет времени на выполнение этого комплекса работ, а также определить, возможно ли изменение времени для выполнения отдельных работ при условии, что срок выполнения всего комплекса работ не изменится.

Табл. 1. Перечень работ и их продолжительность

Наименование работы	Исходная работа	Опирается на работу	Продолжительность
Получение заявок на производство продукции, определение объемов производства	a_1	-	20
Корректировка технологии производства в соответствии с ГОСТ	a_2	a_1	2
Расчет затрат на производство	a_3	a_1	1
Поиск поставщиков сырья	a_4	a_1	1
Выбор лучшего варианта поставок	a_5	a_4	2
Прием сырья	a_6	a_5	1
Подбор персонала для выполнения задания	a_7	a_3, a_6	3
Производство продукции	a_8	a_2, a_7	15
Обработка товарных документов, реализация готовой продукции	a_9	a_8	3

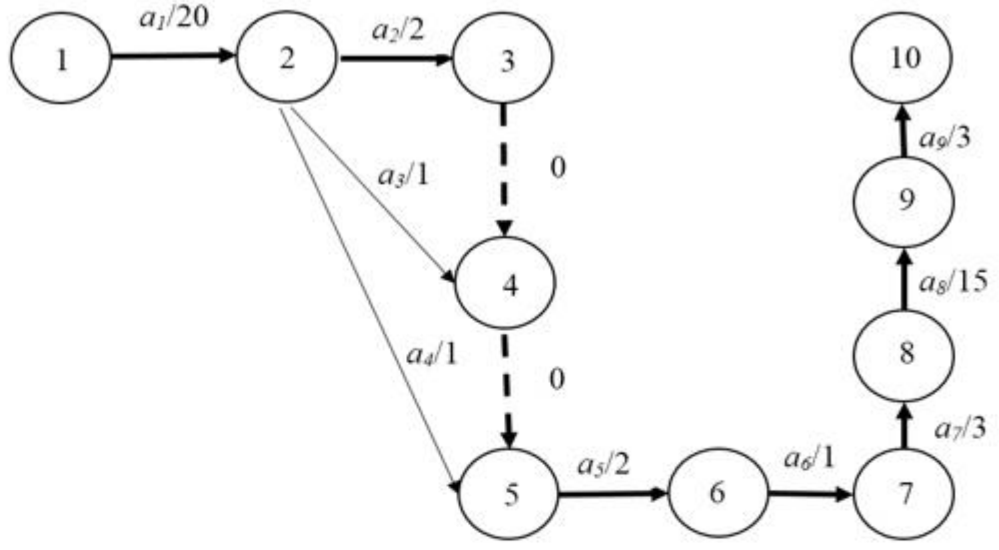


Рис. 4. Сетевой график выполнения работ

Далее рассчитывают длину каждого пути. Расчеты записывают в таблицу 2.

Табл. 2. Расчет длины пути

№ п/п	Путь	Длина пути, дней
1.	1-2-3-4-5-6-7-8-9-10	20+2+0+0+2+1+3+15+3=46
2.	1-2-4-5-6-7-8-9-10	20+1+0+2+1+3+15+3=45
3.	1-2-5-6-7-8-9-10	20+1+2+1+3+15+3=45

Из таблицы 2 видно, что больше всего времени занимает путь № 1. Значит, $t_{кр}=46$.

Теперь обучающимся можно предложить рассчитать параметры сетевого графика. Здесь нужно вычислить следующие параметры: сроки выполнения работ и резервы времени. Результаты расчетов представлены в таблице 3.

Табл. 3. Расчет параметров сетевого графика

Исходная работа	Работа (i,j)	Продолжительнось t_{ij}	Ранние сроки		Поздние сроки		Полный резерв времени $R_{ij}^{П}$
			начало $t_{ij}^{Р.Н.}$	окончание $t_{ij}^{Р.О.}$	начало $t_{ij}^{П.Н.}$	окончание $t_{ij}^{П.О.}$	
a_1	(1,2)	20	0	20	0	20	0
a_2	(2,3)	2	20	22	20	22	0
a_3	(2,4)	1	20	21	21	22	1
a_4	(2,5)	1	20	21	21	22	1
нулевая работа	(3,4)	0	22	22	22	22	0
нулевая работа	(4,5)	0	22	22	22	22	0
a_5	(5,6)	2	22	24	22	24	0
a_6	(6,7)	1	24	25	24	25	0
a_7	(7,8)	3	25	28	25	28	0
a_8	(8,9)	15	28	43	28	43	0
a_9	(9,10)	3	43	46	43	46	0

Из расчетов, приведенных в таблице 3, обучающиеся видят, что работы a_3 и a_4, не лежащие на критическом пути, должны иметь резервы времени. Резервы времени имеют работы (2-4) и (2-5). Это означает, что в запасе есть по одному дню для задержки начала этих работ или на увеличение выполнения каждой из этих работ на один день. Это не повлияет на увеличение срока выполнения всего комплекса работ.

