МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ (ДОМАШНЕЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ)

Методические указания в целом предполагают рекомендации по выполнению домашней работы для студентов дневного отделения и домашнего задания (контрольной работы) для студентов заочного отделения.

Домашняя (контрольная) работа предполагает решение задач по всем темам курса.

Студенты очной формы обучения выполняют домашнюю работу в соответствии с заданием преподавателя по мере изучения соответствующих тем.

Домашнее задание (контрольная работа) представляет собой письменную работу, позволяющую определить степень усвоения знаний, приобретенных студентом в ходе самостоятельной подготовки.

При выполнении задания следует строго придерживаться следующих правил:

1. Работу следует выполнять ***в отдельной тетради*** чернилами синего или черного цвета, оставляя поля для замечаний.
2. На обложке тетради ***обязателен титульный лист***, оформленный следующим образом:

Ростовский государственный экономический университет (РИНХ)

Кафедра математической статистики, эконометрики и актуарных расчетов

Домашнее задание по теории вероятностей и математической статистике

Вариант №

Выполнил: студент (ФИО)
Группа №
Зачетная книжка №
Факультет
Проверил:

3. Перед решением каждой задачи надо ***полностью выписывать*** ее условие.
4. Решать задачи необходимо по порядку. Решение задач нужно ***излагать подробно и аккуратно***, ***объясняя все действия и указывая правила и формулы***, использованные при решении каждой задачи.
5. Все искомые величины при расчетах нужно вычислять ***с точностью до четырех цифр после запятой.***
6. Студент должен ***уметь решать задачи, аналогичные*** задачам, входящим в его домашнее задание.
7. Вариант выбирается ***по последней цифре зачетной книжки***. В случае если последняя цифра ноль, решается 10 вариант.
8. Домашние задания (контрольные работы), ***выполненные не по своему варианту не проверяются и к зачету не допускаются.***

Решение домашнего задания предполагает решение 16 задач по 8 темам курса. Номера задач выбираются в соответствии с вариантом и следующей таблицей:

Вариант	***Тема 1***	***Тема 2***	***Тема 3***	***Тема 4***	***Тема 5***	***Тема 6***	***Тема 7***	***Тема 8***
Первый	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11
Второй	2,12	2,12	2,12	2,12	2,12	2,12	2,12	2,12
Третий	3,13	3,13	3,13	3,13	3,13	3,13	3,13	3,13
Четвертый	4,14	4,14	4,14	4,14	4,14	4,14	4,14	4,14
Пятый	5,15	5,15	5,15	5,15	5,15	5,15	5,15	5,15
Шестой	6,16	6,16	6,16	6,16	6,16	6,16	6,16	6,16
Седьмой	7,17	7,17	7,17	7,17	7,17	7,17	7,17	7,17
Восьмой	8,18	8,18	8,18	8,18	8,18	8,18	8,18	8,18
Девятый	9,19	9,19	9,19	9,19	9,19	9,19	9,19	9,19
Десятый	10,20	10,20	10,20	10,20	10,20	10,20	10,20	10,20

Тема 1.ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Пример 1.1. Правление коммерческого банка выбирает из 10 кандидатов трех человек на *различные* должности (все 10 кандидатов имеют равные шансы). Сколько всевозможных групп состоящих из трех человек, можно составить из 10 кандидатов?

Решение. В условии задачи речь идет о расчете числа комбинаций из 10 элементов по 3. Так как группы по 3 человека могут отличаться и составом претендентов, и заполняемыми ими вакансиями, т.е. порядком, то для ответа на пункт а) необходимо рассчитать число размещений из 10 элементов по 3.

$$N = A_{10}^{3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

Ответ. Из 10 человек можно составить 720 различных групп, состоящих из трех человек.

Пример 1.2. Изменим условие примера 1.1. Правление коммерческого банка выбирает из 10 кандидатов трех человек на три различные должности, Предположим, что один и тот же отобранный из 10 претендентов кандидат, может занять не только одну, но и 2, и даже все 3 *различные* вакантные должности. Сколько в этом случае возможно комбинаций замещения трех вакантных должностей?

Решение. Как и в предыдущей задаче комбинации замещения вакантных должностей могут отличаться и составом претендентов, и заполняемыми ими вакансиями, т.е. порядком. Следовательно, и в этом случае для ответа на вопрос задачи необходимо рассчитать число размещений. Однако, на этот раз, вакантные должности могут замещаться одним и тем же претендентом, а, значит, здесь речь идет о расчете числа размещений с повторениями.

По условию задачи n = 10, m = 3.

Следовательно:

$$A_{10}^{3}\ _{(\text{с повт.})} = 10^{3} = 1000.$$

Ответ. Можно составить 1000 комбинаций замещения 3 различных вакантных должностей.

Пример 1.3. Правление коммерческого банка выбирает из 10 кандидатов трех человек на *одинаковые* должности (все 10 кандидатов имеют равные шансы). Сколько всевозможных групп по три человека можно составить из 10 кандидатов?

Решение. Состав различных групп должен отличаться, по крайней мере, хотя бы одним кандидатом и порядок выбора кандидата не имеет значения, следовательно, этот вид соединений представляет собой сочетания. По условию задачи n = 10? M = 3. Подставив данные в формулу (1.4.2), получаем

$$C_{10}^{3} = 10!/3!7! = 120$$

Ответ. Можно составить 120 групп из 10 человек по 3.

Пример 1.4. Сколькими способами можно выбрать 6 пирожных в кондитерской, где есть 4 разных сорта пирожных?

Решение.

$$N = \left(C_{4}^{6}\right)_{\text{с повт.}} = C_{4+6-1}^{6} = C_{9}^{6} = 84,$$

где m>n.

Ответ. Существует 84 различных способа выбора пирожных.

Пример 1.5. Менеджер ежедневно просматривает 6 изданий экономического содержания. Если порядок просмотра изданий случаен, то сколько существует способов его осуществления?

Решение. Способы просмотра изданий различаются только порядком, так как число, а, значит, и состав изданий при каждом способе - неизменны. Следовательно, при решении этой задачи необходимо рассчитать число перестановок.

По условию задачи n = 6.

Следовательно:

$$P_n = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

Ответ. Издания можно просмотреть издания 720 способами.

Пример 1.6. Каким числом способов можно разделить $m + n + s$ предметов на три группы, чтобы в одной группе было m предметов, в другой - n предметов, в третьей - s предметов?

Решение.

$$N = (P_{m+n+s})_{\text{с повт.}} = \frac{(m+n+s)!}{m!\cdot n!\cdot s!}$$

Ответ: $N = (P_{m+n+s})_{\text{с повт.}} = \dfrac{(m+n+s)!}{m!\cdot n!\cdot s!}$

Задачи к теме 1 «Комбинаторика».

1. Для разгрузки поступивших товаров менеджеру требуется выделить 4 из 15 имеющихся рабочих. Сколькими способами можно это сделать, осуществляя отбор в случайном порядке?

2. Сколько существует способов составления в случайном порядке списка из 5 кандидатов для выбора на руководящую должность?

3. Руководством риэлтерской фирмы принято решение о необходимости рекламы нового вида услуг. По расчетам отдела рекламы, выделенных средств хватит для того, чтобы поместить объявления только в 7 из 12 городских газет. Сколько существует способов случайного отбора газет для размещения рекламы?

4. Менеджер по персоналу рассматривает кандидатуры 7 человек, подавших заявления о приеме на работу на должность бухгалтера. Сколько существует способов приглашения кандидатов на собеседование в случайном порядке?

5. Расписание одного дня занятий на II курсе состоит из трех пар. В течение семестра студенты изучают 12 дисциплин. Сколько существует вариантов составления расписания занятий на один из дней недели, если в течение дня проводятся занятия по разным дисциплинам?

6. Покупая карточку лотереи “Спортлото”, игрок должен зачеркнуть 5 из 36 возможных чисел от 1 до 36. Если при розыгрыше тиража лотереи он угадает все 5 чисел, то имеет шанс выиграть значительную сумму денег. Сколько возможных комбинаций можно составить из 36 по 5, если порядок чисел безразличен?

7. а) Сколько различных «слов», каждое из которых содержит 6 букв, можно составить из слова «экспертиза»? б) Сколько различных «слов», каждое из которых содержит 10 букв, можно составить из слова «экспертиза»?

8. Распределение пар в первом круге Уимблдонского турнира проводится методом жеребьевки. Сколько комбинаций пар возможно составить, если в турнире участвуют 20 теннисисток?

9. Администрация города объявила тендер на строительство медицинского центра. В конкурсную комиссию поступило 8 запечатанных пакетов со сметами от различных строительных фирм. Сколько существует способов очередности вскрытия пакетов, если они вскрываются конкурсной комиссией в случайном порядке после окончания срока подачи заявок?

10. Для обнаружения нефти на участке необходимо пробурить до 11 скважин. Однако, компания имеет средства для бурения только 6 скважин. Сколько способов отбора шести различных скважин у компании?

11. В Российской Федерации номерной знак автомобиля каждого региона состоит из трех букв и трех цифр. Чему равно общее число возможных номерных знаков региона, если, для его составления используется 12 букв русского алфавита и 10 цифр. Рассмотрите два случая, когда: а) цифры и буквы в номере не повторяются; б) если повторяются?

12. В финале конкурса телевизионных программ по трем номинациям представлены 9 региональных телерадиокомпаний. Сколько существует вариантов распределения призов, если каждая телерадиокомпания может получить призы по нескольким номинациям и по каждой номинации установлены: а) одинаковые призы? б) различные призы?

13. PIN – код пластиковой карты состоит из 4 цифр. Сколько всевозможных комбинаций PIN – кода существует, если: а) цифры в коде не повторяются? б) повторяются?

14. Издательство планирует выпустить в текущем году 6 различных учебников по статистике. Каким количеством способов можно выбрать 30 экземляров, если в библиотеке университета должны быть представлены все виды изданных учебников по статистике?

15. Сколько различных «слов» можно составить из букв слова «колокол»?

16. Код банковского сейфа состоит из 8 цифр. Сколько можно составить различных кодовых комбинаций, если: а) цифры не повторяются? б) цифры повторяются?

17. В мореплавании принято давать сигналы, используя разноцветные флаги. Сколько сигналов можно составить, используя одновременно 8 флагов, из которых 1 красный, 2 синих, 3 зелёных и 2 белых?

18. Фирма планирует приобрести путевки для отдыха 25 сотрудников. Сколько существует вариантов приобретения путевок, если: а) контракт будет заключен с четырьмя пансионатами? б) с двумя пансионатами?

19. Компьютерный ключ к антивирусной программе состоит из 9 цифр. Сколько существует различных вариантов компьютерных ключей, если: а) цифры ключа не повторяются? б) цифры ключа повторяются?

20. В парфюмерном магазине имеется 5 различных косметических наборов. Фирме необходимо приобрести 18 подарков к празднику. Сколько в таком случае существует вариантов выбора подарков?

Тема 2.ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Пример 2.1 Магазин в целях рекламы нового товара проводит лотерею, в которой 1 главный приз, 5 вторых призов, 100 третьих призов и 1000 четвертых призов. В конце рекламного дня выяснилось, что лотерейные билеты получили 10000 покупателей. По правилам розыгрыша, после извлечения выигрышного билета он не возвращается в урну, и покупатель не может получить более одного выигрыша. Чему равна вероятность того, что покупатель, который приобрел рекламируемый товар: а) выиграет первый приз; б) выиграет хотя бы один приз; в) не выиграет ни одного приза?

Решение. Определим событие *А*: «Покупатель выиграл первый приз». Согласно условию задачи в лотерее участвовало 10000 покупателей, отсюда общее число испытаний N = 10000, а число исходов, благоприятствующих событию *А,* M = 1. Все исходы являются равновозможными, единственно возможными и несовместными элементарными событиями. Следовательно, по формуле классической вероятности: P (A)=0,0001

Соответственно, определим событие *В*: «Покупатель выиграл любой приз». Для этого события число благоприятствующих исходов M = 1 + 5 + 100 + 1000 = 1106.

$$P(B) = \frac{M}{N} = \frac{1106}{10000} = 0.1106\,.$$

Событие «Покупатель не выиграет ни одного приза» - противоположное событию *В*: «Покупатель выиграет хотя бы один приз», поэтому обозначим его как $\overline{B}$. По формуле 2.3 найдем:

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}1106 = 0{,}8894\,.$$

Ответ. Вероятность того, что покупатель выиграет первый приз, равна 0,0001; любой приз - 0,1106; ни одного приза - 0,8894.

Пример 2.2. Структура занятых в региональном отделении крупного банка имеет следующий вид:

	Женщины	Мужчины
Администрация	25	15
Операционисты	35	25

Если один из служащих выбран случайным образом, то какова вероятность, что он: 1. Мужчина-администратор? 2. Женщина-операционист? 3. Мужчина? 4. Операционист?

Решение.

1. В банке работают 100 человек, N = 100. Из них 15 – мужчины-администраторы, M = 15. Следовательно,

$$P(\text{мужчина - администратор}) = \frac{15}{100} = 0{,}15.$$

2. 35 служащих в банке – женщины-операционисты, следовательно,

$$P(\text{женщина - операционист}) = \frac{35}{100} = 0{,}35.$$

3. 40 служащих в банке – мужчины, следовательно,

$$P(\text{мужчина}) = \frac{40}{100} = 0{,}40.$$

4. Из общего числа служащих в банке 60 – операционисты, следовательно,

$$P(\text{операционист}) = \frac{60}{100} = 0{,}60.$$

Ответ. Вероятность того, что один из служащих: 1. мужчина - администратор – 0,15; 2. женщина - операционист - 0,35; 3. мужчина - 0,40; 4. операционист - 0,60.

Пример 2.3 Компания производит 40000 холодильников в год, которые реализуются в различных регионах России. Из них 10000 экспортируются в страны СНГ, 8000 продаются в регионах Европейской части России, 7000 продаются в страны дальнего зарубежья, 6000 в Западной Сибири, 5000 в Восточной Сибири, 4000 в Дальневосточном районе. Чему равна вероятность того, что определенный холодильник будет: 1. Произведен на экспорт? 2. Продан в России?

Решение. Обозначим события:

A – «Холодильник будет продан в странах СНГ»,

B – «Холодильник будет продан в Европейской части России»,

C – «Холодильник будет продан в страны дальнего зарубежья»,

D – «Холодильник будет продан в Западной Сибири»,

E – «Холодильник будет продан в Восточной Сибири»,

F – «Холодильник будет продан в Дальневосточном районе».

Соответственно,

Вероятность того, что холодильник будет продан в странах СНГ:

P(A) = 10000/40000 =0,25.

Вероятность того, что холодильник будет продан в Европейской части России:

P(B) = 8000/40000 = 0,20.

Вероятность того, что холодильник будет продан в страны дальнего зарубежья:

P(C) = 7000/40000 = 0,175.

Вероятность того, что холодильник будет продан в Западной Сибири:

P(D) = 6000/40000 = 0,15.

Вероятность того, что холодильник будет продан в Восточной Сибири:

P(E) = 5000/40000 = 0,125.

Вероятность того, что холодильник будет продан на Дальнем Востоке:

P(F) = 4000/40000 = 0,10.

События A, B, C, D, E, F – несовместные.

1.Событие, состоящее в том, что холодильник произведен на экспорт, означает, что холодильник будет продан или в страны СНГ, или страны дальнего зарубежья. Отсюда, по формуле (2.5) находим его вероятность: P(холодильник произведен на экспорт) = P(A + B) = P(A) + P(B) = 0,25 + 0,175 = 0,425.

2. Событие, состоящее в том, что холодильник будет продан в России, означает, что холодильник будет продан или в Европейской части России, или в Западной Сибири, или в Восточной Сибири, или на Дальнем Востоке. Отсюда, по формуле (2.6) находим его вероятность:

P(холодильник будет продан в России) = P(A + D + E + F) = P(B) + P(D) + P(E) + P(F) = 0,20 + 0,15 + 0,125 + 0,10 = 0,575.

Этот же результат можно было получить рассуждая по другому. События «Холодильник произведен на экспорт» и «Холодильник будет продан в России» – два взаимно противоположных события, отсюда по формуле (2. 3):

P(холодильник будет продан в России) = 1 - P(холодильник произведен на экспорт) = 1 – 0,425 = = 0,575.

Ответ: 1. P(холодильник произведен на экспорт) = 0,425, 2. P(холодильник будет продан в России) == 0,575.

Пример 2.4 Опыт состоит в случайном извлечении карты из колоды в 52 карты. Чему равна вероятность того, что это будет или туз, или карта масти треф?

Решение. Определим события: A - “извлечение туза”, B - “извлечение карты трефовой масти”. Вероятность извлечения туза из колоды карт P(A) = 4/52; вероятность извлечения карты трефовой масти - P(B) = 13/52; вероятность их пересечения - извлечение трефового туза – P(AB) = 1/52.

Проиллюстрируем это на рисунке.

Рис. 2.4

События А и В - совместные, поскольку в колоде есть трефовый туз.

Согласно условию задачи, нас интересует вероятность суммы совместных событий А и В. По формуле 2.4 получим:

$P(A + B) = P(A) + P(B) – P(AB) = 4/52 + 13/52 - 1/52 = 16/52 = 0{,}3077$

Ответ: Вероятность того, что случайно выбранная карта будет или туз, или масти трефа равна 0,3077.

Пример 2.5. Консультационная фирма претендует на два заказа от двух крупных корпораций. Эксперты фирмы считают, что вероятность получения консультационной работы в корпорации А равна 0,45. Эксперты также полагают, что если фирма получит заказ у корпорации А, то вероятность того, что и корпорация В обратится к ним, равна 0,9. Какова вероятность того, что консультационная фирма получит оба заказа?

Решение. Обозначим события:

А - “получение консультационной работы в корпорации А”,

В - “получение консультационной работы в корпорации В”.

События А и В - зависимые, т.к. событие В зависит от того, произойдет или нет событие А.

По условию мы имеем: $P(A) = 0{,}45$, а также знаем, что $P(B/A) = 0{,}9$.

Необходимо найти вероятность того, что оба события (и событие А, и событие В) произойдут, т.е. $P(AB)$. Для этого используем правило умножения вероятностей (формула 2.10).

Отсюда получим:

$P(A\ B) = P(A)\ P(B/A) = 0{,}45\ 0{,}9 = 0{,}405$.

Ответ. Вероятность того, что фирма получит оба заказа 0,405.

Пример 2.6. В большой рекламной фирме 21% работников получают высокую заработную плату. Известно также, что 40% работников фирмы - женщины, а 6,4% работников - женщины, получающие высокую заработную плату. Можем ли мы утверждать, что на фирме существует дискриминация женщин в оплате труда?

Решение. Сформулируем условие этой задачи в терминах теории вероятностей. Для ее решения необходимо ответить на вопрос: “Чему равняется вероятность того, что случайно выбранный работник будет женщиной, имеющей высокую заработную плату?” и сравнить ее с вероятностью того, что наудачу выбранный работник любого пола имеет высокую зарплату.

Обозначим события:

А - “случайно выбранный работник имеет высокую зарплату”;

В - “случайно выбранный работник - женщина”.

События А и В - зависимые.

По условию: $P(AB) = 0{,}064$; $P(B) = 0{,}4$; $P(A) = 0{,}21$.

Нас интересует вероятность того, что наудачу выбранный работник имеет высокую зарплату при условии, что это женщина, т.е. - условная вероятность события А.

Тогда, используя теорему умножения вероятностей, получим:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} = \frac{0{,}064}{0{,}40} = 0{,}16\,.$$

Поскольку $P(A/B)=0{,}16$ меньше, чем $P(A)=0{,}21$, то мы можем заключить, что женщины, работающие в рекламной фирме, имеют меньше шансов получить высокую заработную плату по сравнению с мужчинами.

Ответ. На фирме существует дискриминация женщин в оплате труда.

Пример 2.7. Студент пришел на экзамен, изучив только 20 из 25 вопросов программы. Экзаменатор задал студенту три вопроса. Вычислить вероятность того, что студент ответит:

1. на все три вопроса;
2. хотя бы на один вопрос.

Решение. Обозначим события:

А -“студент знает все три вопроса”;

A_1 - “студент знает первый вопрос”;

A_2 - “студент знает второй вопрос”;

A_3 - “студент знает третий вопрос”.

По условию: $P(A_1) = 20/25$; $P(A_2/A_1) = 19/24$; $P(A_3/A_2 \cdot A_1) = 18/23$.

1. Искомое событие А состоит в совместном наступлении событий A_1, A_2, A_3.

События A_1, A_2, A_3 - зависимые.

Для решения задачи используем правило умножения вероятностей конечного числа *n* зависимых событий.

$$P(A) = \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{18}{23} = \frac{57}{115} = 0{,}496$$

Вероятность того, что студент ответит на все три вопроса, равна 0,496.

2. Обозначим событие:

В -“студент ответит хотя бы на один вопрос”;

Событие В состоит в том, что произойдет или событие A_1, а события A_2 и A_3 - не произойдут, или произойдет событие A_2, а события A_1 и A_3 - не произойдут, или произойдет событие A_3, а события A_1 и A_2 - не произойдут, или произойдут события A_1 и A_2, а событие A_3 - не произойдет, или произойдут события A_1 и A_3, а событие A_2 - не произойдет, или произойдут события A_2 и A_3, а событие A_1 - не произойдет, или произойдут все три события A_1, A_2, A_3.

Для решения этой задачи можно было бы использовать правила сложения и умножения вероятностей. Однако здесь проще применить правило для вероятности наступления хотя бы одного из n зависимых событий:

Учитывая, что:

$$P(\overline{A}_1) = 1 - P(A_1) = 1 - \frac{20}{25} = \frac{5}{25};$$

$$P(\overline{A}_2/\overline{A}_1) = 1 - P(A_2/\overline{A}_1) = 1 - \frac{20}{24} = \frac{4}{24};$$

$$P(\overline{A}_3/\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2) = 1 - P(A_3/\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2) = 1 - \frac{20}{23} = \frac{3}{23},$$

получим:

$$P(B) = 1 - \frac{5}{25} \cdot \frac{4}{24} \cdot \frac{3}{23} = \frac{229}{230} \approx 0{,}9957.$$

Вероятность того, что студент ответит хотя бы на один вопрос, равна 0,9957.

