Корреляционный и кросс-корреляционный анализ

Автокорреляционная функция (процедура ACF)

Процедура ACF оценивает автокорреляционную функцию стационарного временного ряда, заданного выборкой n=`NOBS` наблюдений $\{X_t\}$ для $t = 1;2;\ldots;n$.

Пусть $\hat{\mu}_X$=`XMEAN` – оценка среднего μ_X временного ряда $\{X_t\}$, где

$$\hat{\mu} = \begin{cases} \mu & \mu \text{ known} \\ \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_t & \mu \text{ unknown} \end{cases}.$$

Автоковариационная функция $\sigma(k)$ оценивается как

$$\hat{\sigma}(k) = \frac{1}{n-k}\sum_{t=1}^{n-k}(X_t - \hat{\mu})(X_{t+k} - \hat{\mu}), \qquad k = 0;1;\ldots;K,$$

где K=`MAXLAG`. Заметим, что $\hat{\sigma}(0)$ – оценка дисперсии выборки. Автокорреляционная функция $\rho(k)$ оценивается как

$$\hat{\rho}(k) = \frac{\hat{\sigma}(k)}{\hat{\sigma}(0)}, \qquad k = 0;1;\ldots;K.$$

Заметим, что $\hat{\rho}(0) \equiv 1$ по определению.

Стандартные ошибки автокорреляций выборки могут быть выборочно рассчитаны в соответствии с аргументом `ISEOPT`. Один метод /Bartlett, 1946/ основан на общем асимптотическом выражении для дисперсии коэффициента автокорреляции выборки стационарного временного ряда с независимыми, идентично распределёнными нормальными ошибками. Теоретическая формула

$$\operatorname{var}\{\hat{\rho}(k)\} = \frac{1}{n}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left[\rho^2(i) + \rho(i-k)\rho(i+k) - 4\rho(i)\rho(k)\rho(i-k) + 2\rho^2(i)\rho^2(k)\right],$$

где $\hat{\rho}(k)$ принимает μ известным. Для вычислительных целей автокорреляции $\rho(k)$ заменяются их оценками $\hat{\rho}(k)$ для $|k| \le K$ и пределы суммирования ограниченны, потому что по предположению $\rho(k) = 0$ для всех k, таких что $|k| > K$.

Второй метод /Moran, 1947/ использует точную формулу для дисперсии коэффициента автокорреляции выборки случайного процесса с независимыми, идентично распределёнными нормальными ошибками. Теоретическая формула

$$\mathrm{var}\{\hat{\rho}(k)\} = \frac{n-k}{n(n+2)},$$

где μ принимается равным нулю. Заметим, что эта формула не зависит от автокорреляционной функции.

Частная автокорреляционная функция (процедура PACF)

Процедура PACF оценивает частные автокорреляции стационарного временного ряда, заданного выборкой k=`MAXLAG` автокорреляций $\hat{\rho}(k)$ для $k = 0;1;\ldots;K$. Рассмотрим $\mathrm{AR}(k)$ процесс, определённый как

$$\overline{X}_t = \phi_{k1}\overline{X}_{t-1} + \phi_{k2}\overline{X}_{t-2} + \ldots + \phi_{kk}\overline{X}_{t-k} + A_t,$$

где ϕ_{kj} означает j-й коэффициент процесса. Множество оценок $\{\phi_{kk}\}$ для $k = 1;2;\ldots;K$ является частной автокорреляционной функцией выборки. Авторегрессионные параметры $\{\phi_{kj}\}$ для $j = 1;2;\ldots;k$ аппроксимируются оценками Юла–Уолкера /Yule-Walker/ для последующих $\mathrm{AR}(k)$ моделей, где $k = 1;2;\ldots;K$. Основанные на Yule-Walker–уравнениях для выборки

$$\hat{\rho}(j) = \hat{\phi}_{k1}\hat{\rho}(j-1) + \hat{\phi}_{k2}\hat{\rho}(j-2) + \ldots + \hat{\phi}_{kk}\hat{\rho}(j-k), \quad j = 1;2;\ldots;k$$

рекурсивные отношения для $k = 1;2;\ldots;K$ были развиты /Durbin, 1960/. Уравнения даются

$$\hat{\phi}_{kk} = \begin{cases} \hat{\rho}(1) & k = 1 \\ \dfrac{\hat{\rho}(k) - \sum_{j=1}^{k-1} \hat{\phi}_{k-1,j}\hat{\rho}(k-j)}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} \hat{\phi}_{k-1,j}\hat{\rho}(j)} & k = 2;\ldots;K \end{cases}$$

и

$$\hat{\phi}_{kj} = \begin{cases} \hat{\phi}_{k-1,j} - \hat{\phi}_{kk}\hat{\phi}_{k-1,j-1} & j = 1;2;\ldots;k-1 \\ \hat{\phi}_{kk} & j = k \end{cases}.$$

Процедура чувствительна к ошибкам округления и не должна использоваться, если параметры вблизи границы нестационарности. Возможна альтернатива, чтобы оценить $\{\phi_{kk}\}$ для последующих $\mathrm{AR}(k)$ моделей, используя метод наименьших квадратов /IMSL процедура `NSLSE`/ или метод максимального правдоподобия. Основываясь на гипотезе, что истинный процесс является $\mathrm{AR}(p)$, /Box and Jenkins, 1976, page 65/ показали, что

$$\operatorname{var}\{\hat{\phi}_{kk}\} \cong \frac{1}{n}, \qquad k \geq p+1.$$

См. /Box and Jenkins, 1976, page 82-84/ для большей информации относительно частной автокорреляционной функции.

Кросс- корреляционная функция (процедура CCF)

Процедура CCF оценивает кросс-корреляционную функцию двух совместно стационарных временных рядов, заданных выборками n=`NOBS` наблюдений $\{X_t\}$ и $\{Y_t\}$ для $t = 1;2;\ldots;n$.

Пусть $\hat{\mu}_X$=`XMEAN` – оценка среднего μ_X временного ряда $\{X_t\}$

$$\hat{\mu}_X = \begin{cases} \mu_X & \mu_X \text{ known} \\ \dfrac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \overline{X}_t & \mu_X \text{ unknown} \end{cases}.$$

Автоковариационная функция $\sigma_X(k)$ для $\{X_t\}$ оценивается как

$$\hat{\sigma}_X(k) = \frac{1}{n-k}\sum_{t=1}^{n-k}\left(X_t - \hat{\mu}_X\right)\left(X_{t+k} - \hat{\mu}_X\right), \qquad k = 0;1;\ldots;K,$$

где K =`MAXLAG`. Заметим, что $\hat{\sigma}_X(0)$ эквивалентна дисперсии `XVAR` выборки. Автокорреляционная функция оценивается как

$$\hat{\rho}_X(k) = \frac{\hat{\sigma}_X(k)}{\hat{\sigma}_X(0)}, \quad k = 0;1;\ldots;K.$$

Заметим, что $\hat{\rho}_X(0) \equiv 1$ по определению. Пусть $\hat{\mu}_Y$ =`YMEAN`, $\hat{\sigma}_Y(k)$ и $\hat{\rho}_Y(k)$ определяются аналогично.

Кросс-ковариационная функция $\sigma_{XY}(k)$ оценивается как

$$\hat{\sigma}_{XY}(k) = \begin{cases} \dfrac{1}{n-k}\displaystyle\sum_{t=1}^{n-k}\left(X_t - \hat{\mu}_X\right)\left(Y_{t+k} - \hat{\mu}_Y\right) & k = 0;1;\ldots;K \\ \dfrac{1}{n-k}\displaystyle\sum_{t=1-k}^{n}\left(X_t - \hat{\mu}_X\right)\left(Y_{t+k} - \hat{\mu}_Y\right) & k = -1;-2;\ldots;-K \end{cases}.$$

Кросс-корреляционная функция $\rho_{XY}(k)$ оценивается как

$$\hat{\rho}_{XY}(k) = \frac{\hat{\sigma}_{XY}(k)}{\left(\hat{\sigma}_X(k)\hat{\sigma}_Y(k)\right)^{1/2}}, \qquad k = 0;\pm 1;\ldots;\pm K.$$

Стандартные ошибки кросс-корреляций выборки могут быть выборочно рассчитаны в соответствии с аргументом `ISEOPT`. Один метод, основанный на общем асимптотическом выражении для дисперсии коэффициента кросс-корреляции выборки двух совместно стационарных временных рядов с независимыми, идентично распределёнными нормальными ошибками, дается /Bartlett, 1978, page 352/. Теоретическая формула

$$\mathrm{var}\{\hat{\rho}(k)\} = \frac{1}{n-k}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left[\rho_X(i)\rho_Y(i) + \rho_{XY}(i-k)\rho_{XY}(i+k) + \right.$$

$$\left. + \rho_{XY}^2(k)\left\{\rho_X(i) + \tfrac{1}{2}\rho_X^2(i) + \tfrac{1}{2}\rho_Y^2(i)\right\} - 2\rho_{XY}(k)\left\{\rho_X(i)\rho_{XY}(i+k) + \rho_{XY}(-i)\rho_Y(i+k)\right\}\right].$$

Для вычислительных целей автокорреляции $\rho_X(k)$ и $\rho_Y(k)$, и кросс-корреляции $\rho_{XY}(k)$ заменяются их соответствующими оценками для $|k| \le K$ и пределы суммирования равны нулю для всех k, таких что $|k| > K$.