Проведенные расчеты позволяют интерпретировать полученные результаты моделирования в контексте данной практической задачи так: руководителю проекта следует принять управленческое решение - утвердить сроки выполнения данного комплекса работ или внести в него изменения. Изменение по времени возможно для работ: a_3 - расчет затрат на производство и a_4 - поиск поставщиков сырья.

Метод критического пути

Пример

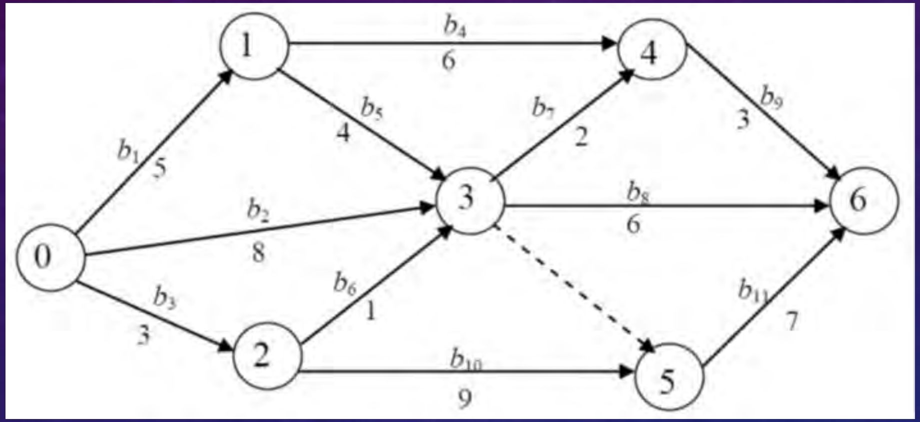
Построить сетевой график, рассчитать наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления событий, найти критический путь, определить полные и независимые резервы времени всех работ и коэффициенты напряженности некритических дуг с помощью данных, представленных в таблице.

Работа	Продолжительность работы	Опирается на работы
*b*1	5	–
*b*2	8	–
*b*3	3	–
*b*4	6	*b*1
*b*5	4	*b*1
*b*6	1	*b*3
*b*7	2	*b*2, *b*5, *b*6
*b*8	6	*b*2, *b*5, *b*6
*b*9	3	*b*4,
*b*1	9	*b*3
*b*1	7	*b*2, *b*5, *b*6, *b*10

Или в компактной записи:
$b1(5)\to b4(6), b5(4)$; $b3(3)\to b6(1), b10(9)$; $b2(8), b5(4), b6(1)\to b7(2), b8(6)$;
$b4(6), b7(2)\to b9(3)$; $b2(8), b5(4), b6(1), b10(9)\to b11(7)$.

Решение

Сначала строим структурный сетевой график и вводим правильную нумерацию событий



Наиболее ранние сроки наступления событий находим по формуле

$$T_p(i) = \max_{j \subset i}\{T_p(j) + t_{ji}\},$$

где максимум берется по всем событиям j, непосредственно предшествующим событию i. Начальному событию присваиваем *T*p (0) = 0.

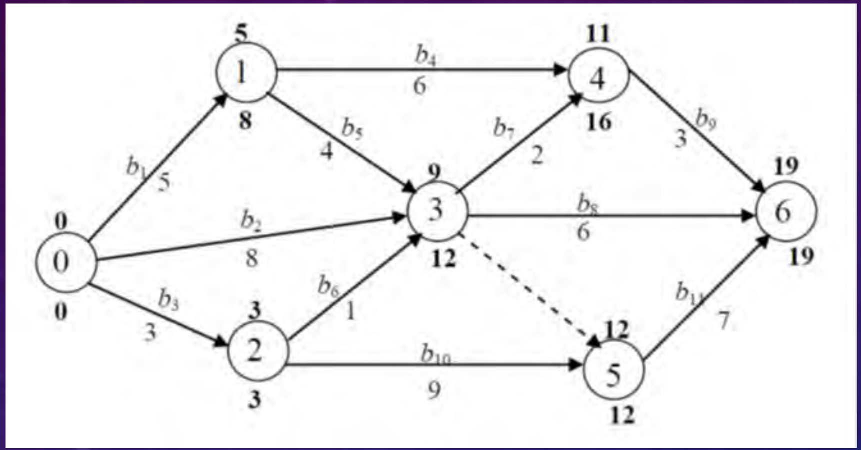
Тогда:

$Tр$ (1) = $Tр$ (0) + $t01$ = 0 + 5 = 5;
$Tр$ (2) = $Tр$ (0) + $t02$ = 0 + 3 = 3;
$Tр$ (3) = max{$Tр$ (0) + $t03$, $Tр$ (1) + $t13$, $Tр$ (2) + $t23$} = max{5 + 4, 0 + 8, 3 +1} = 9;
$Tр$ (4) = max{$Tр$ (1) + $t14$, $Tр$ (3) + $t34$} = max{5 + 6, 9 + 2} = 11;
$Tр$ (5) = max{$Tр$ (2) + $t25$, $Tр$ (3) + $t35$} = max{3 + 9, 9 + 0} = 12;
$Tр$ (6) = max{$Tр$ (3) + $t36$, $Tр$ (4) + $t46$, $Tр$ (5) + $t56$} = max{9 + 6, 11+ 3, 12 + 7} = 19.
Итак, критическое время $Tкр$ = 19. Минимальный срок выполнения проекта – 19 дней.
Наиболее поздние сроки наступления событий находим по формуле

$$T_{п}(i) = \min_{j \supset i}\{T_{п}(j) - t_{ij}\},$$

где минимум берется по всем событиям j, непосредственно следующим за событием i. Конечному событию присваиваем наиболее поздний срок наступления, равный критическому времени: $Tп$ (6) = $Tкр$ = 19.
Тогда:
$Tп$ (5) = $Tп$ (6) - $t56$ = 19 - 7 = 12;
$Tп$ (4) = $Tп$ (6) - $t46$ = 19 - 3 = 16;
$Tп$ (3) = min{$Tп$ (6) - $t36$, $Tп$ (5) - $t35$, $Tп$ (4) - $t34$} = min{19 - 6, 12 - 0, 16 - 2} = 12;
$Tп$ (2) = min{$Tп$ (5) - $t25$, $Tп$ (3) - $t23$} = min{12 - 9, 12 -1} = 3;
$Tп$ (1) = min{$Tп$ (4) - $t14$, $Tп$ (3) - $t13$} = min{16 - 6, 12 - 4} = 8;
$Tп$ (0) = min{$Tп$ (3) - $t03$, $Tп$ (2) - $t02$, $Tп$ (1) - $t01$} = min{12 - 8, 3 - 3, 8 - 5} = 0.

Результаты расчетов отразим на сетевом графике. Ранние сроки наступления событий запишем над кружками, изображающими эти события, поздние сроки наступления событий – под кружками.



Критическое время Tкр = 19.
Временные характеристики событий представлены в таблице:

Событие	Ранний срок $T_р(i)$	Поздний срок $T_п(i)$	Резерв времени $R(i)$
* 0	0	0	0
1	5	8	3
* 2	3	3	0
3	9	12	3
4	11	16	5
* 5	12	12	0
* 6	19	19	0

Резервы времени событий найдены по формуле $R(i) = T_п(i) - T_р(i)$.

Критический путь проходит через события с нулевым резервом времени, т. е. через события 0, 2, 5, 6.

Найдем резервы времени работ.

Наиболее ранний возможный срок начала работы $b_k = (i, j)$ равен наиболее раннему сроку наступления события i: $S_р(b_k) = T_р(i)$, а наиболее поздний допустимый срок окончания работы $b_k = (i, j)$ равен наиболее позднему сроку наступления события j: $E_п(b_k) = T_п(j)$.

Полный резерв времени работ найдем по формуле

$r_п(b_k) = r_п(i, j) = T_п(j) - T_р(i) - t_{ij} = E_п(b_k) - S_р(b_k) - t_{ij}$.