Ответ. Вероятность того, что студент ответит на все три вопроса равна 0,496.

Вероятность того, что студент ответит хотя бы на один вопрос, равна 0,9957.

Пример 2.8. Вероятность того, что потребитель увидит рекламу определенного продукта по телевидению, равна 0,04. Вероятность того, что потребитель увидит рекламу того же продукта на рекламном стенде, равна 0,06. Предполагается, что оба события - независимы. Чему равна вероятность того, что потребитель увидит: 1. обе рекламы; 2. хотя бы одну рекламу?

Решение. Обозначим события:

А -“ потребитель увидит рекламу по телевидению”;

В - “потребитель увидит рекламу на стенде”.

С - “потребитель увидит хотя бы одну рекламу”. Это значит, что потребитель увидит рекламу по телевидению, или на стенде, или по телевидению и на стенде.

По условию: $P(A) = 0{,}04$; $P(B) = 0{,}06$.

События А и В - совместные и независимые.

1. Поскольку вероятность искомого события есть вероятность совместного наступления независимых событий А и В (потребитель увидит рекламу и по телевидению и на стенде), т.е. их пересечения, для решения задачи используем правило умножения вероятностей для независимых событий.

Отсюда:

$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}04 \cdot 0{,}06 = 0{,}0024$.

Вероятность того, что потребитель увидит обе рекламы, равна 0,0024.

2. Так как событие С состоит в совместном наступлении событий А и В, искомая вероятность может быть найдена с помощью правила сложения вероятностей.

$$P(C) = P(A + B)= P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}04 + 0{,}06 - 0{,}0024 = 0{,}0976.$$

Вместе с тем, при решении этой задачи может быть использовано правило о вероятности наступления хотя бы одного из n независимых событий:

Учитывая, что

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}04 = 0{,}96$ и

$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}06 = 0{,}94$,

получим: $P(C) = 1 - P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 1 - 0{,}96 \cdot 0{,}94 = 0{,}0976.$

Вычисление вероятностей событий такого типа характеризует эффективность рекламы, поскольку эта вероятность может означать долю (процент) населения, охватываемого, и отсюда следует оценка рекламных усилий.

Ответ. Вероятность того, что потребитель увидит обе рекламы равна 0,024.

Вероятность того, что потребитель увидит хотя бы одну рекламу равна 0,0976.

Задачи к теме 2 «Основные теоремы теории вероятностей».

1. Из колоды в 36 карт наудачу одна за другой извлекают две карты. Найти вероятность того, что ими окажутся: а) две дамы; б) туз и дама; в) две карты трефовой масти?

2. Вероятность того, что покупатель, собирающийся приобрести компьютер и пакет прикладных программ, приобретет только компьютер, равна 0,65. Вероятность того, что покупатель купит только пакет программ, равна 0,15. Вероятность того, что будет куплен и компьютер, и пакет программ, равна 0,35. Чему равна вероятность того, что будет куплен или компьютер, или пакет программ, или компьютер и пакет программ вместе?

3. Аудиторская фирма размещает рекламу в журнале “Коммерсант”. По оценкам фирмы 55% людей, читающих журнал, являются потенциальными клиентами фирмы. Выборочный опрос читателей журнала показал также, что 70% людей, которые читают журнал, помнят о рекламе фирмы, помещенной в конце журнала. Оцените, чему равна доля людей, которые являются потенциальными клиентами фирмы и могут вспомнить ее рекламу?

4. О двух акциях А и В известно, что они эмитированы предприятиями одной и той же отрасли. Вероятность того, что акция А поднимется завтра в цене, равна 0,25. Вероятность того, что обе акции А и В поднимутся завтра в цене, равна 0,14. Предположим, что Вы знаете, что акция А поднимется в цене завтра. Чему равна вероятность того, что и акция В завтра поднимется в цене?

5. Инвестор предполагает, что в следующем периоде вероятность роста цены акций компании N будет составлять 0,8, а компании М - 0,5. Вероятность того, что цены поднимутся на те и другие акции равна 0,4. Вычислите вероятность роста цен на акции или компании N или компании М, или обеих компаний вместе.

6. В фирме 600 работников, 420 из них имеют высшее образование, а 340 - среднее специальное образование, 286 сотрудников имеют и высшее и среднее специальное образование. Чему равна вероятность того, что случайно выбранный работник имеет или среднее специальное, или высшее образование, или и то и другое?

7. Финансовый аналитик предполагает, что, если норма (ставка) процента упадет за определенный период, то вероятность того, что рынок акций будет расти в это же время, равна 0,60. Аналитик также считает, что норма процента может упасть за этот же период с вероятностью 0,50. Используя полученную информацию, определите вероятность того, что в течение обсуждаемого периода рынок акций будет расти, а норма процента падать?

8. Для компании, занимающейся строительством терминалов для аэропортов, вероятность получить контракт в стране А, равна 0,8, вероятность выиграть его в стране В, равна 0,3.

Вероятность того, что контракты будут заключены и в стране А, и в стране В, равна 0,24. Чему равна вероятность того, что компания получит контракт хотя бы в одной стране?

9. Готовясь к зачету, студент выучил 20 из 30 вопросов программы. а) Какова вероятность того, что студент сдаст зачет, если для этого необходимо ответить на 2 случайно выбранных вопроса? Какова вероятность, что он не сдаст зачет?

10.Вероятность того, что любой из четырех паевых инвестиционных фондов покажет положительную доходность в определенном временном промежутке, оценивается равной 0,6. Чему равна вероятность того, что инвестор, имеющий паи в четырех различных фондах получит доход хотя бы по одному паю?

11. Вероятность того, что потребитель увидит рекламу определенного продукта по любому из трех центральных телевизионных каналов, равна 0,15. Предполагается, что эти события - независимы в совокупности. Чему равна вероятность того, что потребитель увидит рекламу:

а) по всем трем каналам? б) хотя бы по одному из этих каналов? в) только по одному каналу?

12. Два студента при подготовке к зачету выучили соответственно: первый – 20 из 30 вопросов программы, второй – 25 из 30 вопросов программы. Для сдачи зачета необходимо ответить на 2 случайно выбранных вопроса. Имея эту информацию определить вероятности следующих событий: а) оба студента сдадут зачет; б) или первый или второй студенты сдадут зачет; в) только один студент сдаст зачет; г) ни один студент не сдаст зачет.

13. Покупатель может приобрести акции трех компаний А, В и С. Надежность первой оценивается экспертами на уровне 90%, а второй - 80%, третьей – 70%. Чему равна вероятность того, что: а) три компании в течение года не станут банкротами? б) наступит хотя бы одно банкротство? в) только одна компания обанкротится?

14. В магазин бытовой техники поступила партия телевизоров: 20 телевизоров «Sony», 10 телевизоров «Panasonic» и 30 телевизоров «Samsung». Из партии случайным образом выбраны два телевизора для специального тестирования. Какова вероятность того, что а) один из них – телевизор «Samsung»? б) оба телевизора изготовлены одной фирмой?

15. В городе три коммерческих банка, оценка надежности, которых - 0,9, 0,7 и 0,6 соответственно. В связи с определением хозяйственных перспектив развития города администрацию интересуют ответы на следующие вопросы: а) какова вероятность того, что в течение года обанкротятся все три банка? б) не обанкротится хотя бы один банк? в) обанкротится только один банк? г) обанкротятся только два банка?

16. При покупке товаров на сумму, превышающую 500 рублей, покупателю предлагают билет беспроигрышной лотереи. В лотерее разыгрываются призы двух видов: 70 призов первого вида и 30 призов второго вида. Какова вероятность того, что первый покупатель, сделавший соответствующую покупку и получивший 3 лотерейных билета, станет обладателем: а) одинаковых призов? б) хотя бы двух призов первого вида? в) трех призов второго вида?

17. В командном зачете автогонок лидируют три команды. В случае если гоночный болид сойдет с трассы команда не получит зачетных очков. Эксперты оценивают вероятность схода болида первой команды как 0,1, второй – 0,15, третьей – 0,2. Определите вероятность того, что а) к финишу придут все болиды? б) хотя бы один болид? в) два болида сойдут с трассы?

18. В урне 12 белых, 5 красных и 3 черных шара. Наудачу вынимается три шара. Найдите вероятность того, что а) все шары будут красными? б) хотя бы один шар будет черным? в) два шара будут белыми?

19. Игральная кость бросается трижды. Определить вероятность того, что: а) хотя бы один раз выпадет 5 очков; б) три раза выпадет 6 очков; в) два раза выпадет 3 очка.

20. Строительная фирма ищет краску определенного цвета. Курьер звонит в 4 строительных магазина. Вероятность наличия необходимой краски в первом магазине равна 0,9, во втором – 0,92, в третьем – 0,8, в четвертом – 0,7. Какова вероятность того, что а) хотя бы в одном магазине окажется краска нужного цвета? б) во всех магазинах окажется краска нужного цвета? в) ни в одном магазине не окажется краски нужного цвета?

Тема 3. ФОРМУЛЫ ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ И БАЙЕСА

Пример 3.1. Предприятие, производящее компьютеры, получает одинаковые ЧИПы от двух поставщиков. Первый поставляет 65% ЧИПов, второй 35%. Известно, что качество поставляемых ЧИПов разное. Основываясь на предыдущих данных о рейтингах качества, составлена следующая таблица:

Поставщик	% качественной продукции	% брака
Поставщик 1	98	2
Поставщик 2	95	5

Предприятие осуществляет гарантийный ремонт компьютеров. Имея данные о числе компьютеров, поступающих на гарантийный ремонт в связи с неисправностью ЧИПов, переоцените вероятности того, что возвращенный для ремонта компьютер, укомплектован ЧИПом от поставщика 1, поставщика 2.

Решение задач с использованием формул полной вероятности и Байеса удобнее оформлять в виде таблицы следующего вида:

Гипотезы H_i	Априорные вероятности $P(H_i)$	Условные вероятности $P(A/H_i)$	Совместные вероятности $P(H_i \cap A)$	Апостериорные вероятности $P(H_i/A)$
1	2	3	4	5

Шаг 1. В первой колонке перечисляем события, которые задают априорную информацию в контексте решаемой проблемы.

Соб. H_1 - ЧИП от первого поставщика;

Соб. H_2 - ЧИП от второго поставщика.

Это - гипотезы и они образуют полную группу независимых и несовместных событий.

Во второй колонке записываем вероятности этих событий:

$P(H_1) = 0{,}65$, а $P(H_2) = 0{,}35$

В третьей колонке определим условные вероятности события А - «ЧИП бракованный» для каждой из гипотез.

Шаг 2. В колонке 4 находим вероятности для событий «ЧИП от первого поставщика и он бракованный» и «ЧИП от второго поставщика и он бракованный». Они определяются по правилу умножения вероятностей путем перемножения значений колонок 2 и 3. Поскольку сформулированные события являются результатом пересечения двух событий: А и Hi, то их называют совместными вероятностями, то есть $P(H_i \cap A) = P(H_i) \cdot P(A/H_i)$.

Шаг 3. Суммируем вероятности в колонке 4 для того, чтобы найти вероятность события А. В нашем примере 0,0130 - вероятность поставки некачественного ЧИПа от поставщика1, 0,0175 - вероятность поставки некачественного ЧИПа от поставщика 2. Поскольку, как мы уже сказали выше, ЧИПы поступают только от двух поставщиков, то сумма вероятностей 0,0130 и 0,0175 показывает, что 0,0305 есть вероятность бракованного ЧИПа в общей поставке, по формуле (3.1):

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i) = 0{,}0130 + 0{,}0175 = 0{,}0305$$

Шаг 4. В колонке 5 вычисляем апостериорные вероятности, используя формулу (3.2)

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}65 \cdot 0{,}02}{0{,}0305} = 0{,}426$$

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{0{,}35 \cdot 0{,}05}{0{,}0305} = 0{,}574$$

Заметим, что совместные вероятности находятся в строках колонки 4, а вероятность события А как сумма колонки 4.

Гипотезы	Априорные	Условные	Совместные	Апостериорные

H_i	вероятности $P(H_i)$	вероятности $P(A/H_i)$	вероятности $P(H_i \cap A)$	вероятности $P(H_i/A)$
1	2	3	4	5
ЧИП от 1-го поставщика	0,65	0,02	0,0130	0,426
ЧИП от 2-го поставщика	0,35	0,05	0,0175	0,574
Σ	1	-	P(A) = 0,305	1

Пример 3.2. Экономист полагает, что вероятность роста стоимости акций некоторой компании в следующем году равна 0,75, если экономика страны будет на подъёме; и эта же вероятность равна 0,30, если экономика страны не будет успешно развиваться. По его мнению, вероятность экономического подъёма в будущем году равна 0,80. Используя предположения экономиста, оцените вероятность того, что *акции компании поднимутся в цене в следующем году*?

Решение. Определим события:

А - “акции компании поднимутся в цене в будущем году”.

Событие А - “акции компании поднимутся в цене в будущем году” - может произойти только вместе с одной из гипотез:

H_1 - экономика страны будет на подъёме и

H_2 - экономика страны не будет успешно развиваться.

По условию известны вероятности гипотез:

$P(H_1) = 0,8$; $P(H_2) = 0,2$

и условные вероятности события А:

$P(A/H_1) = 0,75$; $P(A/H_2) = 0,3$.

Гипотезы образуют полную группу, сумма их вероятностей равна 1. Рассмотрим событие А - это (или H_1A или H_2A). События H_1A и H_2A - несовместные попарно, так как события H_1 и H_2 - несовместны.

События H_1 и А, H_2 и А - зависимые.

Вышеизложенное позволяет применить для определения искомой вероятности события А формулу полной вероятности:

$P(A)=P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) = 0,8 \cdot 0,75 + 0,2 \cdot 0,3 = 0,66$.

Оформим решение в рабочей таблице:

Гипотезы H_i	$P(H_i)$	$P(A/H_i)$	$P(H_i) \cdot P(A/H_i)$
H_1 - “подъем экономики”	0,80	0,75	0,60
H_2- “спад экономики”	0,20	0,30	0,06
Σ	1,00	-	0,66

Ответ. Вероятность того, что акции компании поднимутся в цене в следующем году, составляет 0,66.

Пример 3.3. Экономист полагает, что в течение периода активного экономического роста американский доллар будет расти в цене с вероятностью 0,7, в период умеренного экономического роста доллар подорожает с вероятностью 0,4 и при низких темпах экономического роста доллар подорожает с вероятностью 0,2. В течение любого периода времени вероятность активного экономического роста 0,3, умеренного экономического роста 0,5 и низкого роста - 0,2. Предположим, что доллар дорожает в течение текущего периода. Чему равна вероятность того, что анализируемый период совпал с периодом активного экономического роста?

*Решение***.** Определим события:

А - “доллар дорожает”. Оно может произойти только вместе с одной из гипотез:

H_1 - “активный экономический рост”;

H_2 - “умеренный экономический рост”;

H_3 - “низкий экономический рост”.

По условию известны доопытные (априорные) вероятности гипотез и условные вероятности события А:

$P(H_1) = 0{,}3$; $P(H_2) = 0{,}5$; $P(H_3) = 0{,}2$;

$P(A/H_1) = 0{,}7$; $P(A/H_2) = 0{,}4$ и $P(A/H_3) = 0{,}2$.

Гипотезы образуют полную группу, сумма их вероятностей равна 1. Событие А - это (или $H_1 \cdot A$ или $H_2 \cdot A$ или $H_3 \cdot A$). События $H_1 \cdot A$, $H_2 \cdot A$ и $H_3 \cdot A$ - несовместные попарно, так как события H_1 , H_2 и H_3 - несовместны.

События H_1 и А, H_2 и А, H_3 и А - зависимые.

По условию требуется найти уточненную (послеопытную, апостериорную) вероятность первой гипотезы, т.е. необходимо найти вероятность активного экономического роста, при условии, что доллар дорожает (событие А уже произошло), то есть $P(H_1/A)$ - ?

Используя формулу Байеса (3.2) и подставляя заданные значения вероятностей, имеем:

$$P(H_1 / A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A / H_1)}{P(H_1) \cdot P(A / H_1) + P(H_2) \cdot P(A / H_2) + P(H_3) \cdot P(A / H_3)} =$$

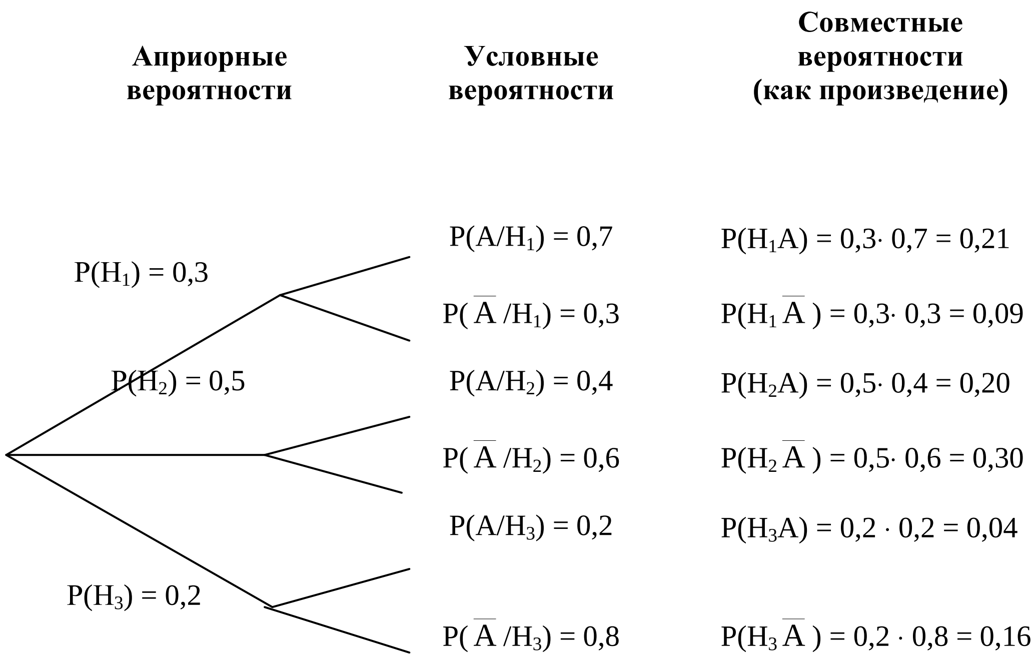
$$= \frac{0{,}3 \cdot 0{,}7}{0{,}3 \cdot 0{,}7 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 + 0{,}2 \cdot 0{,}2} = 0{,}467$$

Мы можем получить тот же результат при помощи таблицы:

Гипотезы H_i	Априорные вероятности $P(H_i)$	Условные вероятности $P(A/H_i)$	Совместные вероятности $P(A \cap H_i)$	Апостериорные вероятности $P(H_i/A)$
H_1	0,30	0,70	0,21	0,21 / 0,45 = 0,467
H_2	0,50	0,40	0,20	0,20 / 0,45 = 0,444
H_3	0,20	0,20	0,04	0,04 / 0,45 = 0,089
Σ	1,00	-	0,45	1

Ответ. Вероятность активного экономического роста, при условии, что доллар дорожает, составляет 0,467.

Для более наглядного восприятия решения нашей задачи мы можем также построить дерево решений:



Ответ. Вероятность активного экономического роста при условии, что доллар подорожает,

$P(H_i/A)$ =0,467

Пример 3.4. В каждой из двух урн содержится 6 черных и 4 белых шара. Из первой урны во вторую наудачу переложен один шар.

1. Найти вероятность того, что *шар, извлеченный из второй урны после перекладывания, окажется черным*?

2. Предположим, что шар, извлеченный из второй урны после перекладывания, оказался черным. Какова тогда вероятность того, что из *первой урны во вторую был переложен белый шар*?

Решение. Определим события:

A - “шар, извлеченный из второй урны - черный”. Оно может произойти только вместе с одной из гипотез:

H_1 - “из 1-й урны во 2-ю урну переложили черный шар” и

H_2 - “из 1-й урны во 2-ю урну переложили белый шар”.

Используя классическое определение вероятностей, определим вероятности гипотез:

$P(H_1) = 6/10$; $P(H_2) = 4/10$.

и условные вероятности события А.

После перекладывания во второй урне окажется 11 шаров. Если из первой урны во вторую переложили черный шар, то во второй урне окажется 7 черных и 4 белых шаров.

Тогда $P(A/H_1) = 7/11$.

Если из первой урны во вторую переложили белый шар, то во второй урне окажется 6 черных и 5 белых шаров.

Тогда $P(A/H_2) = 6/11$.

Гипотезы образуют полную группу, сумма их вероятностей равна 1. Рассмотрим событие А - это (или H_1A или H_2A). События H_1A и H_2A - несовместные попарно, так как события H_1 и H_2 - несовместны.

События H_1 и A, H_2 и A - зависимые.

1. Вышеизложенное позволяет применить для определения вероятности события А и ответа на первый вопрос формулу полной вероятности (3.1):

$P(A)=P(H_1)\ P(A/H_1) + P(H_2)\ P(A/H_2)=6/10\ \ 7/11 + 4/10\ \ 6/11 = 0,6$.

Это же решение можно оформить в рабочей таблице:

Гипотезы H_i	$P(H_i)$	$P(A/H_i)$	$P(H_i)\ P(A/H_i)$
H_1 - “из 1-й урны во 2-ю урну переложили черный шар”	6/10	7/11	42/110
H_2- “из 1-й урны во 2-ю урну переложили белый шар”	4/10	6/11	24/110
Σ	1,00	-	0,6

Ответ. Вероятность того, что шар, извлеченный из второй урны после перекладывания, окажется черным составляет 0,6.

2. Во второй части задачи предполагается, что событие А уже произошло, т.е. шар, извлеченный из второй урны, оказался черным. Требуется найти уточненную (послеопытную, апостериорную) вероятность второй гипотезы, т.е. необходимо найти вероятность того, что из первой урны во вторую был переложен белый шар при условии, что шар, извлеченный из второй урны после перекладывания, оказался черным.

$P(H_2/A)$ - ?