Второй метод оценивает Bartlett–формулу при дополнительном предположении, что два ряда не имеют кросс-корреляции. Теоретическая формула

$$\operatorname{var}\{\hat{\rho}_{XY}(k)\} = \frac{1}{n-k}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\rho_X(i)\rho_Y(i), \qquad k \ge 0.$$

Для дополнительных специальных случаев Bartlett–формулы см. /Box and Jenkins, 1976, page 377/.

Важное свойство коэффициента кросс-корреляции $\sigma_{XY}(-k) = \sigma_{XY}(k)$ для $k \ge 0$. Этот результат используется при вычислении стандартной ошибки кросс-корреляции выборки для лага $k < 0$. В общем, кросс-ковариационная функция несимметрична относительно нуля, так что положительные и отрицательные лаги представляют интерес.

Многоканальная кросс-корреляционная функция (MCCF)

Процедура MCCF оценивает многоканальную кросс-корреляционную функцию двух совместно стационарных многоканальных временных рядов. Определим многоканальный временной ряд $\mathbf{X}$ как

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_p)$$

где

$$X_j = (X_{1j}, X_{2j}, \ldots, X_{nj})^T, \qquad j = 1;2;\ldots;p$$

с n=`NOBSX` и p=`NCHANX`. Аналогично определяется многоканальный временной ряд $\mathbf{Y}$ как

$$\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_q)$$

где

$$Y_j = \left(Y_{1j}, Y_{2j}, \ldots, Y_{mj}\right)^T, \qquad j = 1;2;\ldots;q$$

с m=NOBSY и q=NCHANY. Столбцы $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ соответствуют индивидуальным каналам многоканальных временных рядов и могут быть исследованы из рассмотрения одной переменной. Строки $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ соответствуют наблюдениям p переменных и q переменных временных рядов соответственно и могут быть исследованы из рассмотрения многих переменных. Например, см. /Priestley, 1981, page 692/ и /Fuller, 1976, page 14/.

Пусть $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{X}}$=XMEAN – вектор-строка, содержащая средние каналов $\mathbf{X}$. В частности,

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{X}} = \left(\hat{\mu}_{X1}, \hat{\mu}_{X_2}, \ldots, \hat{\mu}_{X_p}\right)$$

где для $j = 1;2;\ldots;p$

$$\hat{\mu}_{X_j} = \begin{cases} \mu_{X_j} & \mu_{X_j} \text{ known} \\ \dfrac{1}{n}\sum\limits_{t=1}^{n} \overline{X}_{tj} & \mu_{X_j} \text{ unknown} \end{cases}.$$

Пусть $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{Y}}$=YMEAN определяется аналогично. Кросс-ковариацией лага k между каналом i $\mathbf{X}$ и каналом j $\mathbf{Y}$ оценивается как

$$\hat{\sigma}_{X_iY_j}(k) = \frac{1}{N}\sum_t \left(X_{ti} - \hat{\mu}_{X_i}\right)\left(Y_{t+k,j} - \hat{\mu}_{Y_j}\right), \qquad k = -K;\ldots;-1;0;1;\ldots;K,$$

$$\hat{\sigma}_{X_iY_j}(k) = \begin{cases} \dfrac{1}{N}\sum\limits_t \left(X_{t,i} - \hat{\mu}_{X_i}\right)\left(Y_{t+k,j} - \hat{\mu}_{Y_j}\right) & k = 0;1;\ldots;K \\ \dfrac{1}{N}\sum\limits_t \left(X_{t,i} - \hat{\mu}_{X_i}\right)\left(Y_{t+k,j} - \hat{\mu}_{Y_j}\right) & k = -1;-2;\ldots;-K \end{cases}.$$

где $i = 1;2;\ldots;p$, $j = 1;2;\ldots;q$ и K=MAXLAG. Суммирование по t производится по всем возможным кросс-произведениям с N равным числу кросс-произведений в сумме.

Пусть $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{X}}(0)$=XVAR – вектор-строка, содержащая оценки дисперсий каналов $\mathbf{X}$. В частности

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{X}}(0) = \left(\hat{\sigma}_{X_1}(0), \hat{\sigma}_{X_2}(0), \ldots, \hat{\sigma}_{X_p}(0)\right),$$

где

$$\hat{\sigma}_{X_j}(0)=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left(X_{tj}-\hat{\mu}_{X_j}\right)^2,\ j=1;2;\ldots;p.$$

Пусть $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{Y}}(0)$=`YVAR` определяется аналогично. Кросс-корреляция лага k между каналом i $\mathbf{X}$ и каналом j $\mathbf{Y}$ оценивается как

$$\hat{\rho}_{X_iY_j}(k)=\frac{\hat{\sigma}_{X_iY_j}(k)}{\left(\hat{\sigma}_{X_i}(0)\hat{\sigma}_{Y_j}(0)\right)^{1/2}},\qquad k=0;\pm1;\ldots;\pm K.$$

Спектральный и кросс-спектральный анализ

Ядро Дирихле (процедура DIRIC)

Процедура DIRIC оценивает ядро Дирихле /Dirichlet/ $D_M(\theta)$ для заданного параметра M, угла θ=`RANGLE` и допуска ε=`EPS`. Вычислительная форма функции задаётся как

$$D_M(\theta)=\begin{cases}\dfrac{(2M+1)}{2\pi}\left(\dfrac{\sin\left(\left(M+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{\left(M+\frac{1}{2}\right)\theta}\right), & |\theta|<\varepsilon,\\ \dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{\sin\left(\left(M+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)}\right), & \varepsilon\le|\theta|\le\pi,\\ 0, & |\theta|>\pi.\end{cases}$$

Первый случай является аппроксимацией $D_M(\theta)$ для небольших θ, второй случай является обычным теоретическим определением.

В спектральном анализе ядро Dirichlet соответствует усеченной периодограмме спектрального окна, и M называется параметром спектрального окна. Поскольку ядро Dirichlet может быть отрицательным для определённых значений θ, оценка спектральной плотности усеченной периодограммы может также быть отрицательной. Это нежелательное свойство, поскольку истинная спектральная плотность является неотрицательной функцией. Для дальнейшего изучения смотреть /Priestley, 1981, pages 437-438/ и /Anderson, 1971, pages 508-511/.

Ядро Феджера (процедура FEJER)

Процедура FEJER оценивает ядро Феджера /Fejer/ $F_M(\theta)$ для заданного параметра M, угла θ=`RANGLE` и допуска ε=`EPS`. Вычислительная форма функции задаётся как

$$D_M(\theta)=\begin{cases}\dfrac{M}{2\pi}\left(\dfrac{\sin\left(\frac{1}{2}M\theta\right)}{\frac{1}{2}M\theta}\right)^2, & |\theta|<\varepsilon,\\ \dfrac{1}{2\pi M}\left(\dfrac{\sin\left(\frac{1}{2}M\theta\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)}\right)^2, & \varepsilon\le|\theta|\le\pi,\\ 0, & |\theta|>\pi.\end{cases}$$

Первый случай является аппроксимацией $F_M(\theta)$ для небольших θ, второй случай является обычным теоретическим определением.

В спектральном анализе ядро Fejer соответствует модифицированному спектральному окну Bartlett, и M называется параметром спектрального окна. Поскольку ядро Fejer неотрицательно для всех значений θ, модифицированная оценка Bartlett спектральной плотности также неотрицательна. Это желательное свойство, поскольку истинная спектральная плотность является неотрицательной функцией. Для дальнейшего изучения смотреть /Priestley, 1981, pages 439-440/ и /Anderson, 1971, pages 508-511/.