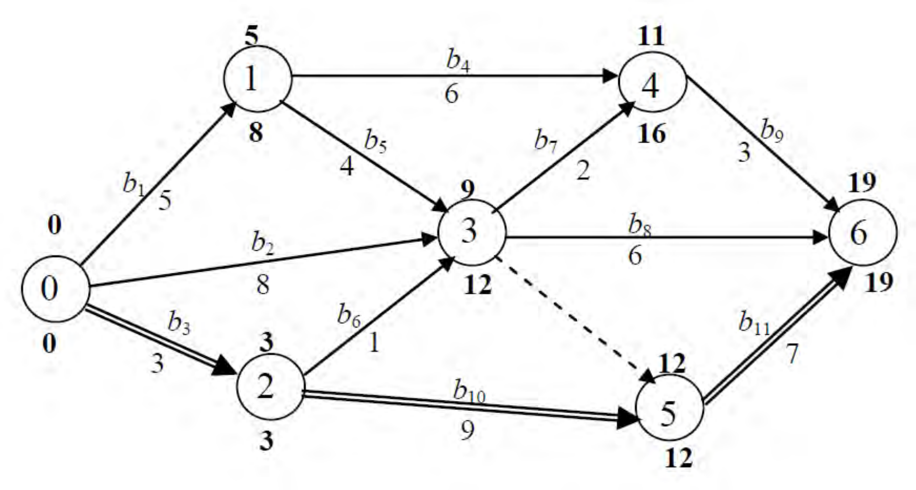
Независимый резерв времени работ найдем по формуле

$r_н(b_k) = r_н(i, j) = T_р(j) - T_п(i) - t_{ij}$.

Сведем полученные данные в таблицу:

Работа $b_k = (i, j)$	Продолжительность работы, $t(b_k) = t_{ij}$	$S_р(b_k)$	$E_п(b_k)$	$r_п(b_k)$	$r_н(b_k)$
$b_1 = (0, 1)$	5	0	8	3	0
$b_2 = (0, 3)$	8	0	12	4	1
* $b_3 = (0, 2)$	3	0	3	0	0
$b_4 = (1, 4)$	6	5	16	5	–3
$b_5 = (1, 3)$	4	5	12	3	–3
$b_6 = (2, 3)$	1	3	12	8	5
$b_7 = (3, 4)$	2	9	16	5	–3
$b_8 = (3, 6)$	6	9	19	4	1
$b_9 = (4, 6)$	3	11	19	5	0
* $b_{10} = (2, 5)$	9	3	12	0	0
* $b_{11} = (5, 6)$	7	12	19	0	0
$\varphi = (3, 5)$	0	9	12	3	0

Работа φ = (3, 5) – фиктивная работа.
Критические работы – *b*3, *b*10, *b*11. Резервы времени этих работ равны нулю. Выделим критический путь двойными стрелками



Резерв времени некритической дуги *b* находим как разность между длиной замыкающего критического участка и длиной самой некритической дуги:

$$R(b) = a - b.$$

Коэффициент напряженности некритической дуги определим по формуле

$$N(b) = \frac{b}{a} = 1 - \frac{R(b)}{a}.$$

Резервы времени и коэффициенты напряженности некритических дуг:

Некритические дуги	a	b	Резерв времени дуги, $R(b)$	Коэффициент напряженности дуги, $N(b)$
(2, 3, 5)	9	1	8	$1/9 \approx 0{,}11$
(0, 3, 5)	12	8	4	$2/3 \approx 0{,}67$
(0, 1, 3, 5)	12	9	3	$3/4 = 0{,}75$
(0, 3, 6)	19	14	5	$14/19 \approx 0{,}74$
(0, 1, 3, 6)	19	15	4	$15/19 \approx 0{,}79$
(0, 1, 4, 6)	19	14	5	$14/19 \approx 0{,}74$
(0, 1, 3, 4, 6)	19	14	5	$14/19 \approx 0{,}74$
(2, 3, 6)	16	7	9	$7/16 \approx 0{,}44$
(2, 3, 4, 6)	16	6	10	$6/16 = 0{,}375$

Дуги, коэффициент напряженности которых $N(b) > 0{,}8$, составляют критическую зону, дуги с коэффициентом напряженности $0{,}6 \le N(b) \le 0{,}8$ образуют подкритическую зону, а дуги с коэффициентом $N(b) < 0{,}6$ дают резервную зону. В нашем случае в критическую зону попадает только критический путь, в подкритической зоне находятся дуги (0, 1, 3, 6), (0, 1, 3, 5), (0, 3, 6), (0, 1, 4, 6), (0, 1, 3, 4, 6) и (0, 3, 5). Из них самая напряженная дуга (0, 1, 3, 6). Она быстрее других может перейти на критический путь. Дуги (2, 3, 5), (2, 3, 6) и (2, 3, 4, 6) образуют резервную зону.