Для определения искомой вероятности воспользуемся формулой Байеса (3.2):

$$P(H_2 / A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A / H_2)}{P(A)} = \frac{4/10 \cdot 6/11}{0,6} = 0,3636$$

Мы можем получить тот же результат при помощи таблицы:

Гипотезы H_i	Априорные вероятности	Условные вероятности $P(A/H_i)$	Совместные вероятности $P(A \cap H_i)$	Апостериорные вероятности $P(H_i/A)$

	$P(H_i)$			
H_1	6/10	7/11	42/110=0,3818	0,3818/0,6 = 0,6364
H_2	4/10	6/11	24/110=0,2182	0,2182/0,6 = 0,3636
Σ	1,00	-	0,6	1

Ответ. Вероятность того, что из первой урны во вторую был переложен белый шар при условии, что шар, извлеченный из второй урны после перекладывания, оказался черным, составляет 0,3636.

Задачи к теме 3 «Формулы полной вероятности и Байеса».

1. Руководство компании выяснило, что в среднем 85% сотрудников, отправленных на стажировку по применению новых информационных технологий, успешно завершают курс обучения. В дальнейшем из них 60% активно применяют в работе полученные знания. Среди тех сотрудников, которые не смогли успешно завершить обучение новые информационные технологии успешно применяют лишь 10%. Если случайно выбранный сотрудник компании активно применяет новые информационные технологии, то какова вероятность того, что он успешно прошел стажировку?

2. Агент по недвижимости пытается продать участок земли под застройку. Он полагает, что участок будет продан в течение ближайших шести месяцев с вероятностью 0,85, если экономическая ситуация в регионе не будет ухудшаться. Если же экономическая ситуация будет ухудшаться, то вероятность продать участок составит 0,4. Экономист, консультирующий агента полагает, что с вероятностью, равной 0,6, экономическая ситуация в регионе в течение следующих шести месяцев будет ухудшаться. Чему равна вероятность того, что участок будет продан в течение ближайших шести месяцев?

3. Судоходная компания организует средиземноморские круизы в течение летнего времени и проводит несколько круизов в сезон. Поскольку в этом виде бизнеса очень высокая конкуренция, то важно, чтобы все каюты зафрахтованного под круизы корабля были полностью заняты туристами, тогда компания получит прибыль. Эксперт по туризму, нанятый компанией, предсказывает, что вероятность того, что корабль будет полон в течение сезона, равна 0,87, если доллар не подорожает по отношению к рублю, и с вероятностью - 0,64, если доллар подорожает. По оценкам экономистов, вероятность того, что в течение сезона доллар подорожает по отношению к рублю, равна 0,1. Чему равна вероятность того, что билеты на все круизы будут проданы?

4. Исследованиями маркетологов установлено, что мужчины и женщины по-разному реагируют на рекламу средств бытовой химии. Результаты исследований показали, что 64% женщин позитивно реагируют на такую рекламу, считая что она дает полезную информацию о новинках в этой сфере, в то время как 48% мужчин реагируют на подобную рекламу негативно. 12 женщин и 8 мужчин заполнили анкету, в которой оценили новую рекламу средств бытовой химии. Случайно извлеченная анкета содержит негативную реакцию. Чему равна вероятность того, что её заполняла женщина?

5. Компьютерная фирма разработала программу автоматизации учета в кафе и ресторанах. Рекламные материалы были разосланы в крупнейшие кафе и рестораны города, которые составляют 70% от общего числа предприятий питания города. Закупили программу 40% кафе и

ресторанов, которые получили рекламные материалы и 15% не получавших ее. Какова вероятность того, что случайно выбранное кафе, заказало новую программу автоматизации учета?

6. Экспортно-импортная фирма собирается заключить контракт на поставку сельскохозяйственного оборудования в одну из развивающихся стран. Если основной конкурент фирмы не станет одновременно претендовать на заключение контракта, то вероятность получения контракта оценивается в 0,55; в противном случае - в 0,35. По оценкам экспертов компании вероятность того, что конкурент выдвинет свои предложения по заключению контракта, равна 0,30. Чему равна вероятность заключения контракта?

7. Сотрудники отдела маркетинга полагают, что в ближайшее время ожидается рост спроса на продукцию фирмы. Вероятность этого они оценивают в 0,72. Консультационная фирма, занимающаяся прогнозом рыночной ситуации, подтвердила предположение о росте спроса. Положительные прогнозы консультационной фирмы сбываются с вероятностью 0,93, а отрицательные - с вероятностью 0,96. Какова вероятность того, что рост спроса действительно произойдет?

8. Из числа авиалиний некоторого аэропорта 70% - местные, 20% - по СНГ и 10% - в дальнее зарубежье. Среди пассажиров местных авиалиний 60% путешествуют по делам, связанным с бизнесом, на линиях СНГ таких пассажиров 50%, на международных - 90%. Из прибывших в аэропорт пассажиров случайно выбирается один. Чему равна вероятность того, что он бизнесмен?

9. Аудитор осуществляет проверку фирмы. В ходе работы у него накопилось 2 стопы бухгалтерских документов. В первой стопе содержит из 67 документов7 содержат ошибки, а во второй стопе из 45 документов 4 документа с ошибками. Случайно был переложен один документ из первой стопы во вторую. Какова вероятность того, что документ, извлеченный из второй стопы, содержит ошибку?

10. Компьютерная фирма продает мониторы 4 марок. При этом известно, что мониторы Sony составляют 24% от продаж, Panasonic-28%, LG – 16%, Samsung-32%. Вероятность неполадок в первый год работы для мониторов Sony составляет 0,01, Panasonic-0,02, LG – 0,03, Samsung-0,02. Какова вероятность неполадок в первый год работы случайно выбранного монитора?

11. При слиянии акционерного капитала двух фирм аналитики фирмы, получающей контрольный пакет акций, полагают, что сделка принесет успех с вероятностью равной 0,65, если председатель совета директоров поглощаемой фирмы выйдет в отставку; если он откажется, то вероятность успеха равна 0,3. Предполагается, что вероятность ухода в отставку председателя составляет 0,7. Чему равна вероятность успеха сделки?

12. На АЭС установлена система аварийной сигнализации. Когда возникает аварийная ситуация, звуковой сигнал срабатывает с вероятностью 0,999. Звуковой сигнал может сработать случайно и без аварийной ситуации с вероятностью 0,002. Реальная вероятность аварийной ситуации равна 0,004. Предположим, что звуковой сигнал сработал. Чему равна вероятность того, что это случилось в условиях реальной аварийной ситуации?

13. Нефтеразведочная экспедиция проводит исследования для определения вероятности наличия нефти на месте предполагаемого бурения скважины. Исходя из результатов предыдущих исследований, нефтеразведчики считают, что вероятность наличия нефти на проверяемом участке, равна 0,55. На завершающем этапе разведки проводится сейсмический тест, который имеет определенную степень надежности: если на проверяемом участке есть нефть, то тест укажет на нее в 92% случаев; если нефти нет, то в 14% случаев тест может ошибочно указать на ее наличие.

Сейсмический тест указал на присутствие нефти. Чему равна вероятность того, что запасы нефти на этом участке существуют реально?

14. Вероятность того, что новый товар будет пользоваться спросом на рынке, если конкурент не выпустит в продажу аналогичный продукт, равна 0,58. Вероятность того, что товар будет пользоваться спросом при наличии на рынке конкурирующего товара 0,32. Вероятность того, что конкурирующая фирма выпустит аналогичный товар на рынок в течение интересующего нас периода 0,24. Чему равна вероятность того, что товар будет иметь успех?

15. Вероятность того, что клиент банка не вернет заем в период экономического роста, равна 0,06, а в период экономического кризиса - 0,23. Предположим, вероятность того, что начнется период экономического роста, равна 0,79. Чему равна вероятность того, что случайно выбранный клиент банка не вернет полученный кредит?

16. Экономист-аналитик условно подразделяет экономическую ситуацию в стране на “хорошую”, “посредственную” и “плохую” и оценивает их вероятности для данного момента времени в 0,25, 0,60 и 0,15 соответственно. Некоторый индекс экономического состояния возрастает с вероятностью 0,7, когда ситуация “хорошая”; с вероятностью 0,2, когда ситуация “посредственная”, и с вероятностью 0,1, когда ситуация “плохая”. Пусть в настоящий момент индекс экономического состояния возрос. Чему равна вероятность того, что экономика страны на подъеме?

17. Керамическая плитка одной марки, цвета и размера выпускается двумя цехами завода: первый цех выпускает 60% плитки, а второй 40%. Причем известно, что 8% продукции первого цеха имеют дефекты, тогда как этот же показатель для второго цеха равен 5%. Случайно взятая плитка имеет дефект. Чему равна вероятность того, что она выпущена первым цехом?

18. Опрос показал, что из 26 студентов, обучающихся в первой группе 18 ростовчан, а остальные живут в других городах, во второй группе 17 студентов-ростовчан, а остальные 10 живут в других городах. Из второй группы в первую был переведен один студент. После перевода один студент первой группы был вызван в деканат и оказалось, что это студент ростовчанин. Какова вероятность того, что из второй группы в первую был переведен студент-ростовчанин?

19. Страховая компания делит , водителей, заключивших договор автокаско на следующие группы риска: 1 группа – низкий риск; 2 группа - средний; 3 группа – высокий риск. Среди клиентов страховой компании 25% - первой группы; 65% - второй группы; 10% - третьей группы. Вероятность того, что страховое событие произойдет и страховая компания будет вынуждена выплатить страховое возмещение для первой группы риска оценивается как 0,1; для второй группы – 0,2; для третьей – 0,3. Какова вероятность того, что случайно выбранный клиент, получивший страховое возмещение, относится к группе среднего риска?

20. Работа сотрудников торгового зала супермаркета организована в две смены. В первой смене работают 5 мужчин и 7 женщин, во второй смене – 9 мужчин и 10 женщин. Из второй смены в первую был переведен один сотрудник. Во время работы первой смены клиент супермаркета пригласил сотрудника торгового зала для консультации. Консультировал клиента сотрудник – мужчина. Какова вероятность того, что из второй смены в первую была переведена женщина?

Тема 4. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ.

Пример 4.1 Известно, что в определенном городе 20% горожан предпочитают добираться на работу личным автотранспортом. Случайно выбраны 4 человека.

а) Составьте ряд распределения числа людей в выборке, предпочитающих добираться на работу личным автотранспортом, и постройте его график.

б) Найдите числовые характеристики этого распределения;

в) Напишите функцию распределения числа людей в выборке, предпочитающих добираться на работу личным автотранспортом и постройте её график.

г) Чему равна вероятность того, что среди 4-х случайно отобранных человек *не будет ни одного, предпочитающего добираться на работу личным автотранспортом*?

д) Чему равна вероятность того, что среди 4-х случайно отобранных людей *окажется хотя бы один, предпочитающий добираться на работу личным автотранспортом*?

е) Чему равна вероятность того, что среди 4-х случайно отобранных человек *будет не больше двух, предпочитающих добираться на работу личным автотранспортом*?

Решение. В качестве случайной величины в данной задаче выступает число людей в выборке, предпочитающих добираться на работу личным автотранспортом. Обозначим ее через X.

Перечислим все возможные значения случайной величины X: 0, 1, 2, 3, 4.

Вероятность того, что каждый из отобранных людей предпочитает добираться на работу личным автотранспортом, - постоянна и равна 0,2 (p = 0,2). Вероятность противоположного события, т.е. того, что каждый из отобранных людей предпочитает добираться на работу не личным автотранспортом, а как-то иначе - также постоянна и составляет 0,8 (q = 1 - p = 1 0,2 = 0,8).

Все 4 испытания - независимы, т.е. вероятность того, что каждый из отобранных людей предпочитает добираться на работу личным автотранспортом, не зависит от того, каким способом предпочитает добираться на работу любой другой человек из числа случайно отобранных.

Очевидно, что случайная величина X - подчиняется биномиальному закону распределения вероятностей с параметрами n=4 и p=0,2.

Итак, по условию задачи: n = 4; p = 0,2; q = 0,8; X = m.

а) Чтобы построить ряд распределения, необходимо вычислить вероятности того, что случайная величина примет каждое из своих возможных значений и записать полученные результаты в таблицу.

Расчет искомых вероятностей осуществляется по формуле Бернулли.

$$P=\left(X=m\right)=P_{n,m}=C_n^m\cdot p^m\cdot q^{n-m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}\cdot p^m\cdot q^{n-m}$$

Подставим в эту формулу данные задачи:

$$P(X=0)=P_{4,0}=C_4^0\cdot 0{,}2^0\cdot 0{,}8^{4-0}=\frac{4!}{0!\cdot(4-0)!}\cdot 0{,}2^0\cdot 0{,}8^{4-0}=$$

$$=1\cdot 0{,}2^0\cdot 0{,}8^{4-0}=0{,}4096;$$

$$P(X=1)=P_{4,1}=C_4^1\cdot 0{,}2^1\cdot 0{,}8^{4-1}=\frac{4!}{1!\cdot(4-1)!}\cdot 0{,}2^1\cdot 0{,}8^{4-1}=$$

$$=4\cdot 0{,}2^1\cdot 0{,}8^{4-1}=0{,}4096;$$

$$P(X=2)=P_{4,2}=C_4^2\cdot 0{,}2^2\cdot 0{,}8^{4-2}=\frac{4!}{2!\cdot(4-2)!}\cdot 0{,}2^2\cdot 0{,}8^{4-2}=$$

$$=6\cdot 0{,}2^2\cdot 0{,}8^{4-2}=0{,}1536;$$

$$P(X=3)=P_{4,3}=C_4^3\cdot 0{,}2^3\cdot 0{,}8^{4-3}=\frac{4!}{3!\cdot(4-3)!}\cdot 0{,}2^3\cdot 0{,}8^{4-3}=$$

$$=4\cdot 0{,}2^3\cdot 0{,}8^{4-3}=0{,}0256;$$

$$P(X=4)=P_{4,4}=C_4^4\cdot 0{,}2^4\cdot 0{,}8^{4-4}=\frac{4!}{4!\cdot(4-4)!}\cdot 0{,}2^4\cdot 0{,}8^{4-4}=$$

$$=1\cdot 0{,}2^4\cdot 0{,}8^{4-4}=0{,}0016.$$

Получим ряд распределения числа людей в выборке, предпочитающих добираться на работу личным автотранспортом:

X	0	1	2	3	4
P	0,4096	0,4096	0,1536	0,0256	0,0016

Так как все возможные значения случайной величины образуют полную группу событий, то сумма их вероятностей должна быть равна 1.

Проверка: 0,4096 + 0,4096 + 0,1536 + 0,0256 + 0,0016 = 1.

Вместо ряда распределения дискретная случайная величина может быть задана графически многоугольником (полигоном) распределения (рис. 4.3).

Рис. 4.3.

б) Найдем основные числовые характеристики распределения данной случайной величины: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое (стандартное) отклонение.

Математическое ожидание любой дискретной случайной величины может быть рассчитано по формуле (4.4):

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = 0 \cdot 0{,}4096 + 1 \cdot 0{,}4096 + 2 \cdot 0{,}1536 + 3 \cdot 0{,}0256 + 4 \cdot 0{,}0016 = =0{,}8 \text{ (чел.)}$$

Вместе с тем, ввиду того, что в данном случае речь идет о математическом ожидании частоты, для его расчета можно воспользоваться более простой формулой (4.10):

$M(X = m) = np = 4 \cdot 0{,}2 = 0{,}8$ (чел.)

Рассчитаем дисперсию числа человек, предпочитающих добираться на работу личным автотранспортом, среди 4-х отобранных. Дисперсия любой дискретной случайной величины может быть рассчитана по формуле :

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} \left[x_i - M(X)\right]^2 \cdot p_i = (0 - 0{,}8)^2 \cdot 0{,}4096 + (1 - 0{,}8)^2 \cdot 0{,}4096 + (2 - 0{,}8)^2 \cdot 0{,}1536 + (3 - 0{,}8)^2 \cdot 0{,}0256 + (4 - 0{,}8)^2 \cdot 0{,}0016 = 0{,}64 \text{ (кв.ед)}.$$

В данном случае речь идет о дисперсии частоты, а её можно найти по формуле (4.11):

$D(X = m) = npq = 4 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}64$ (кв.ед)

Рассчитаем среднее квадратическое отклонение числа людей в выборке, предпочитающих добираться на работу личным автотранспортом. Среднее квадратическое отклонение рассчитывается по формуле:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$$

в) Дискретную случайную величину можно задать функцией распределения:

$$F(X) = P(X < x) = \sum_{\substack{i \\ x_i < x}} P(X = x_i)$$

где для каждого значения x суммируются вероятности тех значений x_i, которые лежат левее точки x.

Зададим функцию распределения дискретной случайной величины применительно к условию данной задачи:

$$F(X = m) = P(X < x) = \sum_{\substack{i \\ x_i < x}} C_4^m \cdot 0{,}2^m \cdot 0{,}8^{4-m}.$$

Для построения графика функции распределения вероятностей дискретной случайной величины необходимо рассчитать кумулятивные (накопленные) вероятности, соответствующие значениям случайной величины. Алгоритм их расчета вытекает из смысла функции распределения:

$$F(X_i) = P(X_1) + P(X_2) + \ldots + P(X_{i-2}) + P(X_{i-1})$$

Эта формула справедлива для всех F(Xi), кроме F(X0). Так как по определению функция распределения определяет вероятность того, что случайная величина примет значение, меньшее заданного, понятно, что вероятность того, что случайная величина примет значение, не более минимального, равна 0:

$$F(X_0) = 0.$$

Рассчитаем значения F(x):

$$F(x) = \begin{cases} 0 \ \text{при} \ x \le 0 \\ 0{,}4096 \ \text{при} \ 0 < x \le 1 \\ 0{,}8192 \ \text{при} \ 1 < x \le 2 \\ 0{,}9728 \ \text{при} \ 2 < x \le 3 \\ 0{,}9984 \ \text{при} \ 3 < x \le 4 \\ 1 \ \text{при} \ x > 4 \end{cases}$$

Эти данные можно представить и в виде таблицы:

X	$x \le 0$	$0 < x \le 1$	$1 < x \le 2$	$2 < x \le 3$	$3 < x \le 4$	$x > 4$
F(x)	0	0.4096	0.8192	0.9728	0.9984	1

График функции распределения вероятностей дискретной случайной величины имеет ступенчатый вид. Скачки равны вероятностям, с которыми случайная величина принимает возможные значения (рис.4.4).

График функции распределения вероятностей дискретной случайной величины

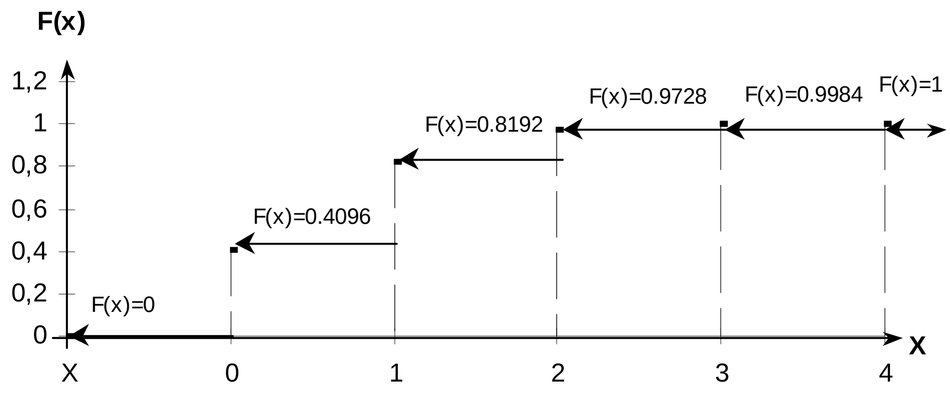


Рис. 4.4

г) Определим вероятность того, что среди 4-х случайно отобранных человек *не будет ни одного человека, предпочитающего добираться на работу личным автотранспортом.*

$P(X = 0) = 0{,}4096.$

Вероятность того, что среди 4-х случайно отобранных человек *не будет ни одного, предпочитающего добираться на работу личным автотранспортом* составляет 0,4096.

д) Определим вероятность того, что среди 4-х случайно отобранных человек *будет хотя бы один человек, предпочитающий добираться на работу личным автотранспортом.*

"Хотя бы один" - "как минимум один" - "один или больше". Другими словами, "хотя бы один" - это "или один, или два, или три, или четыре".

Исходя из этого, для определения вероятности того, что среди 4-х случайно отобранных человек будет хотя бы один, предпочитающий добираться на работу личным автотранспортом, можно использовать теорему сложения вероятностей несовместных событий:

$P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$

$P(X \geq 1) = 0{,}4096 + 0{,}1536 + 0{,}0256 + 0{,}0016 = 0{,}5904.$

С другой стороны, все возможные значения случайной величины образуют полную группу событий, а сумма их вероятностей равна 1. По отношению к событию ($X \geq 1$) до полной группы событий не хватает события ($X = 0$), которое является противоположным событию ($X \geq 1$). Поэтому искомую вероятность того, среди 4-х случайно отобранных человек будет хотя бы один, предпочитающий добираться на работу личным автотранспортом, проще найти следующим образом:

$P(X \geq 1) + P(X < 1) = 1$, откуда

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}4096 = 0{,}5904.$

Вероятность того, что среди 4-х случайно отобранных человек *будет хотя бы один человек, предпочитающий добираться на работу личным автотранспортом,* составляет 0,5904.

е) Определим вероятность того, что среди 4-х случайно отобранных человек *будет не больше двух, предпочитающих добираться на работу личным автотранспортом.*

"Не больше двух" - "два или меньше", т.е. "или ноль, или один, или два".

Используем теорему сложения вероятностей несовместных событий:

$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$P(X \leq 2) = 0{,}4096 + 0{,}4096 + 0{,}1536 = 0{,}9728.$

Вероятность того, что среди 4-х случайно отобранных человек будет не больше двух, предпочитающих добираться на работу личным автотранспортом, составляет 0,9728.

Пример 4.2 Среднее число инкассаторов, прибывающих утром на автомобиле в банк в 15-ти минутный интервал, равно 2. Прибытие инкассаторов происходит случайно и независимо друг от друга.