Спектральные окна

Доступны следующие спектральные окна $W_n(\theta)$:

модифицированный Bartlett

$$W_n(\theta)=\frac{1}{2\pi M}\left(\frac{\sin(M\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\right)^2=F_M(\theta),$$

где $F_M(\theta)$ соответствует ядру Fejer порядка M ;

Daniell

$$W_n(\theta)=\begin{cases}M/(2\pi) & -\pi/M\le\theta\le\pi/M\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases};$$

Tukey

$$W_n(\theta)=aD_M(\theta-\pi/M)+(1-2a)D_M(\theta)+aD_M(\theta+\pi/M),\ 0<a\le 0.25,$$

где $D_M(\theta)$ представляет ядро Dirichlet. Окно Tukey-Hamming получается, когда $a = 0.23$, и окно Tukey-Hanning получается, когда $a = 0.25$;

Parzen

$$W_n(\theta) = \frac{6\pi}{M}\left(F_{M/2}(\theta)\right)^2\left(1 - \tfrac{2}{3}\sin^2(\theta/2)\right),$$

где M – чётное. Если M нечётное, то $M+1$ используется вместо M в формуле выше;

Bartlett-Priestley

$$W_n(\theta) = \begin{cases} \dfrac{3M}{4\pi}\left(1 - \left(\dfrac{M\theta}{\pi}\right)^2\right) & |\theta| \le \pi/M \\ 0 & |\theta| > \pi/M \end{cases}.$$

Периодограмма (процедура PFFT)

Процедура PFFT рассчитывает периодограмму стационарного временного ряда, заданного выборкой n=`NOBS` наблюдений $\{X_t\}$ для $t = 1;2;\ldots;n$.

Пусть $\{\tilde{X}_t\}$ для $t = 1;2;\ldots;N$ представляет центрированные и дополненные нулями данные

$$\tilde{X}_t = \begin{cases} X_t - \hat{\mu}_X & t = 1;2;\ldots;n \\ 0 & t = n+1;\ldots;N \end{cases},$$

где N=`NOBS+NPAD` и $\hat{\mu}_X$=`XCNTR` определяется как

$$\hat{\mu}_X = \begin{cases} \mu_X & \mu_X \text{ known} \\ \bar{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_t & \mu_X \text{ unknown} \end{cases}.$$

Дискретное преобразование Фурье $\{\tilde{X}_t\}$ для $t = 1;2;\ldots;N$ определяется как

$$\zeta_{\tilde{X}}(\omega_k)=\sum_{t=1}^{N}\tilde{X}_t\exp(-i\omega_k t)$$

для дискретного набора частот

$$\omega_k = 2\pi k/N, \quad .$$

Альтернативное представление $\zeta_{\tilde{X}}(\omega_k)$ в терминах косинус- и синус-преобразований

$$\zeta_{\tilde{X}}(\omega_k)=\alpha_{\tilde{X}}(\omega_k)-i\beta_{\tilde{X}}(\omega_k),$$

где $\alpha_{\tilde{X}}(\omega_k)=\sum_{t=1}^{N}\tilde{X}_t\cos(\omega_k t)$ и $\beta_{\tilde{X}}(\omega_k)=\sum_{t=1}^{N}\tilde{X}_t\sin(\omega_k t)$.

Чтобы рассчитать дискретное преобразование Фурье используется алгоритм быстрого преобразования Фурье. Периодограмма выборочной последовательности $\{X_t\}$, $t=1;2;\ldots;n$, рассчитанная по центрированной и дополненной нулями последовательности $\{\tilde{X}_t\}$, $t=1;2;\ldots;N$ определяется как

$$I_{n,N,\tilde{X}}(\omega_k)=K\left|\sum_{t=1}^{N}\tilde{X}_t\exp(-i\omega_k t)\right|^2 = K\left|\zeta_{\tilde{X}}(\omega_k)\right|^2,$$

где K – масштабный множитель

$$K=\begin{cases}\dfrac{2}{n} & \text{for the usual periodogram}\\ \dfrac{1}{2\pi n} & \text{for the modified periodogram}\end{cases}.$$

Масштабный множитель обычной периодограммы соотносит амплитуды гармоник с сумой квадратов $X_t-\hat{\mu}_X$ /Fuller, 1976, pages 276-277/. Если амплитуда первой гармоники (соответствующая $k=0$) заменяется половиной её значения, то, если N – нечётное, то сумма квадратов амплитуд $\lfloor N/2\rfloor+1$ гармоник, соответствующих $k=0;1;\ldots;\lfloor N/2\rfloor$ равна

$$\frac{N}{n}\sum_{t=1}^{n}(X_t-\hat{\mu}_X)^2.$$

Для чётного N, если амплитуда первой гармоники (соответствующая $k=0$) и амплитуда последней гармоники (соответствующая $k=N/2$) заменяются каждая половиной их значений, то выдерживается такое же соотношение. Модифицированная периодограмма является асимптотически объективной оценкой функции ненормализованной спектральной плотности для каждой частоты ω_k /Priestley, 1981, page 417/. Аргумент `IPVER` используется, чтобы специфицировать тип периодограммы.

Альтернативное представление дискретного преобразования Фурье подразумевает

$$I_{n,N,\tilde{X}}(\omega_k) = A_{\tilde{X}}^2(\omega_k) + B_{\tilde{X}}^2(\omega_k),$$

где $A_{\tilde{X}}(\omega_k) = K^{1/2}\alpha_{\tilde{X}}(\omega_k)$ и $B_{\tilde{X}}(\omega_k) = K^{1/2}\beta_{\tilde{X}}(\omega_k)$ представляют (масштабированные) косинус- и синус-преобразования соответственно. Поскольку периодограмма – чётная функция частоты, то достаточно оценить периодограмму на дискретном множестве неотрицательных частот

$$\omega_k = 2\pi k/N,\ k = 0;1;\ldots;\lfloor N/2 \rfloor.$$

Использование центрированных данных $\{\tilde{X}_t\}$ (без дополнения нулями) вместо оригинальных данных $\{X_t\}$ для $t = 1;2;\ldots;n$ не влияет на асимптотические выборочные свойства периодограммы, то есть

$$I_{n,n,\tilde{X}}(\omega_k) \equiv I_{n,n,X}(\omega_k),\ \omega_k \neq 0.$$

Для $\omega_k = 0$ $I_{n,n,\tilde{X}}(0) \equiv 0$ и $I_{n,n,X}(0) = K\left(\sum_{t=1}^{n} X_t\right)^2 = Kn^2\overline{X}^2$ отражают средние значения данных. См /Priestly, 1981, page 417/ для дальнейшего обсуждения.

Использование спектрального окна в данных (процедура SSWD)

Процедура SSWD оценивает, используя спектральное окно, ненормализованную функцию спектральной плотности стационарного временного ряда, заданного выборочной последовательностью n=`NOBS` наблюдений $\{X_t\}$ для $t = 1;2;\ldots;n$.

Пусть $\{\widetilde{X}_t\}$ для $t = 1;2;\ldots;N$ представляет центрированные и дополненные нулями данные

$$\widetilde{X}_t = \begin{cases} X_t - \hat{\mu}_X & t = 1;2;\ldots;n \\ 0 & t = n+1;\ldots;N \end{cases},$$

где N=NOBS+NPAD и $\hat{\mu}_X$=XCNTR определяется как

$$\hat{\mu}_X = \begin{cases} \mu_X & \mu_X \text{ known} \\ \overline{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{t=1}^{n} X_t & \mu_X \text{ unknown} \end{cases}.$$

Модифицированная периодограмма $\{\widetilde{X}_t\}$ $t = 1;2;\ldots;N$ оценивается

$$I_{n,N,\widetilde{X}}(\omega_k) = A_{\widetilde{X}}^2(\omega_k) + B_{\widetilde{X}}^2(\omega_k),$$

где $A_{\widetilde{X}}(\omega_k) = K^{1/2}\sum_{t=1}^{N}\widetilde{X}_t \cos(\omega_k t)$ и $B_{\widetilde{X}}(\omega_k) = K^{1/2}\sum_{t=1}^{N}\widetilde{X}_t \sin(\omega_k t)$ представляют косинус- и синус-преобразования $\widetilde{X}_t$ соответственно, и K – масштабный фактор, равный $1/(2\pi n)$. Поскольку периодограмма – чётная функция частоты, то достаточно оценить периодограмму на дискретном множестве неотрицательных частот

$$\omega_k = 2\pi k/N,\ k = 0;1;\ldots;\lfloor N/2 \rfloor.$$

Чтобы рассчитать модифицированную периодограмму $\widetilde{X}_t$, используется процедура PFFT.

Оценка ненормализованной спектральной плотности $\hat{h}_X(\omega)$ вычисляется в соответствии с

$$\hat{h}_X(\omega) = \frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\lfloor N/2 \rfloor}^{\lfloor N/2 \rfloor} I_{n,N,\widetilde{X}}(\omega_k) W_n(\omega - \omega_k),$$

где спектральное окно $W_n(\theta)$ специфицируется аргументом ISWVER. Доступны спектральные окна ()-().

Аргумент NM специфицирует число параметров M окна и соответствует числу оценок спектральной плотности, которые должны быть вычислены для данного спектрального окна. Ненормализованная спектральная плотность оценивается на множестве частот $\omega = f_i$, $i = 1;2;\ldots;n_f$, где n_f=NF. Эти частоты – в масштабе, специфицируемом аргументом IFSCAL, но преобразуются к масштабу радианов в единицу времени для вычислительных целей.

В формуле выше для $\hat{h}_X(\omega)$ принято, что данные $\{X_t\}$ соответствуют реализации стационарного процесса с дискретным параметром, наблюдаемого последовательно во времени. В этом случае, наблюдения равно разделены во времени с интервалом Δt=TINT, эквивалентным единице. Однако, если данные соответствуют реализации стационарного процесса с непрерывным параметром, записанные с равными интервалами времени, то оценка ненормализованной спектральной плотности должна быть скорректирована с учетом эффекта наложения. В общем случае, оценка $\hat{h}_X(\omega)$ дается $\hat{h}_X(\omega) = \Delta t \hat{h}_X(\omega)$, $|\omega| \le \pi/\Delta t$. Заметим, что частота ω желаемой спектральной оценки принимается, чтобы быть введённой в форму, уже скорректированную для интервала времени Δt. Приближенные доверительные интервалы для $h(\omega)$ могут быть вычислены, используя формулы, данные во введении.

Использование спектрального окна в периодограмме (SSWP)

Процедура SSWP оценивает, используя спектральное окно, ненормализованную функцию спектральной плотности стационарного временного ряда, заданного модифицированной периодограммой предварительно центрированных и дополненных нулями данных $\{\tilde{X}_t\}$ для $t = 1;2;\ldots;N$.

Может быть использована процедура PFFT, чтобы получить модифицированную периодограмму $I_{N,\tilde{X}}(\omega_k)$ на дискретном множестве неотрицательных частот

$$\omega_k = 2\pi k/N,\ k = 0;1;\ldots;\lfloor N/2 \rfloor.$$

Симметрия периодограммы используется, чтобы восстановить ординаты на отрицательных частотах.

Оценка ненормализованной спектральной плотности $\hat{h}_X(\omega)$ вычисляется в соответствии с

$$\hat{h}_X(\omega) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\lfloor N/2 \rfloor}^{\lfloor N/2 \rfloor} I_{n,N,\tilde{X}}(\omega_k) W_n(\omega - \omega_k),$$

где спектральное окно $W_n(\theta)$ специфицируется аргументом `ISWVER`. Доступны спектральные окна ()-().

Только один параметр окна M может быть специфицирован, так что рассчитывается только одна оценка $\hat{h}_X(\omega)$. Ненормализованная спектральная плотность оценивается на множестве частот $\omega = f_i$, $i = 1;2;\ldots;n_f$, где n_f=`NF`. Эти частоты – в масштабе радиан в единицу времени. Временной интервал Δt выборки принимается за единицу.

Использование последовательности весов в данных (SWED)

Процедура SWED оценивает, используя фиксированную последовательность весов, ненормализованную функцию спектральной плотности стационарного временного ряда, заданного выборочной последовательностью n=`NOBS` наблюдений $\{X_t\}$ для $t = 1;2;\ldots;n$.

Пусть $\{\tilde{X}_t\}$ для $t = 1;2;\ldots;N$ представляет центрированные и дополненные нулями данные

$$\tilde{X}_t = \begin{cases} X_t - \hat{\mu}_X & t = 1;2;\ldots;n \\ 0 & t = n+1;\ldots;N \end{cases},$$

где N=`NOBS+NPAD` и $\hat{\mu}_X$=`XCNTR` определяется как

$$\hat{\mu}_X = \begin{cases} \mu_X & \mu_X \text{ known} \\ \bar{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_t & \mu_X \text{ unknown} \end{cases}.$$

Модифицированная периодограмма $\{\tilde{X}_t\}$ $t = 1;2;\ldots;N$ оценивается

$$I_{n,N,\tilde{X}}(\omega_k) = A_{\tilde{X}}^2(\omega_k) + B_{\tilde{X}}^2(\omega_k),$$

где $A_{\tilde{X}}(\omega_k) = K^{1/2}\sum_{t=1}^{N}\tilde{X}_t \cos(\omega_k t)$ и $B_{\tilde{X}}(\omega_k) = K^{1/2}\sum_{t=1}^{N}\tilde{X}_t \sin(\omega_k t)$ представляют косинус- и синус-преобразования $\tilde{X}_t$ соответственно, и K – масштабный фактор, равный $1/(2\pi n)$. Поскольку периодограмма – чётная функция частоты, то достаточно оценить периодограмму на дискретном множестве неотрицательных частот

$$\omega_k = 2\pi k/N,\ k = 0;1;\ldots;\lfloor N/2 \rfloor$$

(здесь $\lfloor a \rfloor$ означает наибольшее целое, не превосходящее a). Чтобы рассчитать модифицированную периодограмму $\tilde{X}_t$, используется процедура PFFT.

Рассмотрим последовательность m=`NWT` весов $\{w_j\}$ для $j = -\lfloor m/2 \rfloor;\ldots;(m - \lfloor m/2 \rfloor - 1)$, где $\sum_j w_j = 1$. Значения этих весов фиксированы, так что они не зависят от частоты, для которой оценивается ненормализованная спектральная плотность $\hat{h}_X(\omega)$. Оценка ненормализованной спектральной плотности $\hat{h}_X(\omega)$ вычисляется в соответствии с

$$\hat{h}_X(\omega) = \sum_j w_j I_{n,N,\tilde{X}}(\omega_{k,j}),$$

где $\omega_{k,j} = 2\pi(k(\omega) + j)/N$ и $k(\omega)$ – целое такое, что $\omega_{k,0}$ ближайшее к ω. Веса, специфицируемые аргументом `WT`, могут быть относительными, поскольку они нормализуются, чтобы в сумме равняться единице, при действующем вычислении $\hat{h}_X(\omega)$. Обычно m нечётное с симметрией весов около среднего веса ω_0. Если m чётное, вес правее середины рассматривается как ω_0. Заметим, что ордината периодограммы $I_{n,N,\tilde{X}}(0)$ заменяется $I_{n,N,\tilde{X}}(\omega_1)$ и сумма отражается от каждой границы. Ненормализованная спектральная плотность оценивается на множестве частот $\omega = f_i$, $i = 1;2;\ldots;n_f$, где n_f=`NF`. Эти частоты – в масштабе, специфицируемом аргументом `IFSCAL`, но преобразуются к масштабу радианов в единицу времени для вычислительных целей.

В формуле выше для $\hat{h}_X(\omega)$ принято, что данные $\{X_t\}$ соответствуют реализации стационарного процесса с дискретным параметром, наблюдаемого последовательно во времени. В этом случае, наблюдения равно разделены во времени с интервалом Δt=`TINT`, эквивалентным единице. Однако, если данные соответствуют реализации стационарного процесса с непрерывным параметром, записанные с равными интервалами времени, то оценка ненормализованной спектральной плотности должна быть скорректирована с учетом эффекта наложения. В общем случае, оценка $\hat{h}_X(\omega)$ дается $\hat{h}_X(\omega) = \Delta t \hat{h}_X(\omega)$, $|\omega| \le \pi/\Delta t$. Заметим, что частота ω желаемой спектральной оценки принимается, чтобы быть введённой в форму, уже скорректированную для интервала времени Δt. Приближенные доверительные интервалы для $h(\omega)$ могут быть вычислены, используя формулы, данные во введении.

Использование последовательности весов в периодограмме (процедура SWEP)

Процедура SWEP оценивает, используя последовательность фиксированных весов, ненормализованную функцию спектральной плотности стационарного временного ряда, заданного модифицированной периодограммой предварительно центрированных и дополненных нулями данных $\{\tilde{X}_t\}$ для $t = 1;2;\ldots;N$.

Может быть использована процедура PFFT, чтобы получить модифицированную периодограмму $I_{N,\tilde{X}}(\omega_k)$ на дискретном множестве неотрицательных частот

$$\omega_k = 2\pi k/N,\ k = 0;1;\ldots;\lfloor N/2 \rfloor$$

(здесь $\lfloor a \rfloor$ означает наибольшее целое, не превосходящее a). Симметрия периодограммы используется, чтобы восстановить ординаты на отрицательных частотах.