а) Составьте ряд распределения числа инкассаторов, прибывающих утром на автомобиле в банк в течение 15-ти минут;

б) Найдите числовые характеристики этого распределения;

в) Напишите функцию распределения числа инкассаторов, прибывающих утром на автомобиле в банк в течение 15-ти минут, и постройте её график;

г) Определите, чему равна вероятность того, что в течение 15 минут в банк прибудут на автомобиле *хотя бы два инкассатора;*

д) Определите вероятность того, что в течение 15 минут число прибывших инкассаторов окажется *меньше трех.*

Решение. Пусть случайная величина X - число инкассаторов, прибывающих утром на автомобиле в банк в течение 15-ти минут. Перечислим все возможные значения случайной величины X: 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... , n.

Это - дискретная случайная величина, т.к. ее возможные значения отличаются друг от друга не менее чем на 1, и множество ее возможных значений является счетным.

По условию прибытие инкассаторов происходит случайно и независимо друг от друга. Следовательно, мы имеем дело с независимыми испытаниями.

Если мы предположим, что вероятность прибытия инкассаторов на автомобиле одинакова в любые два периода времени равной длины, и что прибытие или неприбытие автомобиля в любой период времени не зависит от прибытия или неприбытия в любой другой период времени, то последовательность прибытия инкассаторов в банк может быть описана распределением Пуассона.

Итак, случайная величина X - число инкассаторов, прибывающих утром на автомобиле в течение 15-ти минут, подчиняется распределению Пуассона. По условию задачи: $\lambda = np = 2$; $X = m$.

а) Составим ряд распределения.

Вычислим вероятности того, что случайная величина примет каждое из своих возможных значений и запишем полученные результаты в таблицу.

Так как данная случайная величина X подчинена распределению Пуассона, расчет искомых вероятностей осуществляется по формуле Пуассона (4.13).

Найдем по этой формуле вероятность того, что в течение 15-ти минут утром на автомобиле прибудет 0 инкассаторов:

$$P(X=0)=\frac{2^0}{0!}\cdot e^{-2}=0{,}1353.$$

Однако, расчет вероятностей распределения Пуассона легче осуществлять, пользуясь специальными таблицами вероятностей распределения Пуассона. В этих таблицах содержатся значения вероятностей при заданных m и (см. Приложение 6).

По условию λ = 2, а m изменяется от 0 до n.

Воспользовавшись таблицей распределения Пуассона, получим:

P(X = 0) = 0,1353;   P(X = 1) = 0,2707;
P(X = 2) = 0,2707;   P(X = 3) = 0,1804;
P(X = 4) = 0,0902;   P(X = 5) = 0,0361;
P(X = 6) = 0,0120;   P(X = 7) = 0,0034;
P(X = 8) = 0,0009;   P(X = 9) = 0,0002.

Данных для λ = 2, и m > = 10 в таблице нет, что указывает на то, что эти вероятности составляют менее 0, 0001, т.е.

P(X = 10) ≈ 0. Понятно, что P(X = 11) еще меньше отличается от 0.

Занесем полученные результаты в таблицу:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P(X)	0,1353	0,2707	0,2707	0,1804	0,0902	0,0361	0,0120	0,0034	0,0009	0,0002	0,0000

Так как все возможные значения случайной величины образуют полную группу событий, сумма их вероятностей должна быть равна 1.

Проверим: 0,1353 + 0,2707 + 0,2707 + 0,1804 + 0,0902 + 0,0361 + 0,0120 + + 0,0034 + 0,0009 + 0,0002 = 0,9999 ≈ 1.

График, полученного ряда распределения дискретной случайной величины X – полигон распределения вероятностей:

Рис. 4.5.

б) Найдем основные числовые характеристики полученного распределения случайной величины X.

Можно рассчитать математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение по общим для любой дискретной случайной величины формулам.

Математическое ожидание случайной величины, подчиняющейся распределению Пуассона, может быть рассчитано и по формуле(4.13.):

$$M(X = m) = n \cdot p = \lambda.$$

$M(X = m) = \lambda = 2$ (инкассатора).

Для выполнения дисперсии случайной величины, подчиняющейся распределению Пуассона, можно применить формулу:

$$D(X = m) \approx \lambda.$$

Итак, дисперсия числа инкассаторов, прибывающих утром на автомобиле в течение 15-ти минут:

$D(X = m) = \lambda = 2$ (кв.ед.)

Среднее квадратическое отклонение числа инкассаторов, прибывающих утром на автомобиле в течение 15-ти минут:

$\sigma(X) = \sqrt{2} = 1{,}4142$ (инкассатора).

в)Зададим теперь дискретную случайную величину в виде функции распределения:

$$F(X = m) = P(X < x) = \sum_{\substack{i \\ x_i < x}} \frac{2^m}{m!} \cdot e^{-2}.$$

Рассчитаем значения F(x):

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0 \\ 0{,}1353 & \text{при } 0 \le x \le 1 \\ 0{,}4060 & \text{при } 1 < x \le 2 \\ 0{,}6767 & \text{при } 2 < x \le 3 \\ 0{,}8571 & \text{при } 3 < x \le 4 \\ 0{,}9473 & \text{при } 4 < x \le 5 \\ 0{,}9834 & \text{при } 5 < x \le 6 \\ 0{,}9954 & \text{при } 6 < x \le 7 \\ 0{,}9988 & \text{при } 7 < x \le 8 \\ 0{,}9997 & \text{при } 8 < x \le 9 \\ 1 & \text{при } x > 9 \end{cases}$$

Эти данные можно представить и в виде таблицы:

Таблица 4.6.

X	x ≤0	0<x≤1	1<x≤2	2<x≤3	3<x≤4	4<x≤5	5<x≤6	6<x≤7	7<x≤8	8<x≤9	x > 9
P(X)	0	0,1353	0,4060	0,6767	0,8571	0,9473	0,9834	0,9954	0,9988	0,9997	1

График функции (вероятностная гистограмма)

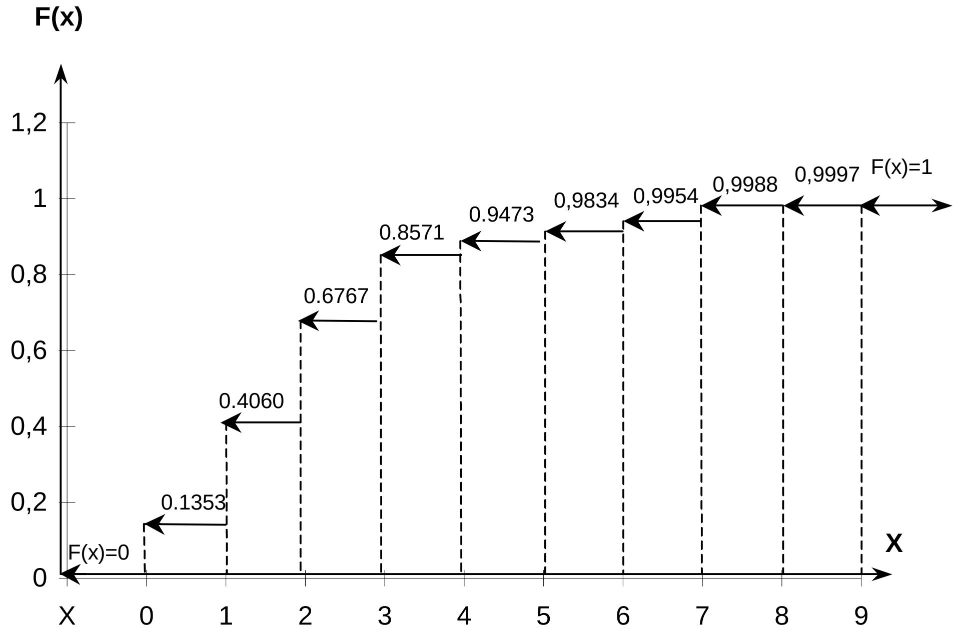


Рис. 4.6.

г) Определим вероятность того, что в течение 15 минут в банк прибудут *хотя бы два инкассатора.*

“Хотя бы два” - “как минимум два” - “два или больше”. Другими словами, “хотя бы два” - это “или два, или три, или четыре, или ...”.

Исходя из этого, для определения вероятности того, что в течение 15 минут в банк прибудут хотя бы два инкассатора, можно использовать теорему сложения вероятностей несовместных событий:

$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + ... + P(X = n)$.

С другой стороны, все возможные значения случайной величины образуют полную группу событий, а сумма их вероятностей равна 1. По отношению к событию $(X \geq 2)$ до полной группы событий не хватает события $(X < 2)$, т. е. $(x \leq 1)$, которое является противоположным событию $(X \geq 2)$. Поэтому искомую вероятность того, что в течение 15 минут в банк прибудут на автомобиле хотя бы два инкассатора, проще найти следующим образом:

$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - (P(X = 0) + P(X=1)) = 1 - (0,1353 + 0,2707) = 1 - 0,406 =$
$= 0,594$.

Вероятность того, что в течение 15 минут в банк прибудут на автомобиле хотя бы два инкассатора, составляет 0,5904.

д) Определим вероятность того, что в течение 15 минут число прибывших инкассатор окажется *меньше трех*.

“Меньше трех” - это “или ноль, или один, или два”.

Из теоремы сложения вероятностей несовместных событий следует:

$P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$.

$P(X < 3) = 0,1353 + 0,2707 + 0,2707 = 0,6767$.

Ответ. Вероятность того, что в течение 15 минут в банк прибудет меньше трех инкассаторов, составляет 0,6767.

Пример 4.3. Из 20 лотерейных билетов выигрышными являются 4. Наудачу извлекаются 4 билета.

а) Составьте ряд распределения числа выигрышных билетов среди отобранных;

б) Найдите числовые характеристики этого распределения;

в) Напишите функцию распределения числа выигрышных билетов среди отобранных и постройте ее график;

г) Определите вероятность того, что среди отобранных 4 билетов окажется *не меньше трех* выигрышных билетов;

д) Определите вероятность того, что среди отобранных 4 билетов окажется *не больше одного* выигрышного билета.

Решение. В качестве случайной величины в данной задаче выступает число выигрышных билетов среди отобранных. Обозначим ее через X.

Перечислим все возможные значения случайной величины X: 0, 1, 2, 3, 4.

Это - дискретная случайная величина, т.к. ее возможные значения отличаются друг от друга не менее чем на 1, и множество ее возможных значений является счетным.

Очевидно, что отбор лотерейных билетов - бесповторный. Следовательно, испытания - зависимые.

Вышеперечисленные признаки указывают на то, что рассматриваемая случайная величина - число выигрышных билетов среди отобранных - подчиняется гипергеометрическому закону распределения.

Изобразим ситуацию на схеме:

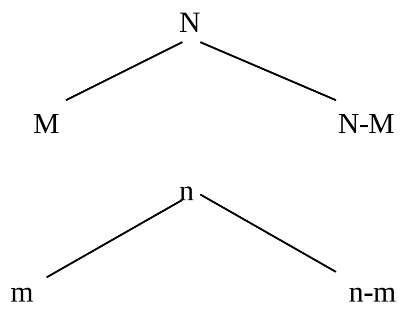


Рис. 4.7.

Случайная величина, интересующая нас, X = m - число выигрышных билетов в выборке объемом в n билетов. Число всех возможных случаев отбора n билетов из общего числа N билетов равно числу сочетаний из N по n (C_N^n), а число случаев отбора m выигрышных билетов из общего числа M выигрышных билетов (*и значит, (n-m) проигрышных из общего числа (N - M) проигрышных*) равно произведению

$C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}$ (отбор каждого из m выигрышных билетов может сочетаться с отбором любого из (n-m) проигрышных). Событие, вероятность которого мы хотим определить, состоит в том, что в выборке из n лотерейных билетов окажется ровно m выигрышных. По формуле для расчета вероятности события в классической модели вероятность получения в выборке m выигрышных билетов (то есть вероятность того, что случайная величина X примет значение m) равна:

$$P_{n,m} = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n},$$

где C_N^n - общее число всех единственно возможных, равновозможных и несовместных исходов,

$C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}$ - число исходов, благоприятствующих наступлению интересующего нас события;

$m \le n$, если $n \le M$ и $m \le M$, если $M < n$.

Если по этой формуле вычислить вероятности для всех возможных значений m и поместить их в таблицу, то получим ряд распределения.

а) Составим ряд распределения.

Вычислим вероятности того, что случайная величина примет каждое из своих возможных значений и запишем полученные результаты в таблицу.

По условию задачи N =20; M = 4; n = 4; m = 0, 1, 2, 3, 4.

$$P_{4,0} = \frac{C_4^0 \cdot C_{16}^4}{C_{20}^4} = \frac{1 \cdot \dfrac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}}{\dfrac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}} = 0{,}37564;$$

$$P_{4,1}=\frac{C_4^1\cdot C_{16}^3}{C_{20}^4}=\frac{4\cdot\dfrac{16\cdot15\cdot14}{1\cdot2\cdot3}}{\dfrac{20\cdot19\cdot18\cdot17}{1\cdot2\cdot3\cdot4}}=0{,}46233;$$

$$P_{4,2}=\frac{C_4^2\cdot C_{16}^2}{C_{20}^4}=\frac{\dfrac{4\cdot3}{1\cdot2}\cdot\dfrac{16\cdot15}{1\cdot2}}{\dfrac{20\cdot19\cdot18\cdot17}{1\cdot2\cdot3\cdot4}}=0{,}14861;$$

$$P_{4,3}=\frac{C_4^3\cdot C_{16}^1}{C_{20}^4}=\frac{4\cdot16}{\dfrac{20\cdot19\cdot18\cdot17}{1\cdot2\cdot3\cdot4}}=0{,}01321;$$

$$P_{4,4}=\frac{C_4^4\cdot C_{16}^0}{C_{20}^4}=\frac{1\cdot1}{\dfrac{20\cdot19\cdot18\cdot17}{1\cdot2\cdot3\cdot4}}=0{,}00021.$$

Занесем полученные результаты в таблицу:

Таблица 4.7.

X	0	1	2	3	4
P(X)	0,37564	0,46233	0,14861	0,01321	0,00021

Произведем проверку. Так как все возможные значения случайной величины образуют полную группу событий, сумма их вероятностей должна быть равна 1.

Проверка: 0,37564 + 0,46233 + 0,14861 + 0,01321 + 0,00021 = 1.

График полученного распределения вероятностей дискретной случайной величины - полигон распределения вероятностей; изображенный на рис 4.8

Рис. 4.8.

б) Найдем основные числовые характеристики распределения данной случайной величины.

Можно рассчитать математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение по общим для любой дискретной случайной величины формулам.

Но математическое ожидание случайной величины, подчиняющейся гипергеометрическому распределению, может быть рассчитано по более простой формуле:

$$M(X = m) = n \cdot \frac{M}{N}$$

Рассчитаем математическое ожидание числа выигрышных билетов среди отобранных:

$M(X = m) = n \cdot \frac{M}{N} = 4 \cdot \frac{4}{20} = 0{,}8$ (билета).

Дисперсию случайной величины, подчиняющейся распределению, также может быть рассчитано по более простой формуле:

$$D(X = m) = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right)$$

Вычислим дисперсию числа выигрышных билетов среди отобранных:

$$D(X = m) = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right) = 4 \cdot \frac{4}{20} \cdot \left(1 - \frac{4}{20}\right) \cdot \left(1 - \frac{4-1}{20-1}\right) =$$

$$= \frac{16}{20} \cdot \frac{16}{20} \cdot \frac{16}{19} = \frac{256}{475} = 0{,}53895.$$

D(X = m) = 0,53895 (кв.ед.).

Рассчитаем среднее квадратическое отклонение числа выигрышных билетов среди отобранных:

$\sigma(X) = \sqrt{0{,}5389} = 0{,}73413$ (билета).

в) Зададим дискретную случайную величину в виде функции распределения:

$$F(X = m) = P(X < x) = \sum_{\substack{i \\ x_i < x}} \frac{C_4^m \cdot C_{16}^{4-m}}{C_{20}^4}.$$

Рассчитаем значения F(x):

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0 \\ 0{,}37564 & \text{при } 0 < x \le 1 \\ 0{,}83797 & \text{при } 1 < x \le 2 \\ 0{,}98658 & \text{при } 2 < x \le 3 \\ 0{,}99979 & \text{при } 3 < x \le 4 \\ 1 & \text{при } x > 4 \end{cases}$$

Эти данные можно представить и в виде таблицы:

Таблица 4.8.

X	$x \le 0$	$0 < x \le 1$	$1 < x \le 2$	$2 < x \le 3$	$3 < x \le 4$	$x > 4$
F(x)	0	0,37564	0,83797	0,98658	0,99979	1

График функции распределения.

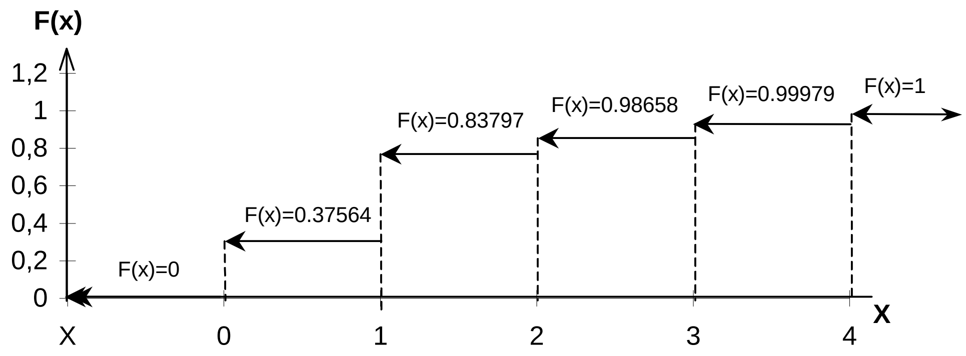


Рис. 4.9.

г) Определим вероятность того, что среди 4-х отобранных билетов окажется *не меньше трех* выигрышных.

"Не меньше трех" - "как минимум три" - "три или больше". Другими словами, "не меньше трех" - это "или три, или четыре".

Исходя из этого, для определения вероятности того, что среди отобранных 4-х билетов окажется не меньше трех выигрышных билетов, можно применить теорему сложения вероятностей несовместных событий:

$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) = 0{,}01321 + 0{,}00021 = 0{,}01342$.

Вероятность того, что среди отобранных окажется не меньше трех выигрышных билетов составляет 0,01342.

д) Определим теперь вероятность того, что среди отобранных 4-х билетов окажется *не больше одного* выигрышного билета.

"Не больше одного" - это "один или меньше" - "или ноль, или один".

Следовательно, для определения вероятности того, что среди отобранных окажется не больше одного выигрышного билета, также применяем теорему сложения вероятностей для несовместных событий:

$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}37564 + 0{,}46233 = 0{,}83797$.

Ответ. $P(X \geq 3) = 0{,}01342$; $P(X \leq 1) = 0{,}83797$.

Задачи к теме 4 «Законы распределения дискретных случайных величин».

1. Нефтеразведовательная компания получила финансирование для проведения 7 нефтеразработок. Вероятность успешной нефтеразведки 0,2. Предположим, что нефтеразведки осуществляют независимые друг от друга разведывательные партии.

а) Составьте ряд распределения числа успешных нефтеразведок и постройте его график;

б) Найдите числовые характеристики этого распределения;

в) Запишите в общем виде функцию распределения вероятностей и постройте ее график;

г) Чему равна вероятность того, что как минимум три нефтеразведки принесут успех?

2. В салоне мобильной техники представлены 4 модели телефона Samsung, 5 моделей телефона Nokia и 6 моделей телефона Motorola. В течение дня было продано 3 телефона.

а) Составьте ряд распределения числа проданных телефонов Samsung и постройте его график;

б) Найдите числовые характеристики этого распределения;

в) Запишите в общем виде функцию распределения вероятностей и постройте ее график;

г) Чему равна вероятность того, что в течение дня было продано как минимум два телефона Samsung?

3. Некоторый ресторан славится хорошей кухней. Управляющий ресторана утверждает, что в субботний вечер в течение получаса подходит в среднем 5 групп посетителей.

а) Составьте ряд распределения возможного числа групп посетителей ресторана в течение получаса; постройте его график;

б) Найдите числовые характеристики этого распределения;

в) Запишите в общем виде функцию распределения вероятностей и постройте ее график;

г) Чему равна вероятность того, что три или более групп посетителей прибудут в ресторан в течение 60-минутного промежутка времени?

4. В кредитном отделе банка работают 5 специалистов с высшим финансовым образованием и 3 специалиста с высшим юридическим образованием. Руководство банка решило направить 3 специалистов для повышения квалификации, отбирая их в случайном порядке.

а) Составьте ряд распределения числа специалистов с высшим юридическим образованием, которые могут быть направлены на повышение квалификации и постройте его график;

б) Найдите числовые характеристики этого распределения.

в) Запишите в общем виде функцию распределения вероятностей и постройте ее график;

г) Какова вероятность того, что повышать квалификацию будут не более двух специалистов с высшим юридическим образованием?

5. Для экспертной оценки качества растворимого кофе было отобрано 9 образцов разных производителей: 6 образцов фирмы Nestle и 3 образца фирмы Kraft Food. В результате проверки выяснилось, что 4 случайно выбранных образца соответствуют стандартам качества.

а) Составьте ряд распределения числа образцов продукции фирмы Nestle, среди отобранных и постройте его график;

б) Найдите числовые характеристики этого распределения;

в) Запишите в общем виде функцию распределения вероятностей и постройте ее график;

г) Чему равна вероятность того, что как минимум два образца фирмы Nestle соответствуют качеству?

6. В течение часов-пик в общественном транспорте города происходит в среднем два дорожных происшествия в час. Утреннее время пик длится полтора часа, а вечернее - два часа.

а) Составьте ряды распределения числа дорожных происшествий в утренние и вечерние часы пик и постройте их графики;

б) Найдите числовые характеристики этих распределений;

в) Запишите функции распределений вероятностей и постройте их графики;

г) Чему равна вероятность того, что в определенный день в течение и утреннего, и вечернего времени не произойдет ни одного дорожного происшествия?

7. В городе 6 коммерческих банков. У каждого риск банкротства в течение года составляет 10%.