Рассмотрим последовательность m=NWT весов $\{w_j\}$ для $j = -\lfloor m/2 \rfloor;\ldots;(m - \lfloor m/2 \rfloor - 1)$, где $\sum_j w_j = 1$. Значения этих весов фиксированы, так что они не зависят от частоты, для которой оценивается ненормализованная спектральная плотность $\hat{h}_X(\omega)$. Оценка ненормализованной спектральной плотности $\hat{h}_X(\omega)$ вычисляется в соответствии с

$$\hat{h}_X(\omega) = \sum_j w_j I_{n,N,\tilde{X}}(\omega_{k,j}),$$

где $\omega_{k,j} = 2\pi(k(\omega) + j)/N$ и $k(\omega)$ – целое такое, что $\omega_{k,0}$ ближайшее к ω. Веса, специфицируемые аргументом WT, могут быть относительными, поскольку они нормализуются, чтобы в сумме быть равными единице, при действующем вычислении $\hat{h}_X(\omega)$. Обычно m нечётное с симметрией весов около среднего веса ω_0. Если m чётное, вес правее середины рассматривается как ω_0. Заметим, что ордината периодограммы $I_{n,N,\tilde{X}}(0)$

заменяется $I_{n,N,\tilde{X}}(\omega_1)$ и сумма отражается от каждой границы. Оценка ненормализованной спектральной плотности вычисляется на множестве частот $\omega = f_i$, $i = 1;2;\ldots;n_f$, где n_f=`NF`. Эти частоты – в масштабе радиан в единицу времени. Временной интервал Δt выборки принимается за единицу.

Приближенные доверительные интервалы для $h(\omega)$ могут быть вычислены, используя формулы, данные во введении.

Кросс-периодограмма (процедура CPFFT)

Процедура CPFFT рассчитывает кросс-периодограмму двух совместно стационарных временных рядов, заданных выборочными последовательностями n=`NOBS` наблюдений $\{X_t\}$ и $\{Y_t\}$ для $t = 1;2;\ldots;n$.

Пусть $\{\tilde{X}_t\}$ для $t = 1;2;\ldots;N$ представляет центрированные и дополненные нулями данные

$$\tilde{X}_t = \begin{cases} X_t - \hat{\mu}_X & t = 1;2;\ldots;n \\ 0 & t = n+1;\ldots;N \end{cases},$$

где N=`NOBS+NPAD` и $\hat{\mu}_X$=`XCNTR` определяется как

$$\hat{\mu}_X = \begin{cases} \mu_X & \mu_X \text{ known} \\ \bar{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_t & \mu_X \text{ unknown} \end{cases}.$$

Аналогично, пусть $\{\tilde{Y}_t\}$ для $t = 1;2;\ldots;N$ представляет центрированные и дополненные нулями данные

$$\tilde{Y}_t = \begin{cases} Y_t - \hat{\mu}_Y & t = 1;2;\ldots;n \\ 0 & t = n+1;\ldots;N \end{cases},$$

где $\hat{\mu}_Y$=`YCNTR` определяется как

$$\hat{\mu}_Y = \begin{cases} \mu_Y & \mu_Y \text{ known} \\ \bar{Y} = \dfrac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} Y_t & \mu_Y \text{ unknown} \end{cases}.$$

Периодограмма выборочной последовательности $\{X_t\}$ $t = 1;2;\ldots;n$, рассчитанная по дополненной нулями данным $\{\tilde{X}_t\}$ для $t = 1;2;\ldots;N$, определяется как

$$I_{n,N,\tilde{X}}(\omega_k) = A_{\tilde{X}}^2(\omega_k) + B_{\tilde{X}}^2(\omega_k),$$

где $A_{\tilde{X}}(\omega_k) = K^{1/2}\sum_{t=1}^{N}\tilde{X}_t\cos(\omega_k t)$ и $B_{\tilde{X}}(\omega_k) = K^{1/2}\sum_{t=1}^{N}\tilde{X}_t\sin(\omega_k t)$ представляют косинус- и синус-преобразования $\tilde{X}_t$ соответственно, и K – масштабный фактор

$$K = \begin{cases} \dfrac{2}{n} & \text{for the usual periodogram} \\ \dfrac{1}{2\pi n} & \text{for the modified periodogram} \end{cases}.$$

Периодограмма выборочной последовательности $\{Y_t\}$ $t = 1;2;\ldots;N$, рассчитанная по дополненной нулями последовательности $\{\tilde{Y}_t\}$ для $t = 1;2;\ldots;N$, определяется как

$$I_{n,N,\tilde{Y}}(\omega_k) = A_{\tilde{Y}}^2(\omega_k) + B_{\tilde{Y}}^2(\omega_k),$$

где $A_{\tilde{Y}}(\omega_k) = K^{1/2}\sum_{t=1}^{N}\tilde{Y}_t\cos(\omega_k t)$ и $B_{\tilde{Y}}(\omega_k) = K^{1/2}\sum_{t=1}^{N}\tilde{Y}_t\sin(\omega_k t)$ представляют косинус- и синус-преобразования $\tilde{Y}_t$ соответственно. Поскольку периодограмма – чётная функция частоты, то достаточно оценить периодограмму на дискретном множестве неотрицательных частот

$$\omega_k = 2\pi k/N,\ k = 0;1;\ldots;\lfloor N/2 \rfloor$$

(здесь $\lfloor a \rfloor$ означает наибольшее целое, не превосходящее a). Процедура PFFT используется, чтобы вычислить обе периодограммы $\{\tilde{X}_t\}$ и $\{\tilde{Y}_t\}$ в соответствии с версией, специфицируемой аргументом `IPVER`. Вычислительная формула кросс-периодограммы дается как

$$I_{n,N,\tilde{X}\tilde{Y}}(\omega_k) = \mathrm{Re}\left[I_{n,N,\tilde{X}\tilde{Y}}(\omega_k)\right] + i\,\mathrm{Im}\left[I_{n,N,\tilde{X}\tilde{Y}}(\omega_k)\right],$$

где $\mathrm{Re}\left[I_{n,N,\tilde{X}\tilde{Y}}(\omega_k)\right] = A_{\tilde{X}}(\omega_k)A_{\tilde{Y}}(\omega_k) + B_{\tilde{X}}(\omega_k)B_{\tilde{Y}}(\omega_k)$

и $\quad \mathrm{Im}\left[I_{n,N,\widetilde{X}\widetilde{Y}}(\omega_k)\right] = A_{\widetilde{X}}(\omega_k)B_{\widetilde{Y}}(\omega_k) - B_{\widetilde{X}}(\omega_k)A_{\widetilde{Y}}(\omega_k)$.

Действительная часть (модифицированной) кросс-периодограммы представляет «сырой» выборочный *коспектр* (*cospectrum*) и отрицательная мнимая часть (модифицированной) кросс-периодограммы представляет «сырой» выборочный *спектр квадратур* (*quadrature spectrum*) /Priestley, 1981, page 695/. Отношение между кросс-периодограммами и их комплексно-сопряжёнными дается как

$$I_{n,N,\widetilde{X}\widetilde{Y}}(-\omega_k) = I^*_{n,N,\widetilde{X}\widetilde{Y}}(\omega_k),\ 0 \le \omega_k \le \pi$$

и может быть использовано, чтобы восстановить кросс-периодограмму на отрицательных частотах.

Использование спектрального окна в данных (процедура CSSWD)

Процедура CSSWD оценивает, используя спектральное окно, ненормализованную функцию кросс-спектральной плотности двух совместно стационарных временных рядов, заданных выборкой n=`NOBS` наблюдений $\{X_t\}$ и $\{Y_t\}$ для $t = 1;2;\ldots;n$.

Пусть $\{\widetilde{X}_t\}$ для $t = 1;2;\ldots;N$ представляет центрированные и дополненные нулями данные

$$\widetilde{X}_t = \begin{cases} X_t - \hat{\mu}_X & t = 1;2;\ldots;n \\ 0 & t = n+1;\ldots;N \end{cases},$$

где N=`NOBS+NPAD` и $\hat{\mu}_X$=`XCNTR` определяется как

$$\hat{\mu}_X = \begin{cases} \mu_X & \mu_X \text{ known} \\ \overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_t & \mu_X \text{ unknown} \end{cases}.$$

Аналогично, пусть $\{\widetilde{Y}_t\}$ для $t = 1;2;\ldots;N$ представляет центрированные и дополненные нулями данные

$$\widetilde{Y}_t = \begin{cases} Y_t - \hat{\mu}_Y & t = 1;2;\ldots;n \\ 0 & t = n+1;\ldots;N \end{cases},$$

где $\hat{\mu}_Y$ =`YCNTR` определяется как

$$\hat{\mu}_Y = \begin{cases} \mu_Y & \mu_Y \text{ known} \\ \overline{Y} = \dfrac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} Y_t & \mu_Y \text{ unknown} \end{cases}.$$

Модифицированная периодограмма $\{\widetilde{X}_t\}$ для $t = 1;2;\ldots;N$, оценивается как

$$I_{n,N,\widetilde{X}}(\omega_k) = A_{\widetilde{X}}^2(\omega_k) + B_{\widetilde{X}}^2(\omega_k),$$

где $A_{\widetilde{X}}(\omega_k) = K^{1/2}\sum_{t=1}^{N}\widetilde{X}_t \cos(\omega_k t)$ и $B_{\widetilde{X}}(\omega_k) = K^{1/2}\sum_{t=1}^{N}\widetilde{X}_t \sin(\omega_k t)$ представляют косинус- и синус-преобразования $\widetilde{X}_t$ соответственно, и K – масштабный фактор, равный $1/(2\pi n)$.