а) Составьте ряд распределения числа банков, которые могут обанкротиться в течение следующего года; постройте его график;

б) Найдите числовые характеристики этого распределения;

в) Запишите в общем виде функцию распределения вероятностей и постройте ее график;

г) Чему равна вероятность того, что в течение года обанкротятся не больше двух банков?

8. В течение семестра преподаватели проводят консультации по вопросам, которые остались неясными для студентов. Преподаватель, проводящий консультации по статистике, заметил, что в среднем 12 студентов посещают его за час консультационного времени, хотя число студентов, посещающих консультацию в определенный день, в назначенный час, - случайная величина.

а) Составьте ряд распределения числа студентов, посещающих консультации преподавателя по статистике в течение получаса и постройте его график;

б) Найдите числовые характеристики этого распределения;

в) Запишите в общем виде функцию распределения вероятностей и постройте ее график;

г) Чему равна вероятность того, что трое студентов придут на консультацию в течение определенных 15 минут?

9. Сеть кафе «Пить кофе» включает 7 кофеен, 3 из которых имеют круглосуточный режим работы. Для оценки качества обслуживания клиентов, администрация кафе случайным образом отбирает 4 кофейни.

а) Составьте ряд распределения числа кофеен с круглосуточным режимом работы, отобранных для анализа и постройте его график;

б) Найдите числовые характеристики этого распределения;

в) Запишите функцию распределения вероятностей и постройте ее график;

г) Чему равна вероятность того, что в исследовании будут участвовать не более двух круглосуточно работающих кофеен?

10. Туристическая фирма оценивает вероятность того, клиент отменит уже оплаченное путешествие вследствие личных обстоятельств как 0,15. Группа из 5 туристов оплатила тур в Индию.

а) Составьте ряд распределения числа туристов, отменивших поездку вследствие личных обстоятельств, и постройте его график;

б) Найдите числовые характеристики этого распределения;

в) Запишите функцию распределения вероятностей и постройте ее график;

г) Определите вероятность того, что не более одного туриста отменят поездку.

11. В мастерскую по ремонту бытовой техники поступили 8 холодильников, из которых 3 подлежали гарантийному обслуживанию. Бригада специалистов, работающая в первую смену, получила наряд на ремонт 4 холодильников.

а) Составьте ряд распределения числа холодильников, отремонтированных по гарантии в первую смену; если холодильники для ремонта отбирались случайным образом, и постройте его график;

б) Найдите числовые характеристики этого распределения;

в) Запишите функцию распределения вероятностей и постройте ее график;

г) Определите вероятность того, что по гарантии было отремонтировано не более двух холодильников.

12. Для того чтобы проверить правильность своих финансовых счетов, компания регулярно пользуется услугами аудиторов для проверки бухгалтерских проводок в счетах. Предположим, что служащие компании при обработке входящих счетов допускают примерно 5% ошибок. Пусть аудитор случайно отбирает 5 входящих документов для проверки:

а) Составьте ряд распределения числа ошибочных документов среди отобранных и постройте его график;

б) Найдите числовые характеристики этого распределения;

в) Запишите функцию распределения вероятностей и постройте ее график;

г) Определите вероятность того, что аудитор обнаружит не менее двух ошибок.

13. В магазине имеется 11 автомобилей определенной марки. Среди них - 6 автомобилей черного цвета, 3 - серого и 2 - белого. Представители фирмы обратились в магазин с предложением о продаже им трех автомобилей этой марки, безразлично какого цвета.

а) Составьте ряд распределения числа проданных автомобилей черного цвета при условии, что автомобили отбирались случайно и постройте его график;

б) Найдите числовые характеристики этого распределения;

в) Напишите функцию распределения вероятностей и постройте ее график;

г) Какова вероятность того, что среди проданных фирме автомобилей окажется, по крайней мере, 2 автомобиля черного цвета?

14. В международном аэропорту время прибытия самолетов различных рейсов высвечивается на электронном табло. Появление информации о различных рейсах происходит случайно и независимо друг от друга. В среднем в аэропорт прибывает 6 рейсов в течение получаса.

а) Составьте ряд распределения числа сообщений о прибытии самолетов в течение получаса и постройте его график;

б) Найдите числовые характеристики этого распределения;

в) Запишите функцию распределения вероятностей и постройте ее график;

г) Чему равна вероятность того, что в течение получаса появится информация о прибытии не менее трех рейсов?

д) Чему равна вероятность того, что в течение 10 минут не появится информация о прибытии ни одного самолета?

15. Телевизионный канал рекламирует новую марку автомобилей. Вероятность того, что телезритель увидит эту рекламу, оценивается в 0,4. В случайном порядке выбраны 5 телезрителей.

а) Составьте ряд распределения числа лиц, которые могут увидеть рекламу и постройте его график;

б) Найдите числовые характеристики этого распределения;

в) Запишите функцию распределения вероятностей и постройте ее график;

г) Чему равна вероятность того, что по крайней мере 2 телезрителя этого канала видели рекламу новой марки автомобиля?

16. Экзаменационный билет состоит из 5 тестовых вопросов, каждый из которых имеет 4 варианта ответа и только 1 из них верный.

а) Составьте ряд распределения числа правильных ответов в билете и постройте его график;

б) Найдите числовые характеристики этого распределения;

в) Запишите функцию распределения вероятностей и постройте ее график;

г) Чему равна вероятность того, что по крайней мере 3 ответа будут правильными?

17. Менеджер ювелирного магазина утверждает, что в течение дня совершается в среднем 4 покупки.

а) Составьте ряд распределения числа покупок, совершаемых в ювелиром магазине в течение дня и постройте его график;

б) Найдите числовые характеристики этого распределения;

в) Запишите функцию распределения вероятностей и постройте ее график;

г) Чему равна вероятность того, что за два дня в магазине будет совершено не более 2 покупок?

18. В подгруппе английского языка занимается 9 студентов, 4 из которых окончили школы с углубленным изучением языка. Для стажировки по бухгалтерскому учету в Англии случайным образом отбираются 3 студентов.

а) Составьте ряд распределения числа студентов, среди отобранных, углубленно изучавших английский языка и постройте его график;

б) Найдите числовые характеристики этого распределения;

в) Запишите функцию распределения вероятностей и постройте ее график;

г) Чему равна вероятность того, что на стажировку будет отправлено не более двух студентов, окончивших ранее спецшколы?

19. По данным страховой компании вероятность неурожая составляет 0,3. В случае неурожая, страховая фирма обязуется выплатить страховое возмещение. Договор страхования был заключен с 5 фермерскими хозяйствами.

а) Составьте ряд распределения числа возможных выплат страхового возмещения и постройте его график;

б) Найдите числовые характеристики этого распределения;

в) Запишите в общем виде функцию распределения вероятностей и постройте ее график;

г) Чему равна вероятность того, страховое возмещение будет выплачено не более трем фермерским хозяйствам?

20. На предприятии 2000 единиц оборудования определенного вида Вероятность отказа единицы оборудования в течение часа составляет 0,001.

а) Составьте ряд распределения числа отказов оборудования в течение часа и постройте его график;

б) Найдите числовые характеристики этого распределения;

в) Запишите в общем виде функцию распределения вероятностей и постройте ее график;

г) Чему равна вероятность того, что в течение часа откажут как минимум 3 единицы оборудования?

Тема 5. НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ.

Пример 5.1. На рынок поступила крупная партия говядины. Предполагается, что вес туш - случайная величина, подчиняющаяся нормальному закону распределения с математическим ожиданием *а* = 950 кг и средним квадратическим отклонением σ = 150 кг. Определите вероятность того, что вес случайно отобранной туши:

а) окажется больше 1250 кг;

б) окажется меньше 850 кг;

в) будет находиться между 800 и 1300 кг;

г) отклонится от математического ожидания меньше, чем на 50 кг;

д) отклонится от математического ожидания больше, чем на 50 кг;

е) Найдите границы, в которых отклонение веса случайно отобранной туши от своего математического ожидания не превысит утроенного среднего квадратического отклонения (проиллюстрируйте правило трех сигм);

ж) С вероятностью 0,899 определите границы, в которых будет находиться вес случайно отобранной туши. Какова при этом условии максимальная величина отклонения веса случайно отобранной туши от своего математического ожидания?

Решение. а) Вероятность того, что вес случайно отобранной туши окажется больше 1250 кг – можно понимать как вероятность того, что вес случайно отобранной туши окажется в интервале от 1250 кг до +∞. Формула расчета вероятности попадания в заданный интервал нормально распределенной случайной величины X имеет вид:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi_0\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi_0(z)$ - функция Лапласа:

$$\Phi_0(z) = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-x^2}{2}} dx$$

Функция $\Phi_0(z)$ является нечетной функцией; т.е. $\Phi_0(-z) = -\Phi_0(z)$.

Найдем вероятность того, что вес случайно отобранной туши окажется больше 1250 кг. По условию: $\alpha = 1250$, $\beta = +\infty$, $a = 950$, $\sigma = 150$.

Используем формулу расчета вероятности попадания в заданный интервал нормально распределенной случайной величины X.

$$P(X > 1250) = P(1250 < X < +\infty) = \Phi_0\left(\frac{\infty - 950}{150}\right) - \Phi_0\left(\frac{1250 - 950}{150}\right) =$$

$$= \Phi_0(\infty) - \Phi_0(2).$$

Найдем по таблице функции Лапласа (Приложение 2) значения $\Phi_0(z)$.

Значения $\Phi_0(+\infty)$ в таблице нет. Однако известно, что $\Phi_0(z) \to 0,5$ при $z \to +\infty$.Уже при $z = 5$ $\Phi_0(z = 5) = 0,49999997 \approx 0,5$. Очевидно, что $\Phi_0(+\infty)$ - величина бесконечно близкая к 0,5. $\Phi_0(-\infty)$ - величина бесконечно близкая к -0,5.

По таблице функции Лапласа $\Phi_0(2) = 0,47725$.

Отсюда: $P(X>1250) = 0,5 - 0,47725 = 0,02275$.

Итак, вероятность того, что вес случайно отобранной туши окажется больше 1250 кг, составляет 0,02275.

Проиллюстрируем решение задачи графически (рис.5.1).

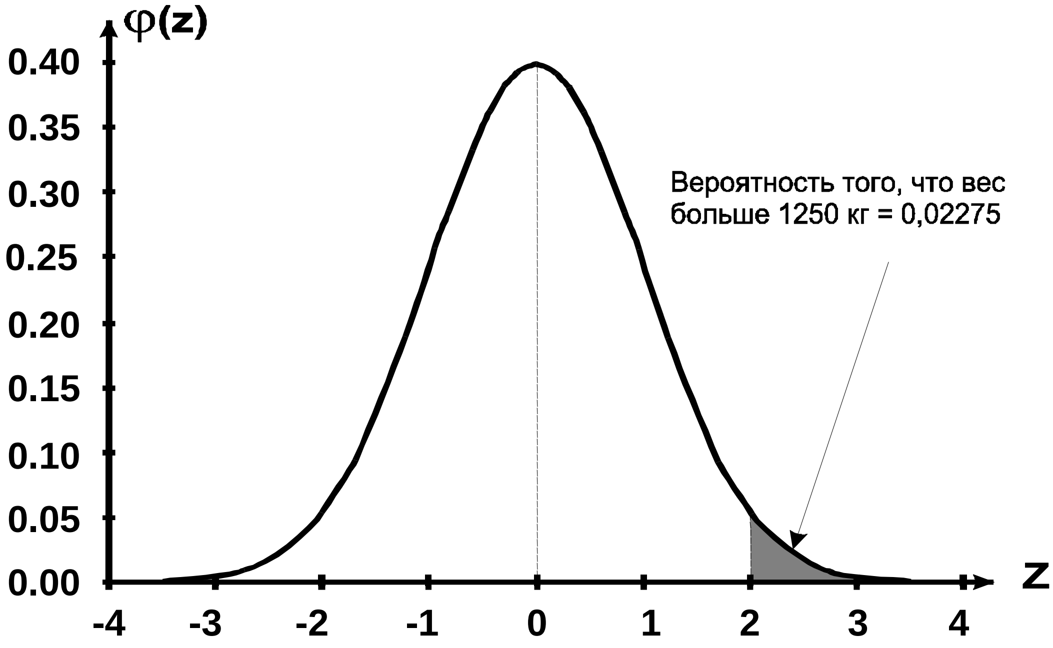


Рис.5.1 Графическая интерпретация к примеру 5.1.

Итак, нам задана нормально распределенная случайная величина X с математическим ожиданием a = 950 кг. и средним квадратическим отклонением σ = 150 кг., то есть X ~N(950;150^2). Мы хотим найти вероятность того, что X больше 1250, то есть определить P(X > 1250). Преобразуем X в Z, и тогда искомая вероятность определится по таблице Приложения 2 стандартного нормального распределения. $Z = \frac{x-a}{\sigma}$.

$$P(X > 1250) = P\left(\frac{X-a}{\sigma} > \frac{1250-a}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{1250-a}{\sigma}\right) =$$

$$= P\left(Z > \frac{1250-950}{150}\right) = P(Z > 2) = 0{,}5 - 0{,}47725 = 0{,}02275.$$

Точка z = 0 соответствует математическому ожиданию, то есть a = 950 кг.

б) Вероятность того, что вес случайно отобранной туши окажется меньше 850 кг - это, то же самое, что вероятность того, что вес случайно отобранной туши окажется в интервале от -∞ до 850 кг.

По условию: $\alpha = -\infty$, $\beta = 850$, $a = 950$, $\sigma = 150$.

Для расчета искомой вероятности используем формулу расчета вероятности попадания в заданный интервал нормально распределенной случайной величины X.

$$P(X < 850) = P(-\infty < X < 850) \approx \Phi_0\left(\frac{850-950}{150}\right) - \Phi_0\left(\frac{-\infty-950}{150}\right) =$$

$$= \Phi_0(-2/3) - \Phi_0(-\infty) = \Phi_0(+\infty) - \Phi_0(0{,}67).$$

Согласно свойству функции Лапласа:

$-\Phi_0(-\infty) = \Phi_0(+\infty)$,

а $\Phi_0(-0{,}67) = -\Phi_0(0{,}67)$.

Найдем по таблице функции Лапласа (Приложение 2) значения $\Phi_0(z)$.

$\Phi_0(+\infty) \approx 0{,}5$;

$\Phi_0(0{,}67) = 0{,}24857$.

Отсюда: P(X < 850) = 0,5 - 0,24857 = 0,25143.

Вероятность того, что вес случайно отобранной туши окажется меньше 850 кг составляет 0,25143.

Проиллюстрируем решение задачи графически (рис. 5.2).

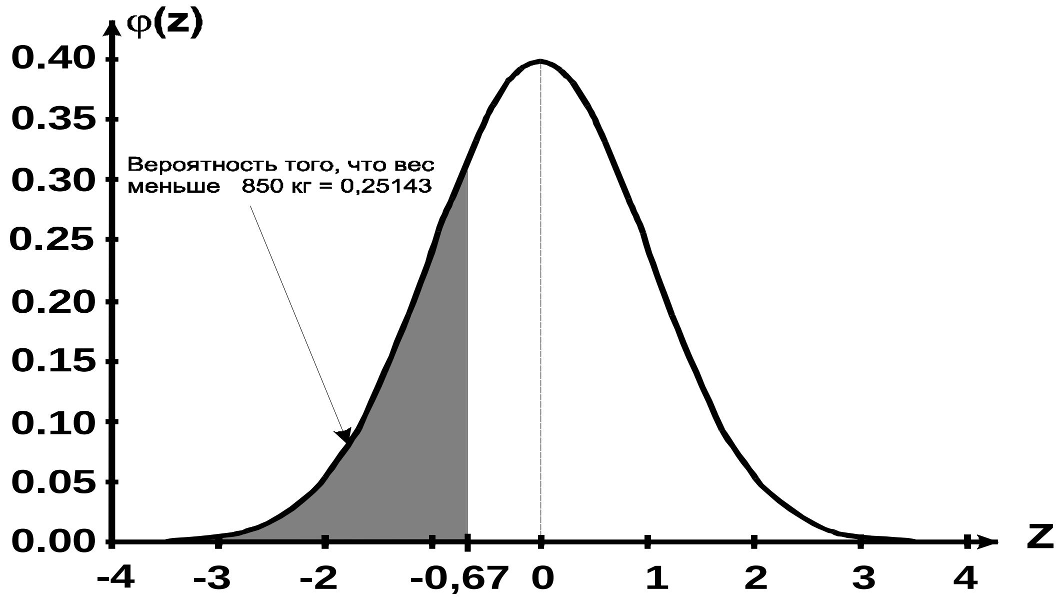


Рис.5.2. Графическая интерпретация к примеру 5.1.

По условию данной задачи точка на оси абсцисс (z = -0,67) соответствует x = 850, т.е. весу, равному 850 кг. Заштрихованная на графике площадь представляет собой вероятность того, что вес наудачу выбранной туши окажется меньше 850 кг, т.е. в интервале от -∞ до 850 кг.

в) Найдем вероятность того, что вес случайно отобранной туши окажется в интервале от 800 до 1300 кг.

По условию: α = 800, β = 1300, *a* = 950, σ = 150.

Для расчета искомой вероятности используем формулу расчета вероятности попадания в заданный интервал нормально распределенной случайной величины X.

$$P(800 < X < 1300) \approx \Phi_0\left(\frac{1300-950}{150}\right) - \Phi_0\left(\frac{800-950}{150}\right) = \Phi_0(2{,}33) - \Phi_0(-1) =$$

$$= \Phi_0(2{,}33) + \Phi_0(1).$$

Согласно свойству функции Лапласа:

$-\Phi_0(-1) = \Phi_0(1)$.

Найдем по таблице функции Лапласа (Приложение 2) значения $\Phi_0(z)$.

$\Phi_0(2{,}33) = 0{,}49010$;

$\Phi_0(1) = 0{,}34134$.

Отсюда: $P(800 < X < 1300) = 0{,}49010 + 0{,}34134 = 0{,}83144$.

Вероятность того, что вес случайно отобранной туши окажется в интервале от 800 кг до 1300 составляет 0,83144.

Проиллюстрируем решение задачи графически (рис. 5.3).

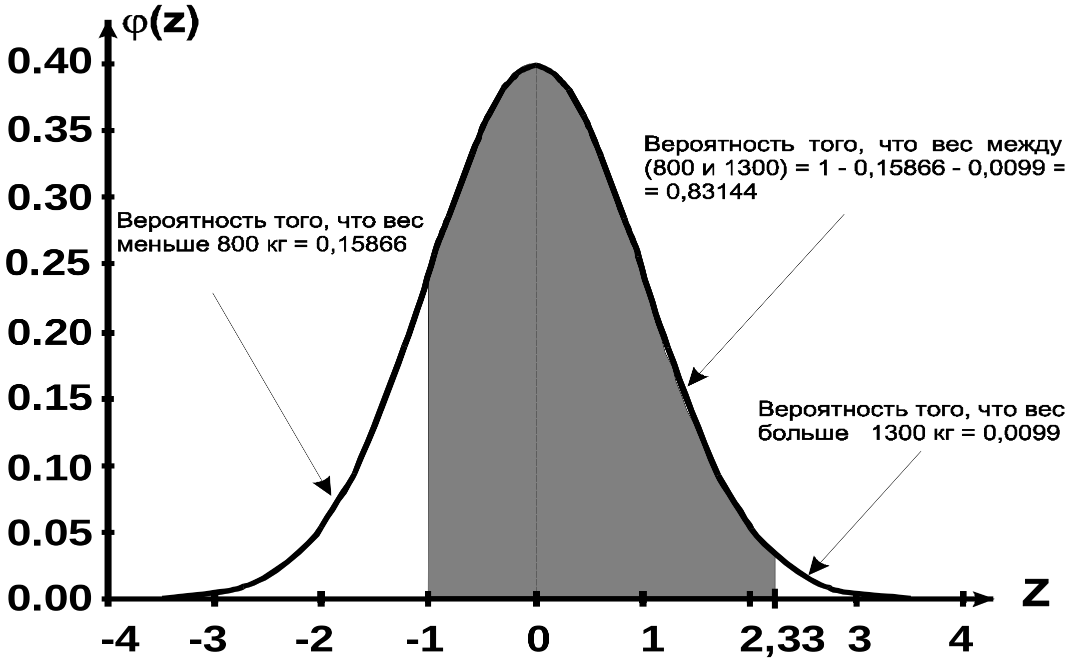


Рис.5.3. Графическая интерпретация к примеру 5.1.

По условию данной задачи точка на оси абсцисс (z = -1) соответствует x = 800, т.е. весу, равному 800 кг, а точка (z = 2,33) соответствует x = 1300, т.е. весу, равному 1300 кг. Заштрихованная на графике площадь представляет собой вероятность того, что вес наудачу выбранной туши окажется в интервале от 800 до 1300 кг.

На графике видно, что искомую вероятность, что вес наудачу выбранной туши окажется в интервале от 800 до 1300 кг, можно было найти другим способом. Для этого необходимо было найти вероятность того, вес наудачу выбранной туши окажется меньше 800 кг, а также- больше 1300 кг, Полученные вероятности – сложить и вычесть из единицы.

Так, вероятность того, вес наудачу выбранной туши окажется меньше 800 кг - это, другими словами, вероятность того, что вес случайно отобранной туши окажется в интервале от -∞ до 850 кг.

$$P(X < 800) = P(-\infty < X < 800) \approx \Phi_0\left(\frac{800-950}{150}\right) - \Phi_0\left(\frac{-\infty-950}{150}\right) =$$

$$= \Phi_0(-1) - \Phi_0(-\infty) = \Phi_0(+\infty) - \Phi_0(1) = 0{,}5 - 0{,}34134 = 0{,}15866.$$

Вероятность того, что вес случайно отобранной туши окажется больше 1300 кг - это, другими словами, вероятность того, что вес случайно отобранной туши окажется в интервале от 1300 кг до +∞.

$$P(X > 1300) = P(1300 < X < +\infty) = \Phi_0\left(\frac{\infty-950}{150}\right) - \Phi_0\left(\frac{1300-950}{150}\right) =$$

$$= \Phi_0(\infty) - \Phi_0(2{,}33) = 0{,}5 - 0{,}49010 = 0{,}0099.$$

Отсюда, искомая вероятность того, что вес наудачу выбранной туши окажется в интервале от 800 до 1300 кг:

$P(800 < X < 1300) = 1 - (P(X<800) + P(X>1300)) = 1 - (0{,}15866 + 0{,}0099) =$
$=1 - 0{,}16856 = 0{,}83144.$

г) Найдем вероятность того, что вес случайно отобранной туши отклонится от математического ожидания меньше, чем на 50 кг, т.е.:

$P(|X - 950| < 50) = ?$

Что значит: $|X - 950| < 50$?