Модифицированная периодограмма $\{\widetilde{Y}_t\}$ для $t = 1;2;\ldots;N$, оценивается

$$I_{n,N,\widetilde{Y}}(\omega_k) = A_{\widetilde{Y}}^2(\omega_k) + B_{\widetilde{Y}}^2(\omega_k),$$

где $A_{\widetilde{Y}}(\omega_k) = K^{1/2}\sum_{t=1}^{N}\widetilde{Y}_t \cos(\omega_k t)$ и $B_{\widetilde{Y}}(\omega_k) = K^{1/2}\sum_{t=1}^{N}\widetilde{Y}_t \sin(\omega_k t)$ представляют косинус- и синус-преобразования $\widetilde{Y}_t$ соответственно. Поскольку периодограмма – чётная функция частоты, то достаточно оценить периодограмму на дискретном множестве неотрицательных частот

$$\omega_k = 2\pi k/N,\ k = 0;1;\ldots;\lfloor N/2 \rfloor.$$

Процедура PFFT используется, чтобы вычислить обе периодограммы $\{\widetilde{X}_t\}$ и $\{\widetilde{Y}_t\}$.

Вычислительная формула кросс-периодограммы дается как

$$I_{n,N,\widetilde{X}\widetilde{Y}}(\omega_k) = \mathrm{Re}\left[I_{n,N,\widetilde{X}\widetilde{Y}}(\omega_k)\right] + i\,\mathrm{Im}\left[I_{n,N,\widetilde{X}\widetilde{Y}}(\omega_k)\right],$$

где $\mathrm{Re}\left[I_{n,N,\widetilde{X}\widetilde{Y}}(\omega_k)\right] = A_{\widetilde{X}}(\omega_k)A_{\widetilde{Y}}(\omega_k) + B_{\widetilde{X}}(\omega_k)B_{\widetilde{Y}}(\omega_k)$

и $\mathrm{Im}\left[I_{n,N,\widetilde{X}\widetilde{Y}}(\omega_k)\right] = A_{\widetilde{X}}(\omega_k)B_{\widetilde{Y}}(\omega_k) - B_{\widetilde{X}}(\omega_k)A_{\widetilde{Y}}(\omega_k).$

Процедура CPFFT используется, чтобы вычислить модифицированную периодограмму между $\{\widetilde{X}_t\}$ и $\{\widetilde{Y}_t\}$.

Ненормализованная спектральная плотность $\hat{h}_X(\omega)$ оценивается как

$$\hat{h}_X(\omega)=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\lfloor N/2\rfloor}^{\lfloor N/2\rfloor} I_{n,N,\widetilde{X}}(\omega_k)W_n(\omega-\omega_k),$$

и ненормализованная спектральная плотность $\hat{h}_Y(\omega)$ оценивается как

$$\hat{h}_Y(\omega)=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\lfloor N/2\rfloor}^{\lfloor N/2\rfloor} I_{n,N,\widetilde{Y}}(\omega_k)W_n(\omega-\omega_k),$$

где спектральное окно $W_n(\theta)$ специфицируется аргументом `ISWVER`. Доступны спектральные окна ()-().

Аргумент `NM` специфицирует число параметров M окна и, следовательно, соответствует числу оценок спектральной плотности, которые должны быть вычисленны для данного спектрального окна. Чтобы получить обе $\hat{h}_X(\omega)$ и $\hat{h}_Y(\omega)$, заметим, что используется одно и то же спектральное окно $W_n(\theta)$ и множество параметров M .

В формулах спектральной плотности выше данные $\{X_t\}$ и $\{Y_t\}$ соответствуют реализации бивариантного стационарного процесса с дискретным параметром, наблюдаемого последовательно во времени. В этом случае, наблюдения равно разделены во времени с интервалом Δt=`TINT`, равным единице. Однако, если данные соответствуют реализации бивариантного стационарного процесса с непрерывным параметром, записанные с равными интервалами времени, тогда оценки спектральной плотности должны быть скорректированы с учетом эффекта наложения. В общем случае, оценка $\hat{h}_X(\omega)$ дается $\hat{h}_X(\omega)=\Delta t\hat{h}_X(\omega)$, $|\omega|\le\pi/\Delta t$ и оценка $\hat{h}_Y(\omega)$ дается $\hat{h}_Y(\omega)=\Delta t\hat{h}_Y(\omega)$, $|\omega|\le\pi/\Delta t$. Ненормализованная спектральная плотность оценивается на множестве частот $\omega=f_i$, $i=1;2;\ldots;n_f$, где n_f=`NF`. Эти частоты – в масштабе, специфицируемом аргументом `IFSCAL`, но преобразуются к масштабу радианов в единицу времени для вычислительных целей. Частота ω желаемой спектральной оценки принимается, чтобы быть введённой в форму, уже скорректированную для интервала времени Δt.

Функция кросс-спектральной плотности в общем случае комплексно-значная и может быть записана в следующей форме:

$$h_{XY}(\omega) = c_{XY}(\omega) - iq_{XY}(\omega).$$

Коспектр (*cospectrum*) оценивается как

$$\hat{c}_{XY}(\omega) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\lfloor N/2 \rfloor}^{\lfloor N/2 \rfloor} \mathrm{Re}\left[I_{n,N,\tilde{X}\tilde{Y}}(\omega_k)\right] W_n(\omega - \omega_k),$$

и спектр квадратур (*quadrature spectrum*) оценивается как

$$\hat{q}_{XY}(\omega) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\lfloor N/2 \rfloor}^{\lfloor N/2 \rfloor} \mathrm{Im}\left[I_{n,N,\tilde{X}\tilde{Y}}(\omega_k)\right] W_n(\omega - \omega_k).$$

Заметим также, чтобы вычислить $\hat{h}_{XY}(\omega)$, используются такие же спектральное окно $W_n(\theta)$ и параметр окна M, что используются, чтобы получить $\hat{h}_X(\omega)$ и $\hat{h}_Y(\omega)$.

Оценка ненормализованной кросс-спектральной плотности вычисляется на таком же множестве частот, что и оценки ненормализованных спектральных плотностей с аналогичной коррекцией для Δt.

Эквивалентное представление $h_{XY}(\omega)$ в полярной форме определяется как

$$h_{XY}(\omega) = \alpha_{XY}(\omega)\exp(i\phi_{XY}(\omega)).$$

Кросс-амплитудный спектр (*cross-amplitude spectrum*) оценивается как

$$\hat{\alpha}_{XY}(\omega) = \left(\hat{c}_{XY}^2(\omega) + \hat{q}_{XY}^2(\omega)\right)^{1/2},$$

и фазовый спектр (*phase spectrum*) оценивается как

$$\hat{\phi}_{XY}(\omega) = \arctan\left(-\hat{q}_{XY}(\omega)/\hat{c}_{XY}(\omega)\right).$$

Наконец, спектр когерентности (*coherency spectrum*) оценивается как

$$
\left|\hat{w}_{XY}(\omega)\right| = \left(\frac{\hat{c}_{XY}^2(\omega) + \hat{q}_{XY}^2(\omega)}{\hat{h}_X(\omega)\hat{h}_Y(\omega)} \right)^{1/2}.
$$

Выводится когерентность или квадрат когерентности.

Использование спектрального окна в кросс-периодограмме (процедура CSSWP)

Процедура CSSWP оценивает, используя спектральное окно, ненормализованную функцию кросс-спектральной плотности двух совместно стационарных временных рядов, заданных модифицированными периодограммами и спектральными плотностями предварительно центрированных и дополненных нулями данных выборкой n=NOBS наблюдений $\{\tilde{X}_t\}$ и $\{\tilde{Y}_t\}$ для $t = 1;2;\ldots;n$.