Это неравенство можно заменить двойным неравенством:

$$-50 < X - 950 < 50 \text{ или}$$
$$950 - 50 < X < 950 + 50,$$
$$900 < X < 1000.$$

Следовательно:

$P|X - 950| < 50) = P(900 < X < 1000)$.

А это вероятность попадания в заданный интервал нормально распределенной случайной величины X.

Отсюда:

$$P(|X-950|<50)=P(900<X<1000)=\Phi_0(\frac{1000-950}{150})-\Phi_0(\frac{900-950}{150})=$$
$$\Phi_0(0{,}33)-\Phi_0(-0{,}33)=\Phi_0(0{,}33)+\Phi_0(0{,}33)=2\Phi_0(0{,}33).$$

Согласно свойству функции Лапласа:

$-\Phi_0(-0{,}33) = \Phi_0(0{,}33)$.

Найдем по таблице функции Лапласа (Приложение 2) значения $\Phi_0(z)$.

$\Phi_0(0{,}33) = 0{,}1293$.

Следовательно:

$P(|X - 950| < 50) = P(900 < X < 1000) = 2 \cdot 0{,}1293 = 0{,}2586$.

Вероятность того, что вес случайно отобранной туши отклонится от математического ожидания меньше, чем на 50 кг, составляет 0,2586.

Эту задачу легче решить, используя формулу расчета вероятности заданного отклонения нормально распределенной случайной величины X от своего математического ожидания:

$$P(|X-a|<\Delta)=2\cdot\Phi_0(\frac{\Delta}{\sigma}),$$

где - Δ величина отклонения случайной величины X от математического ожидания.

По условию $\Delta = 50$; $a = 950$, $\sigma = 150$.

Используя эту формулу, сразу получим:

$P(|X - 950| < 50) = 2\Phi_0(50 / 150) = 2\Phi_0(0{,}33) = 2 \cdot 0{,}1293 = 0{,}2586$.

Проиллюстрируем решение задачи графически (рис. 5.4).

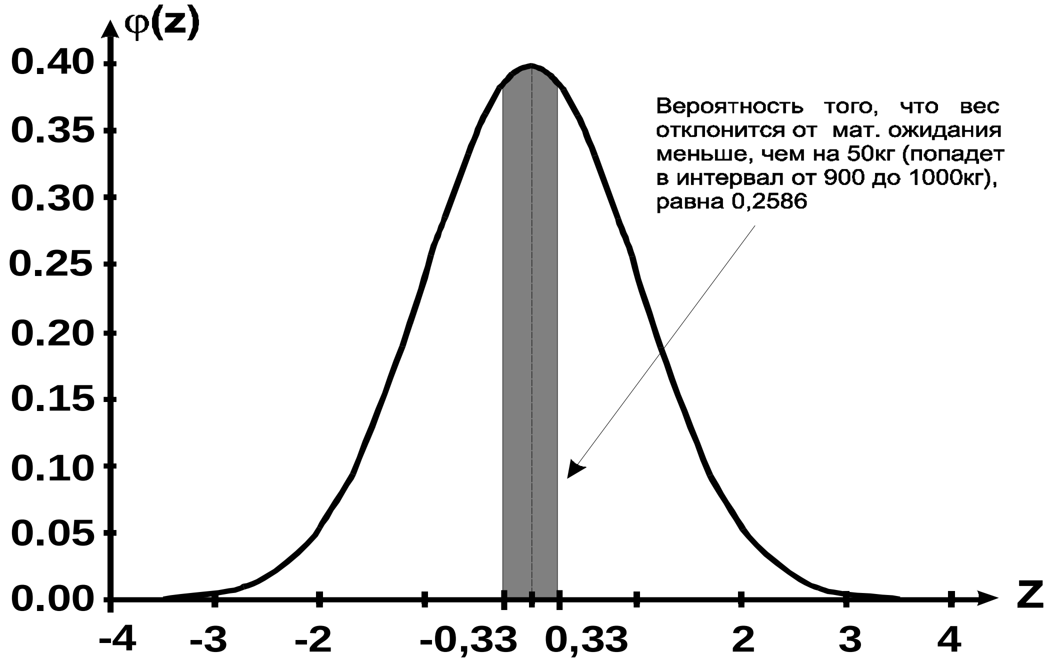


Рис.5.4. Графическая иллюстрация к задаче 5.1.

По условию данной задачи точка на оси абсцисс (z = -0,33) соответствует x = 900, т.е. весу, равному 900 кг, а точка (z = 0,33) соответствует x = 1000, т.е. весу, равному 1000 кг. Заштрихованная на графике площадь представляет собой вероятность того, что вес наудачу выбранной туши окажется в интервале от 900 до 1000 кг., т.е. отклонится от математического ожидания меньше, чем на 50 кг.

д) Найдем вероятность того, что вес случайно отобранной туши отклонится от математического ожидания больше, чем на 50 кг, т.е.:

$P(|X - 950| > 50) = ?$

Это вероятность события, противоположного по отношению к событию: вес случайно отобранной туши отклонится от математического ожидания меньше, чем на 50 кг ($P(|X - 950| < 50)$).

Следовательно:

P(│X - 950│> 50) = 1 - P(│X - 950│< 50) = 1 - 0,2586 = 0,7414.

Вероятность того, что вес случайно отобранной туши отклонится от математического ожидания больше, чем на 50 кг, составляет 0,7414.

Можно использовать другой алгоритм решения.

Вероятность того, что вес случайно отобранной туши отклонится от математического ожидания больше, чем на 50 кг, - это вероятность того, что вес случайно отобранной туши будет или меньше (950 - 50 = 900) кг или больше (950 + 50 = 1000) кг.

По теореме сложения вероятностей несовместных событий имеем:

P(│X - 950│> 50) = P(X < 900) + P(X > 1000).

$$P(X<900)=P(-\infty<X<900)=\Phi_0\left(\frac{900-950}{150}\right)-\Phi_0\left(\frac{-\infty-950}{150}\right)=$$
$$=\Phi_0(-1/3)-\Phi_0(-\infty)=\Phi_0(+\infty)-\Phi_0(0{,}33)=0{,}5-0{,}1293=0{,}3707.$$

$$P(X>1000)=P(1000<X<+\infty)=\Phi_0\left(\frac{\infty-950}{150}\right)-\Phi_0\left(\frac{1000-950}{150}\right)=$$
$$=\Phi_0(\infty)-\Phi_0(0{,}33)=0{,}5-0{,}1293=0{,}3707.$$

Отсюда:

P(│X - 950│> 50) = P(X < 900) + P(X > 1000) = 0,3707 + 0,3707 = 0,7414.

е) Найдем границы, в которых отклонение веса случайно отобранной туши от своего математического ожидания не превысит утроенного среднего квадратического отклонения.

В этом задании студентам предлагается проиллюстрировать *правило трех сигм*, которое можно сформулировать следующим образом:

Если случайная величина распределена по нормальному закону, то ее отклонение от математического ожидания практически не превышает $\pm 3\sigma$.

P(│X - *a*│<3σ) = 2Φ_0(3) = 0,9973.

Вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины X от своего математического ожидания будет меньше 3σ или, другими словами, вероятность того, что нормально распределенная случайная величина X попадет в интервал (*a* - 3σ; *a* + 3σ), равна 0,9973.

Следовательно, вероятность того, что отклонение случайной величины от своего математического ожидания по абсолютной величине превысит утроенное среднее квадратическое отклонение, очень мала и равна 0,0027. Другими словами, лишь в 27 случаях из 10000 случайная величина X в результате испытания может оказаться вне интервала (*a* - 3σ; *a* + 3σ). Такие события считаются практически невозможными.

Формулу, описывающую правило трех сигм, несложно получить из формулы вероятности заданного отклонения нормально распределенной случайной величины X от своего математического ожидания:

$$P(|X-a|<\Delta)=2\cdot\Phi_0\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right)$$

Если взять Δ = 3σ, то получим Δ /σ = 3.

Отсюда:

$$P(|X - a| < 3\sigma) = 2\Phi_0(3) = 0{,}9973.$$

По условию задачи: *a* = 950; σ = 150.

Правило трех сигм можно представить так:

$$P(a - 3\sigma < X < a + 3\sigma) = 2\Phi_0(3) = 0{,}9973.$$

Интересующие нас границы - это границы интервала (*a* - 3σ; *a* + 3σ), т.е.:

$$a - 3\sigma < X < a + 3\sigma,$$
$$950 - 3 \cdot 150 < X < 950 + 3 \cdot 150,$$
$$500 < X < 1400.$$

Учитывая, что вес отобранной туши - нормально распределенная случайная величина, можно быть практически уверенным, что вес случайно отобранной туши не выйдет за пределы от 500 до 1400 кг.

ж) Определим границы, в которых с вероятностью 0,899 будет находиться вес случайно отобранной туши.

Формулу вероятности заданного отклонения нормально распределенной случайной величины X от своего математического ожидания можно представить следующим образом:

$$P(|X-a|<\Delta)=2\cdot\Phi_0\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right)=\gamma.$$

или

$$P(a-\Delta<X<a+\Delta)=2\cdot\Phi_0\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right)=\gamma,$$

где γ - вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины X от своего математического ожидания не превысит заданной величины Δ.

По условию задачи: a = 950; σ = 150.

Используя последнюю формулу, получим:

$$P(950-\Delta<X<950+\Delta)=2\cdot\Phi_0(\frac{\Delta}{150})=0{,}899.$$

Из соотношения: $2\cdot\Phi_0\left(\frac{\Delta}{150}\right)=0{,}899$, найдем Δ.

$$2\cdot\Phi_0\left(\frac{\Delta}{150}\right)=0{,}899\ ,$$

$$\Phi_0\left(\frac{\Delta}{150}\right)=\frac{0{,}899}{2}=0{,}4495.$$

По таблице функции Лапласа (Приложение 2) найдем, при каком z = $\frac{\Delta}{150}$ $\Phi_0(z)=0{,}4495.$

z = 1,64, т.е. $\Phi_0(1{,}64)=0{,}4495.$

Отсюда: $\frac{\Delta}{150}=1{,}64.$

Δ= 1,64 · 150 = 246.

С вероятностью 0,899 можно ожидать, что отклонение веса случайно отобранной туши от своего математического ожидания не превысит 246 кг.

Найдем границы интересующего нас интервала:

$$a-\Delta<X<a+\Delta,$$
$$950-246<X<950+246,$$
$$704<X<1196.$$

С вероятностью 0,899 можно ожидать, что вес случайно отобранной туши будет находиться в пределах от 704 до 1196 кг.

Ответ: а) 0,02275; *б)* 0,25143; *в)* 0,83144; *г)* 0,2586; *д)* 0,7414;
е) (500; 1400); *ж)* 246; (704; 1196).

Пример 5.2. Изменим условие предыдущей задачи.

На рынок поступила крупная партия говядины. Предполагается, что вес туш – случайная величина, подчиняющаяся нормальному закону распределения с неизвестным математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением σ =150 кг. Известно, что 37,07% туш имеют вес более 1000 кг. Определите ожидаемый вес случайно отобранной туши.

Решение. По условию задачи: σ = 150; α = 1000; $\beta=+\infty$; P(X > 1000) = 0,3707.

Ожидаемый вес случайно отобранной туши - это среднеожидаемый вес, математическое ожидание, т.е. a =?

Используем формулу (5.10) расчета вероятности попадания в заданный интервал нормально распределенной случайной величины X:

$$P(1000 < X < +\infty) = \Phi_0(\frac{\infty - a}{150}) - \Phi_0(\frac{1000 - a}{150}) = 0{,}3707\,;$$

$$\Phi_0(\infty) - \Phi_0(\frac{1000 - a}{150}) = 0{,}3707\,;$$

$$0{,}5 - \Phi_0(\frac{1000 - a}{150}) = 0{,}3707\,;$$

$$\Phi_0(\frac{1000 - a}{150}) = 0{,}5 - 0{,}3707 = 0{,}1293\,.$$

По таблице функции Лапласа (Приложение 2) найдем, при каком $z = \frac{1000 - a}{150}$ $\Phi_0(z) = 0{,}1293$.

z = 0,33, т.е. $\Phi_0(0{,}33) = 0{,}1293$.

Отсюда: $\frac{1000 - a}{150} = 0{,}33$.

1000 - *a* = 0,33 · 150 = 50.

a = 1000 - 50 = 950.

Ответ. Среднеожидаемый вес случайно отобранной туши составляет 950 кг.

Пример 5.3. Вновь изменим условие задачи.

На рынок поступила крупная партия говядины. Предполагается, что вес туш - случайная величина, подчиняющаяся нормальному закону распределения с математическим ожиданием *a* = 950 кг и неизвестным средним квадратическим отклонением. Известно, что 15,87% туш имеют вес менее 800 кг. Определите среднее квадратическое (стандартное) отклонение веса туш.

Решение. По условию задачи: *a* = 950; $\alpha = -\infty$ $\beta = 800$; P(X < 800) = 0,1587; σ = ?

Используем формулу (5.10) расчета вероятности попадания в заданный интервал нормально распределенной случайной величины X:

$$P(-\infty < X < 800) = \Phi_0(\frac{800 - 950}{\sigma}) - \Phi_0(\frac{-\infty - 950}{\sigma}) = 0{,}1587\,;$$

$$\Phi_0(\frac{800 - 950}{\sigma}) + \Phi_0(\infty) = 0{,}1587\,;$$

$$\Phi_0(\frac{800 - 950}{\sigma}) + 0{,}5 = 0{,}1587\,;$$

$$0{,}5 - \Phi_0(\frac{950 - 800}{\sigma}) = 0{,}1587\,;$$

$$\Phi_0(\frac{150}{\sigma}) = 0{,}5 - 0{,}1587 = 0{,}3413\,.$$

По таблице функции Лапласа (Приложение 2) найдем, при каком $z = \frac{150}{\sigma}$ $\Phi_0(z) = 0{,}3413$.

z = 1, т.е. $\Phi_0(1) = 0{,}3413$.

Отсюда: $\frac{150}{\sigma} = 1$.

σ= 150.

Ответ. Среднее квадратическое отклонение веса туш составляет 150 кг.

Пример 5.4. Еще раз изменим условие задачи.

На рынок поступила крупная партия говядины. Предполагается, что вес туш - случайная величина, подчиняющаяся нормальному закону распределения с неизвестными математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением. Известно, что 15,87% туш имеют вес менее 800 кг и 37,07% туш имеют вес более 1000 кг. Определите среднеожидаемый вес и среднее квадратическое (стандартное) отклонение веса туш.

Решение. По условию задачи: $\alpha = -\infty$; $\beta = 800$; $P(X < 800) = 0{,}1587$;

$P(X > 1000) = 0{,}3707$; a = ?; σ = ?

Используем формулу (5.10) расчета вероятности попадания в заданный интервал нормально распределенной случайной величины X:

$$P(-\infty < X < 800) = \Phi_0(\frac{800-a}{\sigma}) - \Phi_0(\frac{-\infty-a}{\sigma}) = 0{,}1587\,;$$

$$\Phi_0(\frac{800-a}{\sigma}) + \Phi_0(\infty) = 0{,}1587\,;$$

$$\Phi_0(\frac{800-a}{\sigma}) + 0{,}5 = 0{,}1587\,;$$

$$0{,}5 - \Phi_0(\frac{a-800}{\sigma}) = 0{,}1587\,;$$

$$\Phi_0(\frac{a-800}{\sigma}) = 0{,}5 - 0{,}1587 = 0{,}3413\,.$$

По таблице функции Лапласа (Приложение 2) найдем, при каком $z = \frac{a-800}{\sigma}$ $\Phi_0(z) = 0{,}3413$.

z = 1, т.е. $\Phi_0(1) = 0{,}3413$.

Отсюда: $\frac{a-800}{\sigma} = 1$.

С другой стороны:

$$P(1000 < X < +\infty) = \Phi_0(\frac{\infty-a}{\sigma}) - \Phi_0(\frac{1000-a}{\sigma}) = 0{,}3707\,;$$

$$\Phi_0(\infty) - \Phi_0(\frac{1000-a}{\sigma}) = 0{,}3707\,;$$

$$0{,}5 - \Phi_0(\frac{1000-a}{\sigma}) = 0{,}3707\,;$$

$$\Phi_0(\frac{1000-a}{\sigma}) = 0{,}5 - 0{,}3707 = 0{,}1293\,.$$

По таблице функции Лапласа (Приложение 2) найдем, при каком $z = \frac{1000-a}{\sigma}$ $\Phi_0(z) = 0{,}1293$.

z = 0,33, т.е. $\Phi_0(0{,}33) = 0{,}1293$.

Отсюда: $\frac{1000-a}{\sigma} = 0{,}33$.

Решим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{a-800}{\sigma} = 1 \\ \frac{1000-a}{\sigma} = 0{,}33 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma = a-800 \\ 0{,}33\cdot\sigma = 1000-a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma = a-800 \\ 0{,}33\cdot(a-800) = 1000-a \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma = a-800 \\ 0{,}33\cdot a - 266{,}67 = 1000-a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma = a-800 \\ 1{,}33\cdot a = 1000+266{,}67 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma = a-800 \\ 1{,}33\cdot a = 1266{,}67 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma = a - 800 \\ a = \dfrac{1266{,}67}{1{,}33} \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma = a - 800 \\ a \approx 950 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma = 950 - 800 \\ a \approx 950 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma = 150 \\ a \approx 950 \end{cases}$$

Среднеожидаемый вес случайно отобранной туши составляет 950 кг. Среднее квадратическое отклонение веса туш - 150 кг.

Ответ: a = 950; σ = 150.

Пример 5.5. В очередной раз изменим условие задачи.

На рынок поступила крупная партия говядины. Предполагается, что вес туш - случайная величина, подчиняющаяся нормальному закону распределения с математическим ожиданием a = 950 кг и неизвестным средним квадратическим отклонением. Каким должно быть среднее квадратическое (стандартное) отклонение, чтобы с вероятностью 0,81648 можно было утверждать, что абсолютное отклонение веса случайно отобранной туши от математического ожидания не превысит 200 кг?

Решение. По условию задачи: a = 950; Δ = 200; $P(|X - 950| < 200) = 0{,}81648$; σ =?

Используем формулу (5.11) расчета вероятности попадания заданного отклонения нормально распределенной случайной величины X от своего математического ожидания:

Тогда получим:

$P(|X - 950| < 200) = 2\Phi_0(200 / \sigma) = 0{,}81648$;

$2\Phi_0(200 / \sigma = 0{,}81648$;

$\Phi_0(200 / \sigma) = 0{,}81648 / 2$;

$\Phi_0(200 / \sigma) = 0{,}40824$.

По таблице функции Лапласа (Приложение 2) найдем, при каком $z = \dfrac{200}{\sigma}$ $\Phi_0(z) = 0{,}40824$.

z = 1,33, т.е. $\Phi_0(1{,}33) = 0{,}40824$.

Отсюда: $\dfrac{200}{\sigma} = 1{,}33$.

σ = 200 / 1,33 = 150.

Ответ. Чтобы с вероятностью 0,81648 можно было утверждать, что абсолютное отклонение веса случайно отобранной туши от математического ожидания не превысит 200 кг, среднее квадратическое отклонение веса туш должно составлять 150 кг.

Пример 5.6 Фирма собирается приобрести партию из 100 000 единиц некоторого товара. Из прошлого опыта известно, что 1% товаров данного типа имеют дефекты. Какова вероятность того, что в данной партии окажется от 950 до 1050 дефектных единиц товара?

Решение. В качестве случайной величины в данной задаче выступает число дефектных единиц товара в общей партии из 100000 единиц. Обозначим ее через X.

Перечислим все возможные значения случайной величины X: 0, 1, 2, ... , 99999, 100000.

Это - дискретная случайная величина, т.к. ее возможные значения отличаются друг от друга не менее чем на 1, и множество ее возможных значений является счетным.

По условию вероятность того, что единица товара окажется дефектной, - постоянна и составляет 0,01 (p = 0,01). Вероятность противоположного события, т.е. того, что единица товара не имеет дефекта - также постоянна и составляет 0,99 (q = 1—p = 1—0,01 = 0,99).

Все 100000 испытаний - независимы, т.е. вероятность того, что каждая единица товара окажется дефектной, не зависит от того, окажется дефектной или нет любая другая единица товара.

Значения случайной величины X - это, в общем виде, число появлений интересующего нас события в 100000 независимых испытаниях.

Это позволяет сделать вывод о том, что случайная величина X - число дефектных единиц товара в общей партии из 100000 единиц - подчиняется биномиальному закону распределения вероятностей с параметрами n = 100000 и p = 0,01.

Итак, по условию задачи: n = 100000; p = 0,01; q = 0,99, X = m.

Необходимо найти вероятность того, что число дефектных единиц товара окажется в пределах от m_1 = 950 до m_2 =1050, т.е. - вероятность того, что случайная величина X = m попадет в интервал от 950 до 1050, т.е.:

$P(m_1 < m < m_2) = ?$

Так как мы имеем дело со случайной величиной, подчиняющейся биномиальному распределению, вероятность появления события m раз в n независимых испытаниях необходимо вычислять по формуле Бернулли (4.9).

В данном случае, для определения искомой вероятности нам необходимо с помощью формулы Бернулли найти $P_{100000,\ 950}$; $P_{100000,\ 951}$; $P_{100000,\ 952}$; ... ; $P_{100000,\ 1049}$; $P_{100000,\ 1050}$, а затем - сложить их, используя теорему сложения вероятностей несовместных событий.

Очевидно, что такой способ определения искомой вероятности связан с громоздкими вычислениями. Так, например:

$$P_{100000,950} = C_{100000}^{950} \cdot 0{,}01^{950} \cdot 0{,}99^{100000-950}.$$

Можно значительно облегчить расчеты, если аппроксимировать биномиальное распределение нормальным, т.е. выразить функции биномиального распределения через функции нормального.

Когда n - число испытаний в биномиальном эксперименте - возрастает, дискретное биномиальное распределение стремится к непрерывному нормальному распределению. Это означает, что для больших n мы можем аппроксимировать биномиальные вероятности вероятностями, полученными для нормально распределенной случайной величины, имеющей такое же математическое ожидание и такое же среднее квадратическое отклонение.

Подставим параметры биномиального распределения (5.15) в формулу (5.10) и получим формулу для приближенного расчета вероятности появления события от m_1 и до m_2 раз в n независимых испытаниях $P(m_1 < m > m_2)$:

$$P_n(m_1 < m < m_2) \approx \Phi_0\left(\frac{m_2 - M(m)}{\sigma(m)}\right) - \Phi_0\left(\frac{m_1 - M(m)}{\sigma(m)}\right),$$

$$\mathbf{P_n(m_1 < m < m_2) \approx \Phi_0\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi_0\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right),} \qquad \textbf{(5.19)}$$

где $\Phi_0(z)$ - функция Лапласа: $\Phi_0(z) = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-x^2}{2}} dx$.

Формулу для приближенного вероятности появления события не менее m_1 и не более m_2 раз в n независимых испытаниях $P_n(m_1 < m < m_2)$ называют *интегральной теоремой Лапласа.*

Использование локальной и интегральной теорем Лапласа дает приближенные значения искомых вероятностей. Погрешность будет невелика при условии, что
npq > 9.

Для решения данной задачи воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:

$$P_{100000}(950 \le m \le 1050) \approx \Phi_0\left(\frac{1050 - 100000 \cdot 0{,}01}{\sqrt{100000 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}99}}\right) - \Phi_0\left(\frac{950 - 100000 \cdot 0{,}01}{\sqrt{100000 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}99}}\right);$$

$$P_{100000}(950 \le m \le 1050) \approx \Phi_0\left(\frac{1050 - 1000}{31{,}4643}\right) - \Phi_0\left(\frac{950 - 1000}{31{,}4643}\right);$$

$$P_{100000}(950 \le m \le 1050) \approx \Phi_0\left(\frac{50}{31{,}4643}\right) - \Phi_0\left(\frac{-50}{31{,}4643}\right);$$

$$P_{100000}(950 \le m \le 1050) \approx \Phi_0(\frac{50}{31,4643}) + \Phi_0(\frac{50}{31,4643});$$

$$P_{100000}(950 \le m \le 1050) \approx \Phi_0(1,59) + \Phi_0(1,59) = 2\Phi_0(1,59).$$

По таблице функции Лапласа (Приложение 2) найдем $\Phi_0(1,59)$:

$\Phi_0(1,59) = 0,44408$.

$$P_{100000}(950 \le m \le 1050) \approx 2 \cdot 0,44408 = 0,88816.$$

Вероятность того, что в партии из 100000 единиц окажется от 950 до 1050 дефектных единиц товара, составляет 0,88816.

Данную конкретную задачу можно было решить еще более просто.

Математическое ожидание числа дефектных единиц товара равно 1000 единиц:

$M(m) = n \cdot p = 100000 \cdot 0,01 = 1000$.

Абсолютное отклонение нижней и верхней границ интервала $[m_1;\ m_2]$ от математического ожидания $M(m) = n \cdot p$ составляет 50 единиц:

$|m_1 – n \cdot p| = |950 – 100000 \cdot 0,01| = 50;$

$|m_2 - n \cdot p| = |1050 – 100000 \cdot 0,01| = 50.$

Следовательно, искомую вероятность можно рассматривать как вероятность заданного отклонения частоты от своего математического ожидания:

$$P(|m - np| < \Delta)$$

Подставив параметры биномиального распределения в формулу расчета вероятности заданного отклонения нормально распределенной случайной величины от своего математического ожидания, получим формулу для приближенного расчета вероятности заданного отклонения частоты от своего математического ожидания:

$$P(|(X = m) - M(m)| < \Delta) \approx 2 \cdot \Phi_0(\frac{\Delta}{\sigma(m)});$$

$$\mathbf{P(|m - np| < \Delta) \approx 2 \cdot \Phi_0(\frac{\Delta}{\sqrt{npq}}).} \qquad \mathbf{(5.20)}$$

При использовании этой формулы для решения задачи сразу получим:

$$P(|m - 100000 \cdot 0,01| < 50) \approx 2 \cdot \Phi_0(\frac{50}{\sqrt{100000 \cdot 0,01 \cdot 0,99}});$$

$$P(|m - 1000| < 50) \approx 2 \cdot \Phi_0(1,59) = 0,88816.$$

Ответ. Вероятность того, что в партии из 100000 единиц окажется от 950 до 1050 дефектных единиц товара, составляет 0,88816.

Пример 5.7. Подлежат исследованию 400 проб руды. Вероятность промышленного содержания металла в каждой пробе для всех проб одинакова и равна 0,8. Найти вероятность того, что доля проб с промышленным содержанием металла отклонится от вероятности промышленного содержания металла в каждой пробе не более чем на 0,05.

Решение. В отличие от предыдущей задачи, в данном случае речь идет о расчете вероятности заданного отклонения частости (относительной частоты) появления события от вероятности его появления в отдельном независимом испытании, т.е.:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - M\left(\frac{m}{n}\right)\right| \le \Delta\right) = ?$$

По условию: $n = 400$; $p = 0,8$; $q = 1- 0,8 = 0,2$; $\Delta = 0,05$.

$$P\left(\left|\frac{m}{400}-0{,}8\right|\le 0{,}05\right)\approx 2\Phi_0\left(\frac{0{,}05}{\sqrt{\frac{0{,}8\cdot 0{,}2}{400}}}\right);$$

$$P\left(\left|\frac{m}{400}-0{,}8\right|\le 0{,}05\right)\approx 2\Phi_0(2{,}5)=2\cdot 0{,}49379=0{,}98758.$$

Ответ. Вероятность того, что доля проб с промышленным содержанием металла отклонится от вероятности промышленного содержания металла в каждой пробе не более чем на 0,05, составляет 0,98758.

Задачи к теме 5 «Законы распределения непрерывных случайных величин».

1. Компьютерная система содержит 50 одинаковых микрочипов. Вероятность того, что любой микрочип будет работать в заданное время, равна 0,9. Для выполнения некоторой операции требуется, чтобы, по крайней мере, 30 микрочипов было в рабочем состоянии.

а) Чему равна вероятность того, что операция будет выполнена успешно?

б) Чему равна вероятность того, что будут работать 47 микрочипов?

2. Почтовое отделение быстро оценивает объём переводов в рублях, взвешивая почтовые отправления, полученные в течение каждого текущего рабочего дня. Установлено, что если вес почтовых отправлений составляет N кг, то объём переводов в рублях есть случайная величина, распределенная по нормальному закону со средним значением 160N и стандартным отклонением 20N руб. Найти вероятность того, что в день, когда вес почтовых отправлений составит 150 кг, объём переводов в рублях будет находиться в пределах:

а) от 21000 до 27000 руб.; б) более 28500 руб.; в) менее 22000 руб.

3. Менеджер крупного ресторана по опыту знает, что только 80% людей, сделавших заказ на вечер, придут в ресторан поужинать. В один из вечеров менеджер решил принять 60 заказов, хотя в ресторане было лишь 55 свободных столиков. Чему равна вероятность того, что более 55 посетителей придут на заказанные места?

4. Экзамен по математической статистике успешно сдают 75% студентов дневного отделения. Если на втором курсе факультета обучается 250 студентов, то какова вероятность того, что 203 студента сдадут экзамен успешно?

5. В отделе продаж страховой компании работают 45 сотрудников. Вероятность того, что сотрудник выполнит план по числу заключенных договоров, оценивается начальником отдела как 0,7. Какова вероятность того, что:

а) план выполнят как минимум 35 сотрудников?

б) план выполнят не более 30 сотрудников?

в) план выполнят 37 сотрудников?

6. Отдел маркетинга фармацевтической компании утверждает, что новая модификация таблеток от головной боли используется 30% пациентов. Если среди пациентов было отобрано 80 человек, то какова вероятность того, что доля лиц в выборке, предпочитающих новую модификацию таблеток, не будет отличаться по абсолютной величине от истинной доли более чем на 0,1?

7. Дневная выручка супермаркета распределена по нормальному закону с математическим ожиданием 10000 у.е. и стандартным отклонением 1400 у.е. Найдите вероятность того, что:

а) выручка супермаркета окажется более 13000 у.е.;

б) выручка супермаркета окажется менее 8000 у.е.;

в) найдите границы, в которых будет находиться выручка супермаркета согласно правилу трех сигм.

8. По данным независимого исследования, хлеб определенного сорта, составляет 15% от совокупной реализации хлебобулочных изделий. Если выборочному обследованию были подвергнуты 80 торговых предприятий, то какова вероятность того, что доля реализации хлеба определенного сорта в генеральной совокупности будет отличаться по абсолютной величине от истинной доли менее чем на 5%?

9. В течение месяца кредитным отделом банка было выдано 68 ипотечных кредитов. Менеджер банка оценивает вероятность просрочки оплаты таких кредитов как 0,2. Какова вероятность того, что в течение срока кредитования будут просрочены:

а) как минимум 15 кредитов?

б) не более 18 кредитов?

в) 16 кредитов?

10. Фирма, занимающаяся продажей товаров по каталогу, ежемесячно получает по почте заказы. Число этих заказов - нормально распределенная случайная величина со средним квадратическим отклонением σ = 560 и неизвестным математическим ожиданием. В 90% случаев число ежемесячных заказов превышает 12439. Найдите ожидаемое среднее число заказов, получаемых фирмой за месяц.

11. Дневная добыча угля в некоторой шахте распределена по нормальному закону с математическим ожиданием 870 тонн и стандартным отклонением 90 тонн.

а) Найдите вероятность того, что в определенный день будут добыты по крайней мере 900 тонн угля.

б) Определите долю рабочих дней, в которые будет добыто от 860 до 940 тонн угля.

в) Найдите вероятность того, что в данный день добыча угля окажется ниже 750 тонн.

12. Кандидат на выборах считает, что 20% избирателей в определенной области поддерживают его избирательную платформу. Если 72 избирателя случайно отобраны из числа избирателей данной области, найдите вероятность того, что выборочная доля избирателей, поддерживающих кандидата, не будет отличаться по абсолютной величине от истинной доли более, чем на 0,09.

13. Еженедельный выпуск продукции на заводе приблизительно распределен по нормальному закону со средним значением, равным 150000 единиц продукции в неделю, и стандартным отклонением - 12000 ед. Найдите вероятность того, что еженедельный выпуск продукции:

а) превысит 170000 единиц;

б) окажется ниже 100000 единиц в данную неделю?

в) Предположим, что возникли трудовые споры, и недельный выпуск продукции стал ниже 90000 ед. Менеджеры обвиняют профсоюз в беспрецедентном падении выпуска продукции, а профсоюз утверждает, что выпуск продукции находится в пределах принятого уровня ($\pm 3\sigma$). Можно ли доверять профсоюзу?

14. Вес тропического грейпфрута, выращенного в Краснодарском крае, - нормально распределенная случайная величина с неизвестным математическим ожиданием и дисперсией, равной 0,09. Агрономы знают, что 75% фруктов весят меньше, чем 0,5 кг. Найдите ожидаемый вес случайно выбранного грейпфрута.

15. Один из методов, позволяющих добиться успешных экономических прогнозов, состоит в применении согласованных подходов к решению конкретной проблемы. Обычно прогнозом занимается большое число аналитиков. Средний результат таких индивидуальных прогнозов представляет собой общий согласованный прогноз. Пусть этот прогноз относительно величины банковской процентной ставки в текущем году подчиняется нормальному закону со средним значением a = 11% и стандартным отклонением σ = 3,6%. Из группы аналитиков случайным образом отбирается один человек. Найдите вероятность того, что согласно прогнозу этого аналитика уровень процентной ставки:

а) превысит 13%;

б) окажется менее 16%;

в) будет в пределах от 13 до 17%.

16. Предположим, что в течение года цена на акции некоторой компании есть случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 50 условным денежным единицам, и стандартным отклонением, равным 10. Чему равна вероятность того, что в случайно выбранный день обсуждаемого периода цена за акцию будет:

а) более 70 условных денежных единиц?

б) ниже 50 за акцию?

в) между 45 и 58 условными денежными единицами за акцию?

17. По данным университета лишь 45% абитуриентов получают положительные оценки на вступительных экзаменах. Предположим, что в приемную комиссию поступило 2120 заявлений. Чему равна вероятность того, что:

а) хотя бы 970 абитуриентов получат положительные оценки на вступительных экзаменах?

б) 950 абитуриентов получат положительные оценки на вступительных экзаменах?

18. Средний срок службы коробки передач до капитального ремонта у автомобиля определенной марки составляет 56 месяцев со стандартным отклонением σ = 16 мес. Привлекая покупателей, производитель хочет дать гарантию на этот узел, обещая сделать ремонт коробки передач нового автомобиля в случае ее поломки до определенного срока. Пусть срок службы коробки передач подчиняется нормальному закону. На сколько месяцев в таком случае производитель должен дать гарантию для этой детали, чтобы число бесплатных ремонтов не превышало 2,275% проданных автомобилей?

19. При производстве безалкогольных напитков специальный аппарат разливает определенное число унций (1 унция = 28,3 г) напитка в стандартную ёмкость. Число разлитых унций подчиняется нормальному закону с математическим ожиданием, зависящим от настройки аппарата. Количество унций напитка, разлитых отдельным аппаратом, имеет стандартное отклонение σ = 0,4 унции. Пусть ёмкости объёмом в 8 унций наполняются кока-колой. Сколько унций напитка должен в среднем разливать аппарат, чтобы не более 3% ёмкостей оказались переполненными?

20. Налоговая инспекция утверждает, что нарушения налогового законодательства характерны для 35% предприятий города. Тщательной проверке были подвергнуты 59 предприятий. Чему равна вероятность того, что доля предприятий – нарушителей будет отличаться от истинной доли более чем на 0,12?

Тема 6. ВАРИАЦИОННЫЕ РЯДЫ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Пример 6.1 При обследовании 50 членов семей рабочих и служащих установлено следующее количество членов семьи: 5; 3; 2; 1; 4; 6; 3; 7; 9; 1; 3; 2; 5; 6; 8; 2; 5; 2; 3; 6; 8; 3; 4; 4; 5; 6; 5; 4; 7; 5; 6; 4; 8; 7; 4; 5; 7; 8; 6; 5; 7; 5; 6; 6; 7; 3; 4; 6; 5; 4.

а) Составьте вариационный ряд распределения частот;

б) Постройте полигон распределения частот, кумуляту;

в) Определите средний размер (среднее число членов) семьи;

г) Охарактеризуйте колеблемость размера семьи с помощью показателей вариации (дисперсии, среднего квадратического отклонения, коэффициента вариации).

Объясните полученные результаты, сделайте выводы.

Решение. а) В данной задаче изучаемый признак является дискретно варьирующим, т.к. размер семей не может отличаться друг от друга менее чем на одного человека. Следовательно, необходимо построить дискретный вариационный ряд.

Чтобы построить вариационный ряд, необходимо подсчитать: сколько раз встречаются те или иные значения признака, и упорядочить их в порядке возрастания или убывания.

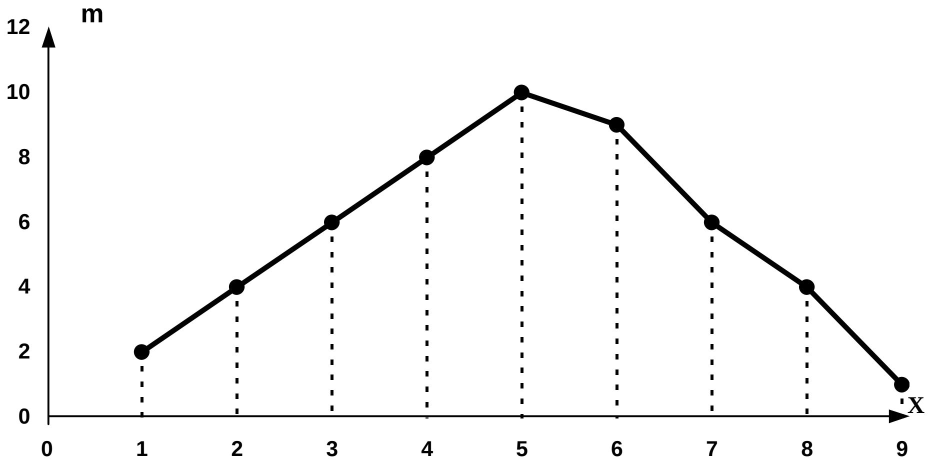
Значения изучаемого признака - размер семьи - обозначим x_i, частоты - m_i.

Произведем упомянутые расчеты и запишем полученные результаты в таблице:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m_i	2	4	6	8	10	9	6	4	1

б) Дискретный вариационный ряд графически можно представить с помощью полигона распределения частот или частостей.

Построим полигон распределения частот:



Для того чтобы построить кумуляту, необходимо рассчитать накопленные частоты или частости.

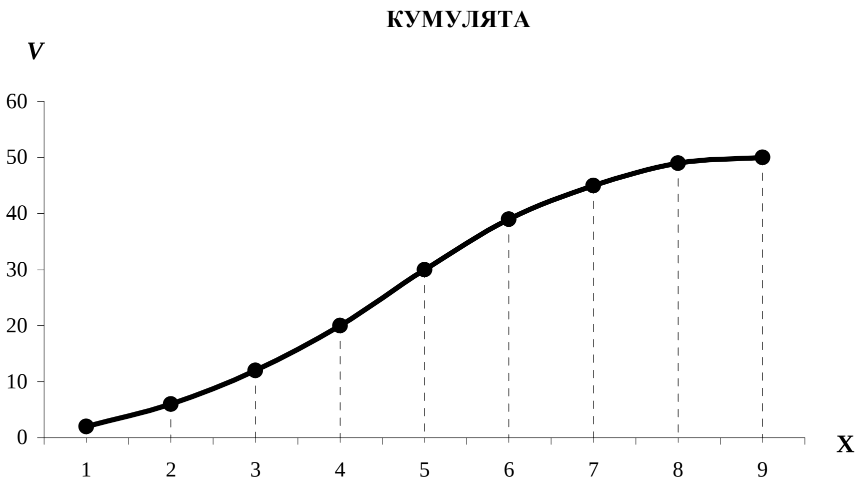
Накопленная частота первого варианта $x_1 = 1$ равна самой частоте этого варианта, т.е. двум: $v_1 = 2$.

Накопленная частота второго варианта $x_2 = 2$ равна сумме частот первого и второго вариантов, т.е. $v_2 = 2 + 4 = 6$.

Далее, аналогично:

$v_3 = 12$; $v_4 = 20$; $v_5 = 30$; $v_6 = 39$; $v_7 = 45$; $v_7 = 49$; $v_8 = 50$.

Построим кумуляту:



в) Рассчитаем средний размер (среднее число членов) семьи. Так как частоты отличны друг от друга, расчет средней арифметической произведем по формуле (6.9).

$$\bar{x} = \frac{1\cdot 2 + 2\cdot 4 + 3\cdot 6 + 4\cdot 8 + 5\cdot 10 + 6\cdot 9 + 7\cdot 6 + 8\cdot 4 + 9\cdot 1}{2+4+6+8+10+9+6+4+1} =$$

$$= \frac{2+8+24+32+50+54+42+32+9}{50} = \frac{253}{50} = 5{,}06.$$

Средний размер семьи - 5,06 человека.

г) Так как частоты - неодинаковы, для расчета дисперсии размера семьи используем формулу (6.12).

$$D(X) = \frac{(1-5{,}06)^2\cdot 2 + (2-5{,}06)^2\cdot 4 + (3-5{,}06)^2\cdot 6 + (4-5{,}06)^2\cdot 8}{2+4+6+8+10+9+6+4+1} +$$

$$+ \frac{(5-5{,}06)^2\cdot 10 + (6-5{,}06)^2\cdot 9 + (7-5{,}06)^2\cdot 6 + (8-5{,}06)^2\cdot 4}{50} +$$

$$+ \frac{(9-5{,}06)^2\cdot 1}{50} = 3{,}6964.$$

Дисперсия размера семьи - 3,6964 чел^2.

Найдем среднее квадратическое отклонение размера семьи по формуле (6.13).

$$\sigma(X) = \sqrt{3{,}6964} = 1{,}9226.$$

Среднее квадратическое отклонение размера семьи - 1,9226 чел.

Найдем коэффициент вариации размера семьи по формуле (6.14).

$$V(X) = \frac{1{,}9226}{5{,}06}\cdot 100\% = 38\%.$$

Коэффициент вариации составляет 38%. Так как коэффициент вариации больше 35%, можно сделать вывод о том, что изучаемая совокупность семей является неоднородной, чем и объясняется высокая колеблемость размера семьи в данной совокупности.

Ввиду неоднородности семей, попавших в выборку, использование средней арифметической для характеристики наиболее типичного уровня размера семьи не вполне оправданно - средняя арифметическая нетипична для изучаемой совокупности. В качестве характеристик наиболее типичного уровня размера семьи в данной совокупности лучше использовать моду или медиану.

Пример 6.2 Имеются данные о годовой мощности предприятий цементной промышленности :

Предприятия с годовой мощностью, тыс. тонн	Количество предприятий
до 500	27
500 – 1000	11
1000 – 2000	8
2000 – 3000	8
свыше 3000	2

а) Постройте гистограмму, кумуляту;

б) Рассчитайте среднюю мощность предприятий;

в) Найдите дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации.

Объясните полученные результаты, сделать выводы.

Решение. а) Данные о годовой мощности предприятий цементной промышленности представлены в виде интервального вариационного ряда - значения признака заданы в виде интервалов. При этом первый и последний интервалы - открытые: оба интервала не имеют одной из границ. Наконец, данный интервальный вариационный ряд - с неравными интервалами: интервальные разности (разность между верхней и нижней границами интервала) интервалов неодинаковы.