Процедура CPFFT может быть использована, чтобы рассчитать модифицированные периодограммы $I_{N,\tilde{X}}(\omega_k)$ и $I_{N,\tilde{Y}}(\omega_k)$, и кросс-периодограмму $I_{N,\tilde{X}\tilde{Y}}(\omega_k)$ на дискретном множестве неотрицательных частот

$$
\omega_k = 2\pi k/N,\ k = 0;1;\ldots;\lfloor N/2 \rfloor
$$

(здесь $\lfloor a \rfloor$ означает наибольшее целое, не превосходящее a). Или процедура SSWP, или процедура SWEP могут быть применены к периодограммам, чтобы получить оценки ненормализованной спектральной плотности $\hat{h}_X(\omega)$ и $\hat{h}_Y(\omega)$ на множестве частот $\omega = f_i$, $i = 1;2;\ldots;n_f$, где n_f=NF. Эти частоты – в масштабе радиан в единицу времени. Выборочный временной интервал Δt принимается равным единице. Заметим, что спектральное окно или весовая последовательность, используемые, чтобы рассчитать $\hat{h}_X(\omega)$, могут отличаться от используемых, чтобы рассчитать $\hat{h}_Y(\omega)$.

Функция кросс-спектральной плотности в общем случае комплексно-значная и может быть записана как

$$h_{XY}(\omega) = c_{XY}(\omega) - iq_{XY}(\omega).$$

Коспектр (*cospectrum*) оценивается как

$$\hat{c}_{XY}(\omega) = \frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\lfloor N/2\rfloor}^{\lfloor N/2\rfloor}\mathrm{Re}\left[I_{n,N,\tilde{X}\tilde{Y}}(\omega_k)\right]W_n(\omega-\omega_k),$$

и спектр квадратур (*quadrature spectrum*) оценивается как

$$\hat{q}_{XY}(\omega) = \frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\lfloor N/2\rfloor}^{\lfloor N/2\rfloor}\mathrm{Im}\left[I_{n,N,\tilde{X}\tilde{Y}}(\omega_k)\right]W_n(\omega-\omega_k),$$

где спектральное окно $W_n(\theta)$ специфицируется аргументом `ISWVER`. Доступны спектральные окна ()-().

Только один параметр окна M может быть специфицирован, чтобы рассчитать только одну оценку $\hat{h}_{XY}(\omega)$. Оценка ненормализованной кросс-спектральной плотности рассчитывается на таком же множестве частот, как и оценки ненормализованной спектральной плотности, обсуждавшиеся выше. Однако, частное спектральное окно, используемое, чтобы рассчитать $\hat{h}_{XY}(\omega)$, может не соответствовать ни спектральному окну, ни весовой последовательности, использованным, чтобы рассчитать или $\hat{h}_X(\omega)$, или $\hat{h}_Y(\omega)$.

Эквивалентное представление $h_{XY}(\omega)$ в полярной форме определяется как

$$h_{XY}(\omega) = \alpha_{XY}(\omega)\exp(i\phi_{XY}(\omega)).$$

Кросс-амплитудный спектр (*cross-amplitude spectrum*) оценивается как

$$\hat{\alpha}_{XY}(\omega) = \left(\hat{c}_{XY}^2(\omega) + \hat{q}_{XY}^2(\omega)\right)^{1/2},$$

и фазовый спектр (*phase spectrum*) оценивается как

$$\hat{\phi}_{XY}(\omega) = \arctan\left(-\hat{q}_{XY}(\omega)/\hat{c}_{XY}(\omega)\right).$$

Наконец, спектр когерентности (*coherency spectrum*) оценивается как

$$\left|\hat{w}_{XY}(\omega)\right| = \left(\frac{\hat{c}_{XY}^2(\omega) + \hat{q}_{XY}^2(\omega)}{\hat{h}_X(\omega)\hat{h}_Y(\omega)}\right)^{1/2}.$$

Выводится когерентность или квадрат когерентности.

Использование последовательности весов в данных (CSWED)

Процедура CSWED оценивает, используя фиксированную последовательность весов, ненормализованную функцию кросс-спектральной плотности двух совместно стационарных временных рядов, заданных выборкой n=`NOBS` наблюдений $\{X_t\}$ и $\{Y_t\}$ для $t = 1;2;\ldots;n$.

Пусть $\{\widetilde{X}_t\}$ для $t = 1;2;\ldots;N$ представляет центрированные и дополненные нулями данные

$$\widetilde{X}_t = \begin{cases} X_t - \hat{\mu}_X & t = 1;2;\ldots;n \\ 0 & t = n+1;\ldots;N \end{cases},$$

где N=`NOBS+NPAD` и $\hat{\mu}_X$=`XCNTR` определяется как

$$\hat{\mu}_X = \begin{cases} \mu_X & \mu_X \text{ known} \\ \overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_t & \mu_X \text{ unknown} \end{cases}.$$

Аналогично, пусть $\{\widetilde{Y}_t\}$ для $t = 1;2;\ldots;N$ представляет центрированные и дополненные нулями данные

$$\widetilde{Y}_t = \begin{cases} Y_t - \hat{\mu}_Y & t = 1;2;\ldots;n \\ 0 & t = n+1;\ldots;N \end{cases},$$

где $\hat{\mu}_Y$=`YCNTR` определяется как

$$\hat{\mu}_Y = \begin{cases} \mu_Y & \mu_Y \text{ known} \\ \overline{Y} = \dfrac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} Y_t & \mu_Y \text{ unknown} \end{cases}.$$

Модифицированная периодограмма $\{\widetilde{X}_t\}$ для $t = 1;2;\ldots;N$, оценивается как

$$I_{n,N,\widetilde{X}}(\omega_k) = A_{\widetilde{X}}^2(\omega_k) + B_{\widetilde{X}}^2(\omega_k),$$

где $A_{\widetilde{X}}(\omega_k) = K^{1/2}\sum_{t=1}^{N}\widetilde{X}_t\cos(\omega_k t)$ и $B_{\widetilde{X}}(\omega_k) = K^{1/2}\sum_{t=1}^{N}\widetilde{X}_t\sin(\omega_k t)$ представляют косинус- и синус-преобразования $\widetilde{X}_t$ соответственно, и K – масштабный фактор, равный $1/(2\pi n)$.

Модифицированная периодограмма $\{\widetilde{Y}_t\}$ для $t = 1;2;\ldots;N$, оценивается

$$I_{n,N,\widetilde{Y}}(\omega_k) = A_{\widetilde{Y}}^2(\omega_k) + B_{\widetilde{Y}}^2(\omega_k),$$

где $A_{\widetilde{Y}}(\omega_k) = K^{1/2}\sum_{t=1}^{N}\widetilde{Y}_t\cos(\omega_k t)$ и $B_{\widetilde{Y}}(\omega_k) = K^{1/2}\sum_{t=1}^{N}\widetilde{Y}_t\sin(\omega_k t)$ представляют косинус- и синус-преобразования $\widetilde{Y}_t$ соответственно. Поскольку периодограмма – чётная функция частоты, то достаточно оценить периодограмму на дискретном множестве неотрицательных частот

$$\omega_k = 2\pi k/N,\ k = 0;1;\ldots;\lfloor N/2\rfloor.$$

Процедура PFFT используется, чтобы вычислить обе периодограммы $\{\widetilde{X}_t\}$ и $\{\widetilde{Y}_t\}$.

Вычислительная формула кросс-периодограммы дается как

$$I_{n,N,\widetilde{X}\widetilde{Y}}(\omega_k) = \mathrm{Re}\left[I_{n,N,\widetilde{X}\widetilde{Y}}(\omega_k)\right] + i\,\mathrm{Im}\left[I_{n,N,\widetilde{X}\widetilde{Y}}(\omega_k)\right],$$

где $\mathrm{Re}\left[I_{n,N,\widetilde{X}\widetilde{Y}}(\omega_k)\right] = A_{\widetilde{X}}(\omega_k)A_{\widetilde{Y}}(\omega_k) + B_{\widetilde{X}}(\omega_k)B_{\widetilde{Y}}(\omega_k)$

и $\mathrm{Im}\left[I_{n,N,\widetilde{X}\widetilde{Y}}(\omega_k)\right] = A_{\widetilde{X}}(\omega_k)B_{\widetilde{Y}}(\omega_k) - B_{\widetilde{X}}(\omega_k)A_{\widetilde{Y}}(\omega_k)$.

Процедура CPFFT используется, чтобы вычислить модифицированную кросс-периодограмму между $\{\widetilde{X}_t\}$ и $\{\widetilde{Y}_t\}$.

Ненормализованная спектральная плотность $\{X_t\}$ оценивается как

$$\hat{h}_X(\omega) = \sum_j w_j I_{n,N,\widetilde{X}}(\omega_{k,j})$$

и ненормализованная спектральная плотность $\{Y_t\}$ оценивается как

$$\hat{h}_X(\omega) = \sum_j w_j I_{n,N,\widetilde{X}}(\omega_{k,j}),$$

где $\omega_{k,j} = 2\pi(k(\omega) + j)/N$ и $k(\omega)$ – целое такое, что $\omega_{k,0}$ ближайшее к ω. Последовательность m=NWT весов $\{w_j\}$ для $j = -\lfloor m/2 \rfloor;\ldots;(m - \lfloor m/2 \rfloor - 1)$ удовлетворяет $\sum_j w_j = 1$. Эти веса фиксированы, так что они не зависят от частоты, для которой оценивается спектральная плотность. Обычно m нечётное с симметрией весов около среднего веса ω_0. Если m чётное, вес правее середины рассматривается как ω_0. Аргумент WT может содержать относительные веса, поскольку они нормализуются, чтобы в сумме быть равными единице, при действующем вычислении. В формулах спектральной плотности выше данные $\{X_t\}$ и $\{Y_t\}$ соответствуют реализации бивариантного стационарного процесса с дискретным параметром, наблюдаемого последовательно во времени. В этом случае, наблюдения равно разделены во времени с интервалом Δt=TINT, равным единице. Однако, если данные соответствуют реализации бивариантного стационарного процесса с непрерывным параметром, записанные с равными интервалами времени, тогда оценки спектральной плотности должны быть скорректированы с учетом эффекта наложения. В общем случае, оценка $\hat{h}_X(\omega)$ дается $\hat{h}_X(\omega) = \Delta t \hat{h}_X(\omega)$, $|\omega| \le \pi/\Delta t$ и оценка $\hat{h}_Y(\omega)$ дается $\hat{h}_Y(\omega) = \Delta t \hat{h}_Y(\omega)$, $|\omega| \le \pi/\Delta t$. Ненормализованная спектральная плотность оценивается на множестве частот $\omega = f_i$, $i = 1;2;\ldots;n_f$, где n_f=NF. Эти частоты – в масштабе, специфицируемом аргументом IFSCAL, но преобразуются к масштабу радианов в единицу времени для вычислительных назначений. Частота ω желаемой спектральной оценки принимается, чтобы быть введённой в форму, уже скорректированную для интервала времени Δt. Функция кросс-спектральной плотности в общем случае комплексно-значная и может быть записана в следующей форме:

$$h_{XY}(\omega) = c_{XY}(\omega) - iq_{XY}(\omega).$$

Коспектр (*cospectrum*) оценивается как

$$\hat{c}_{XY}(\omega) = \sum_j w_j \operatorname{Re}\left[I_{n,N,\widetilde{X}\widetilde{Y}}(\omega_{k,j})\right],$$

и спектр квадратур (*quadrature spectrum*) оценивается как

$$\hat{q}_{XY}(\omega) = \sum_j w_j \operatorname{Im}\left[I_{n,N,\widetilde{X}\widetilde{Y}}(\omega_{k,j})\right].$$

Чтобы оценить $\hat{c}_{XY}(\omega)$ и $\hat{q}_{XY}(\omega)$, заметим, что используется такая же последовательность весов, что используется, чтобы оценить $\hat{h}_X(\omega)$ и $\hat{h}_Y(\omega)$.

Оценка ненормализованной кросс-спектральной плотности вычисляется на таком же множестве частот, что и оценки ненормализованных спектральных плотностей с аналогичной коррекцией для Δt. Эквивалентное представление $h_{XY}(\omega)$ в полярной форме определяется как

$$h_{XY}(\omega) = \alpha_{XY}(\omega)\exp(i\phi_{XY}(\omega)).$$

Кросс-амплитудный спектр (*cross-amplitude spectrum*) оценивается как

$$\hat{\alpha}_{XY}(\omega) = \left(\hat{c}_{XY}^2(\omega) + \hat{q}_{XY}^2(\omega)\right)^{1/2},$$

и фазовый спектр (*phase spectrum*) оценивается как

$$\hat{\phi}_{XY}(\omega) = \arctan\left(-\hat{q}_{XY}(\omega)/\hat{c}_{XY}(\omega)\right).$$

Наконец, спектр когерентности (*coherency spectrum*) оценивается как

$$\left|\hat{w}_{XY}(\omega)\right| = \left(\frac{\hat{c}_{XY}^2(\omega) + \hat{q}_{XY}^2(\omega)}{\hat{h}_X(\omega)\hat{h}_Y(\omega)}\right)^{1/2}.$$

Выводится когерентность или квадрат когерентности.

Использование последовательности весов в кросс-периодограмме (процедура CSWEP)

Процедура CSWEP оценивает, используя фиксированную последовательность весов, ненормализованную функцию кросс-спектральной плотности двух совместно стационарных временных рядов, заданных модифицированной кросс-периодограммой и спектральными плотностями предварительно центрированных и дополненных нулями данных $\{\widetilde{X}_t\}$ и $\{\widetilde{Y}_t\}$ для $t = 1;2;\ldots;N$.

Процедура CPFFT может быть использована, чтобы рассчитать модифицированные периодограммы $I_{N,\widetilde{X}}(\omega_k)$ и $I_{N,\widetilde{Y}}(\omega_k)$, и кросс-периодограмму $I_{N,\widetilde{X}\widetilde{Y}}(\omega_k)$ на дискретном множестве неотрицательных частот

$$\omega_k = 2\pi k/N,\ k = 0;1;\ldots;\lfloor N/2\rfloor$$

(здесь $\lfloor a\rfloor$ означает наибольшее целое, не превосходящее a). Или процедура SSWP, или процедура SWEP могут быть применены к периодограммам, чтобы получить оценки ненормализованной спектральной плотности $\hat{h}_X(\omega)$ и $\hat{h}_Y(\omega)$ на множестве частот $\omega = f_i$, $i = 1;2;\ldots;n_f$, где n_f=`NF`. Эти частоты – в масштабе радиан в единицу времени. Выборочный временной интервал Δt принимается равным единице. Заметим, что спектральное окно или весовая последовательность, используемые, чтобы рассчитать $\hat{h}_X(\omega)$, могут отличаться от используемых, чтобы рассчитать $\hat{h}_Y(\omega)$.

Функция кросс-спектральной плотности в общем случае комплексно-значная и может быть записана в следующей форме:

$$h_{XY}(\omega) = c_{XY}(\omega) - iq_{XY}(\omega).$$

Коспектр (*cospectrum*) оценивается как

$$\hat{c}_{XY}(\omega) = \sum_j w_j \operatorname{Re}\left[I_{n,N,\widetilde{X}\widetilde{Y}}(\omega_{k,j})\right],$$

и спектр квадратур (*quadrature spectrum*) оценивается как

$$\hat{q}_{XY}(\omega) = \sum_j w_j \operatorname{Im}\left[I_{n,N,\widetilde{X}\widetilde{Y}}(\omega_{k,j})\right],$$

где $\omega_{k,j} = 2\pi(k(\omega) + j)/N$ и $k(\omega)$ – целое такое, что $\omega_{k,0}$ ближайшее к ω. Последовательность m=`NWT` весов $\{w_j\}$ для $j = -\lfloor m/2\rfloor;\ldots;(m - \lfloor m/2\rfloor - 1)$ удовлетворяет $\sum_j w_j = 1$. Эти веса фиксированы, так что они не зависят от частоты, для которой оценивается спектральная плотность $\hat{h}_{XY}(\omega)$. Обычно m нечётное с симметрией весов около среднего веса ω_0. Если m чётное, вес правее середины рассматривается как ω_0. Аргумент `WT` может содержать относительные веса, поскольку они нормализуются, чтобы в сумме быть равными единице, при действующем вычислении. Оценка ненормализованной кросс-спектральной плотности рассчитывается на таком же множестве частот, что и оценки ненормализованных спектральных плотностей. Однако, частная весовая последовательность, используемая, чтобы рассчитать $\hat{h}_{XY}(\omega)$, может не соответствовать ни весовой последовательности, ни спектральному окну, использованным, чтобы рассчитать или $\hat{h}_X(\omega)$, или $\hat{h}_Y(\omega)$.

Эквивалентное представление $h_{XY}(\omega)$ в полярной форме определяется как

$$h_{XY}(\omega) = \alpha_{XY}(\omega)\exp(i\phi_{XY}(\omega)).$$

Кросс-амплитудный спектр (*cross-amplitude spectrum*) оценивается как

$$\hat{\alpha}_{XY}(\omega) = \left(\hat{c}_{XY}^2(\omega) + \hat{q}_{XY}^2(\omega)\right)^{1/2},$$

и фазовый спектр (*phase spectrum*) оценивается как

$$\hat{\phi}_{XY}(\omega) = \arctan\left(-\hat{q}_{XY}(\omega)/\hat{c}_{XY}(\omega)\right).$$

Наконец, спектр когерентности (*coherency spectrum*) оценивается как

$$\left|\hat{w}_{XY}(\omega)\right| = \left(\frac{\hat{c}_{XY}^2(\omega) + \hat{q}_{XY}^2(\omega)}{\hat{h}_X(\omega)\hat{h}_Y(\omega)}\right)^{1/2}.$$

Выводится когерентность или квадрат когерентности.