Условно закроем границы открытых интервалов.

Интервальная разность второго интервала равна: 1000 - 500 = 500. Следовательно, нижняя граница первого интервала составит: 500 - 500 = 0.

Интервальная разность предпоследнего интервала равна: 3000 - 2000 = 1000. Следовательно, верхняя граница последнего интервала составит: 3000 + 1000 = 4000.

В результате, получим следующий вариационный ряд:

x_i	m_i
0 - 500	27
500 - 1000	11
1000 - 2000	8
2000 - 3000	8
3000 - 4000	2

Учитывая неодинаковую величину интервалов, для построения гистограммы рассчитаем абсолютные плотности распределения по формуле (6.6).

$$f(a)_1 = \frac{27}{500-0} = 0{,}054;$$

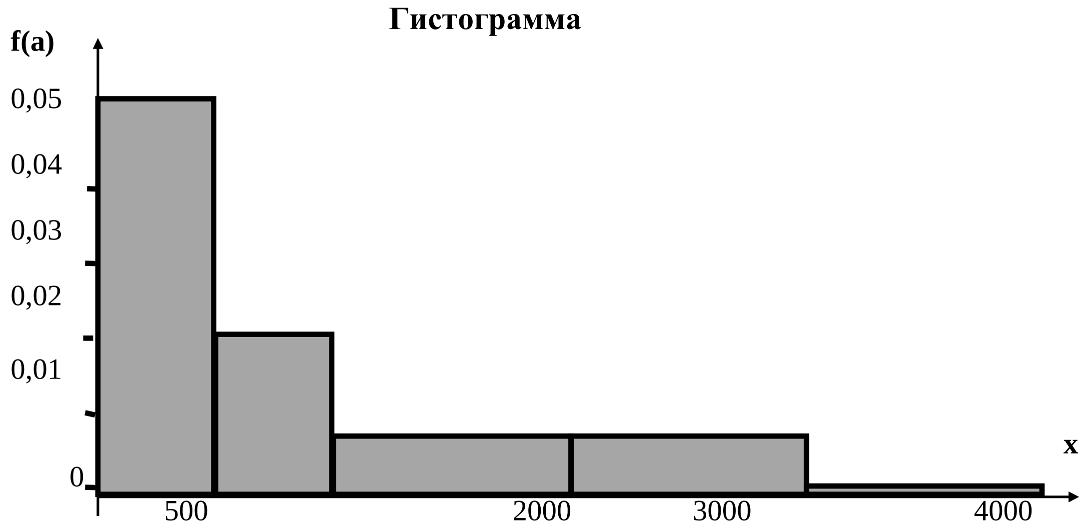
$$f(a)_2 = \frac{11}{1000-500} = 0{,}022;$$

$$f(a)_3 = \frac{8}{2000-1000} = 0{,}008;$$

$$f(a)_4 = \frac{8}{3000-2000} = 0{,}008;$$

$$f(a)_1 = \frac{2}{4000-3000} = 0{,}002.$$

Построим гистограмму:



Для того чтобы построить кумуляту, необходимо рассчитать накопленные частоты или частости.

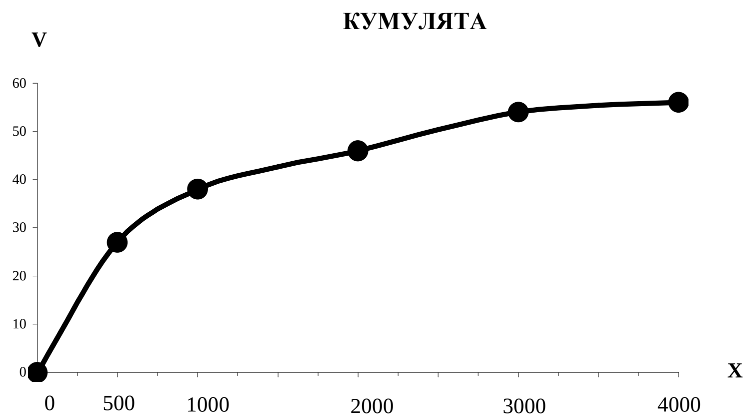
Накопленная частота нижней границы первого варианта x=0 равна нулю. Накопленная частота верхней границы первого интервала равна частоте этого интервала, т.е. 27.

Накопленная частота верхней границы второго интервала равна сумме частот первого и второго интервалов, т.е. 27 + 11 = 38.

Далее, аналогично:

38 + 8 = 46; 46 + 8 = 54; 54 + 2 = 56.

Построим кумуляту:



б) Рассчитаем среднюю мощность предприятий цементной промышленности.

Так как частоты интервалов - разные, используем для расчета средней арифметической формулу (6.9). При расчете числовых характеристик интервального вариационного ряда в качестве значений признака принимаются середины интервалов.

Рассчитаем середины интервалов:

$$x_1 = \frac{500+0}{2} = 250; \quad x_2 = \frac{1000+500}{2} = 750; \quad x_3 = \frac{2000+1000}{2} = 1500;$$

$$x_4 = \frac{3000+2000}{2} = 2500; \quad x_5 = \frac{4000+3000}{2} = 3500.$$

Теперь расчет средней арифметической примет вид:

$$\bar{x} = \frac{250 \cdot 27 + 750 \cdot 11 + 1500 \cdot 8 + 2500 \cdot 8 + 3500 \cdot 2}{27 + 11 + 8 + 8 + 2} =$$

$$= \frac{6750 + 8250 + 12000 + 20000 + 7000}{56} = \frac{54000}{56} = 964{,}2857.$$

Средняя мощность предприятий цементной промышленности составила 964,2857 тыс. тонн.

Следует отметить, что использование с той или иной целью средней арифметической, рассчитанной по данным интервального ряда с открытыми интервалами, может привести к серьезным ошибкам. Это связано с тем, что открытые интервалы закрываются условно, в действительности значения признака у объектов, попадающих в открытые интервалы, могут выходить далеко за их условные границы.

В связи с этим, для оценки наиболее типичного уровня изучаемого признака по данным интервального ряда с открытыми интервалами лучше использовать моду или медиану.

в) Оценим колеблемость мощности предприятий цементной промышленности.

Так как частоты - неодинаковы, для расчета дисперсии используем формулу (6.12)

$$D(X) = \frac{(250 - 964{,}2857)^2 \cdot 27 + (750 - 964{,}2857)^2 \cdot 11 + (1500 - 964{,}2857)^2 \cdot 8}{27 + 11 + 8 + 8 + 2} +$$

$$+ \frac{(2500 - 964{,}2857)^2 \cdot 8 + (3500 - 964{,}2857)^2 \cdot 2}{56} = 862563{,}7755.$$

Дисперсия мощности предприятий - 862563,7755 (тыс. тонн)^2.

Найдем среднее квадратическое отклонение мощности предприятий по формуле (6.13)

$$\sigma(X) = \sqrt{862563{,}7755} = 928{,}7431.$$

Среднее квадратическое отклонение мощности предприятий - 928,7431 тыс. тонн.

Найдем коэффициент вариации по формуле (6.14)

$$V(X) = \frac{928{,}7431}{964{,}28575} \cdot 100\% = 96{,}31\%.$$

Коэффициент вариации годовой мощности предприятий цементной промышленности составляет 96,31%. Так как коэффициент вариации больше 35%, можно сделать вывод о том, что изучаемая совокупность предприятий является неоднородной, в ее состав вошли и крупные и мелкие предприятия, что и обусловило высокую колеблемость годовой мощности.

Следовательно, использование средней арифметической для характеристики наиболее типичного уровня годовой мощности предприятий цементной промышленности неверно - средняя арифметическая нетипична для изучаемой совокупности. Это еще раз подтверждает необходимость использования моды или медианы для характеристики наиболее типичного уровня годовой мощности данной совокупности предприятий цементной промышленности.

Задачи к теме 6 «Вариационные ряды и их характеристики».

1. В течение месяца страховой компанией было выплачено 6 страховых возмещений по договорам имущественного страхования. Размер выплат составил (тыс. руб.): 128, 256, 347, 141, 95, 107. Определите средний размер выплат. Охарактеризуйте колеблемость размеров страховых возмещений с помощью различных показателей вариации. Сделайте выводы.

2. Служба почтовой эксперess-доставки анализирует объем корреспонденции из Ростова - на - Дону в Москву. Согласно полученной информации в течение недели количество отправлений варьировалось следующим образом: 6 ,9, 14, 16, 18, 10, 5, 6. Определите среднедневной объем отправлений, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации. Объясните полученные результаты.

3. На основании данных о выпуске иностранных автомобилей различных марок в России в 2005 году определить средний объем производства иномарок, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации. Объяснить полученные результаты.

Марки автомобилей	Kia	Renault	Hyundai	Ford	Chevrolet	Chery	Hummer

Произведено в 2005 году, тыс.штук	16,3	10,2	44,4	32,0	51,8	8,3	3,5

4. На основании данных о динамике импорта рыбных товаров Россией в 2001-2007 годах (в млн. долл.) определить среднегодовой объем импорта рыбных товаров, дисперсию, среднее квадратическое отклонение и коэффициент вариации. Объяснить полученные результаты.

Годы	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007*
Рыба свежая и охлажденная	6,2	13,9	32,4	72,2	131,9	150,2	170,5

* Данные за 2007 год являются прогнозными.

5. Имеются данные о размерах чистой прибыли крупнейших российских нефтяных компаний в первом полугодии 2006 года:

Компания	«Лукойл»	«Роснефть»	«ТНК-ВР»	«Сургутнефть»	«Газпромнефть»	«Татнефть»
Чистая прибыль (млрд.руб.)	43,2	60,0	38,7	47,9	30,0	23,4

Определите средний размер чистой прибыли нефтяной компании, дисперсию, среднее квадратическое отклонение и коэффициент вариации. Объясните полученные результаты.

6. Менеджер проводит анализ эффективности работы аптеки за неделю. Одним из показателей эффективности является объем выручки, дневная величина которой была соответственно равна 19, 25 ,31, 30 ,16, 22, 11, 14 тыс. руб. Рассчитайте среднедневной объем выручки, дисперсию и коэффициент вариации. Сделайте выводы.

7. На основании данных о численности студентов учебных заведений среднего профессионального образования за период 2001-2005гг. определить среднегодовую численность студентов, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации. Объяснить полученные результаты.

Годы	2001	2002	2003	2004	2005
Число студентов, (млн.чел.)	2,470	2,585	2,612	2,503	2,461

8. Имеются данные о распределении городского населения по затратам на ежемесячную оплату электроэнергии:

Размер оплаты (руб.)	Менее 100	100-200	200-300	300-400	400-500	500-600	Более 600
Удельный вес в общей численности населения (%)	12	29	25	15	11	6	2

Определить среднемесячные затраты городского населения на оплату электроэнергии. Найти и проанализировать дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации. Построить гистограмму распределения городского населения по затратам на ежемесячную оплату электроэнергии. Сделать выводы.

9.По данным поискового сайта Рамблер доля Интернет-пользователей в различных возрастных группах распределена следующим образом:

Возраст, лет	18-25	25-35	35-45	45 и более
Доля Интернет-пользователей (% от числа опрошенных)	36	31	20	13

На основании этих данных определить средний возраст Интернет-пользователей. Найти и проанализировать дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации. Построить гистограмму распределения доли Интернет-пользователей по различным возрастным группам. Сделать выводы.

10. Имеются данные о распределении объемов продаж мобильных телефонов в сетевых салонах связи по ценовым группам:

Цена, тыс. руб.	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7
Доля в объеме продаж (%)	14	23	25	23	8	9

Определить среднюю цену мобильного телефона, продаваемого в сетевых салонах связи, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации. Построить гистограмму распределения объемов продаж мобильных телефонов по ценовым группам. Сделать выводы.

11.Для выяснения возрастных особенностей кадрового состава сотрудников фирмы было произведено обследование, в результате которого получены следующие данные:

Возраст сотрудников, лет	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	Старше 50
Число сотрудников	20	25	30	20	28	15	12

Определить средний возраст сотрудника фирмы, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации. Построить гистограмму распределения числа сотрудников по интервалам возраста. Сделать анализ полученных результатов.

12. Ниже приводятся данные о возрастном составе безработных города, зарегистрированных в службе занятости, в %:

Возраст (лет)	до 20	20-24	25-29	30-49	50-54	55-59	60 и старше
Мужчины	7,7	17,0	11,9	50,9	4,2	5,7	2,6
Женщины	11,2	18,5	11,7	49,5	4,0	3,8	1,3

Найдите средний возраст безработных мужчин и женщин, дисперсию, среднее квадратическое отклонение и коэффициент вариации. Оцените различия показателей возрастного состава безработных мужчин и женщин. Сделайте выводы.

13. Для оценки состояния деловой активности промышленных предприятий различных форм собственности были проведены выборочные бизнес-обследования и получены следующие результаты:

Интервалы значений показателя деловой активности (в баллах)	0 - 8	8 - 16	16 - 24	24 - 32
Число предприятий (акционерные общества открытого типа)	10	15	8	5

Постройте гистограмму распределения частот. Найдите среднее значение показателя деловой активности, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации. Объясните полученные результаты.

14. Имеются данные о числе дней, пропущенных работниками предприятия в текущем месяце по болезни.

Число пропущенных дней	0	1	2	3	4	5
Число работников	10	17	25	28	30	27

Постройте полигон распределения частот. Найдите среднее число пропущенных дней, стандартное отклонение, коэффициент вариации. Является ли распределение симметричным?

15. Постройте гистограмму частот, найдите среднюю арифметическую, среднее квадратическое отклонение и коэффициент вариации для данных о дневной выручке в магазине электроники:

Выручка, у.е.	0-200	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700
Число дней	3	5	9	14	8	3

16. Администрацию универсама интересует оптимальный уровень запасов продуктов в торговом зале, а также среднемесячный объем покупок товаров, которые не являющихся предметом ежедневного потребления в семье (например, таких как сода). Для выяснения этого вопроса менеджер универсама в течение января регистрировал частоту покупок стограммовых пакетиков с содой и собрал следующие данные (x_i): 8, 4, 4, 9, 3, 3, 1, 2, 0, 4, 2, 3, 5, 7, 10, 6, 5, 7, 3, 2, 9, 8, 1, 4, 6, 5, 4, 2, 1, 8.

Постройте вариационный ряд, определите его числовые характеристики. Какие рекомендации Вы дали бы администрации универсама?

17. Число пассажиров компании «Аэрофлот - Дон» рейса Ростов – Стамбул в мае текущего года составило: 125, 130, 121, 124, 128, 136, 125, 130, 124, 128, 125, 125, 130, 128, 125, 128.

Составьте вариационный ряд. Чему равно среднее число пассажиров в рейсе? Рассчитайте показатели вариации. Сделайте анализ полученных результатов.

18. Имеются данные об объемах экспорта российской нефти в Польшу по нефтепроводу «Дружба» за первый квартал 2007 года:

Компания -	«Лукойл»	«Роснефть»	«ТНК-ВР»	«Сургутнефть»	«Газпромнефть»	«Татнефть»

экспортер						
Объем экспорта (млн.т)	0,496	1,380	1,055	1,000	0,600	0,300

Определите средний объем экспорта нефти в Польшу в первом квартале 2007 года. Рассчитайте дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации. Проанализируйте полученные результаты.

19. Имеются данные о вредных выбросах в атмосферу в 2006 году по ряду крупных российских городов:

Город	Москва	Санкт - Петербург	Самара	Краснодар	Ростов-на-Дону	Новосибирск	Челябинск
Объем выбросов в атмосферу (тыс. тонн)	89,0	52,5	33,5	99,0	10,6	109,2	140,9

Определить средний объем выбросов в атмосферу, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации. Проанализировать полученные результаты.

20. Имеются данные об объемах загрязненных сточных вод по ряду крупных российских городов в 2006 году:

Город	Москва	Санкт-Петербург	Самара	Краснодар	Ростов-на-Дону	Новосибирск	Челябинск
Объем загрязненных сточных вод (тыс. тонн)	1922,0	753,0	238,0	74,0	104,0	4,1	234,0

Определить средний объем загрязненных сточных вод, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации. Проанализировать полученные результаты.

Тема 7. ВЫБОРОЧНЫЙ МЕТОД И СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ

Пример 7.1. С помощью собственно-случайного повторного отбора руководство фирмы провело выборочное обследование 900 своих служащих. Средний стаж их работы в фирме равен 8,7 года, а среднее квадратическое (стандартное) отклонение - 2,7 года. Среди обследованных оказалось 270 женщин. Считая стаж работы служащих фирмы распределённым по нормальному закону, определите:

а) с вероятностью 0,95 доверительный интервал, в котором окажется средний стаж работы всех служащих фирмы;

б) с вероятностью 0,90 доверительный интервал, накрывающий неизвестную долю женщин во всем коллективе фирмы.

Решение. По условию задачи выборочное обследование проведено с помощью собственно-случайного повторного отбора. Объем выборки n = 900 единиц, т.е. выборка - большая.

а) Найдем границы доверительного интервала среднего стажа работы всего коллектива фирмы, т.е. границы доверительного интервала для генеральной средней.

По условию: $\tilde{X}$ = 8,7; σ = 2,7; n = 900; γ = 0,95.

Используем формулу:

$$P(\tilde{X}-t\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\overline{X}<\tilde{X}-t\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}})=2\Phi_0(t)=\gamma$$

Найдем t из соотношения $2\Phi_0(t) = \gamma$:

$$2\Phi_0(t) = 0{,}95;$$

аса (приложение 2) найдем, при каком t

$\Phi_0(t) = 0{,}475$.

$$\Phi_0(1{,}96)\ \Phi_0(t) = 0{,}95 / 2 = 0{,}475;$$

По таблице функции Лапл = 0,475.

Следовательно, t = 1,96.

Найдем предельную ошибку выборки:

$$\Delta = t\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};$$

$$\Delta = 1{,}96\cdot\frac{2{,}7}{\sqrt{900}} = 1{,}96\cdot 0{,}09 = 0{,}1764.$$

$$\tilde{X}-\Delta<\overline{X}<\tilde{X}+\Delta;$$

$$8{,}7-0{,}1764<\overline{X}<8{,}7+0{,}1764;$$

$$8{,}5236<\overline{X}<8{,}8764.$$

С вероятностью 0,95 можно ожидать, что средний стаж работы всего коллектива фирмы находится в интервале от 8,5236 до 8,8764 года.

б) Теперь оценим истинное значение доли женщин во всем коллективе фирмы.

По условию: m = 270; n = 900; γ = 0,9.

Выборочная доля $w = \dfrac{270}{900} = 0{,}3$.

Рассмотрим формулу:

$$P\left(w-t\cdot\sqrt{\frac{w(1-w)}{n}}<p<w+t\cdot\sqrt{\frac{w(1-w)}{n}}\right)=2\Phi_0(t)=\gamma.$$

Найдем t из соотношения $2\Phi_0(t) = \gamma$:

$$2\Phi_0(t) = 0{,}9;$$

$$\Phi_0(t) = 0{,}9 / 2 = 0{,}45.$$

По таблице функции Лапласа (приложение 2) определим при каком t $\Phi_0(t) = 0{,}45$.

$\Phi_0(1{,}64) = 0{,}45$.

Следовательно, t = 1,64.

Предельная ошибка выборки определяется по формуле:

$$\Delta = t \cdot \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}};$$

$$\Delta = 1{,}64 \cdot \sqrt{\frac{0{,}3 \cdot (1-0{,}3)}{900}} = 1{,}64 \cdot \sqrt{\frac{0{,}3 \cdot 0{,}7}{900}} = 1{,}64 \cdot 0{,}0153 = 0{,}0251..$$

$$w - \Delta < p < w + \Delta;$$

$$0{,}3 - 0{,}0251 < p < 0{,}3 + 0{,}0251;$$

$$0{,}2749 < p < 0{,}3251.$$

Итак, с вероятностью 0,9 можно ожидать, что доля женщин во всем коллективе фирмы находится в интервале от 0,2749 до 0,3251.

Ответ. Можно ожидать, что с вероятностью 0,95, средний стаж работы всех служащих фирмы находится в интервале от 8,5236 до 8,8764 года. С вероятностью 0,90 можно гарантировать, что доля женщин во всем коллективе фирмы находится в интервале от 0,2749 до 0,3251.

Пример 7.2 Изменим условие примера 7.1.

а) С помощью собственно-случайного повторного отбора определяется средний стаж работы служащих фирмы. Предполагается, что он подчиняется нормальному закону. Каким должен быть объем выборки, чтобы с доверительной вероятностью 0,95 можно было утверждать, что принимая полученный средний стаж работы за истинный, совершается погрешность, не превышающая 0,5 года, если стандартное отклонение σ равно 2,7 года?

б) Каким должен быть объем собственно-случайной повторной выборки, чтобы с надежностью 0,90 можно было утверждать, что максимальное отклонение выборочной доли женщин в выборке от доли женщин во всем коллективе фирмы не превышало 0,05, если в прошлом аналогичном обследовании выборочная доля женщин оказалась равной 0,3?

Решение. В данной задаче нужно найти необходимую численность выборки. Расчет необходимой численности выборки дает ответ на вопрос: “Сколько нужно обследовать единиц совокупности, чтобы с заранее заданной вероятностью не превысить заранее заданную ошибку?”

а) Дано: $\Delta = 0{,}5$; $\sigma = 2{,}7$; $\gamma = 0{,}95$.

По условию задачи требуется найти необходимую численность выборки для средней при повторном отборе.

Воспользуемся формулой расчета необходимой численности выборки для средней для собственно-случайного повторного отбора:

$$n = \frac{t^2\sigma^2}{\Delta^2}.$$

Неизвестное значение t найдем из соотношения $2\Phi_0(t) = \gamma$:

$$2\Phi_0(t) = 0{,}95;$$

$$\Phi_0(t) = 0{,}95 / 2 = 0{,}475;$$

По таблице функции Лапласа (приложение 2) найдем при каком t
$\Phi_0(t) = 0{,}475$.

$\Phi_0(1{,}96) = 0{,}475$.

Следовательно, $t = 1{,}96$.

Рассчитаем необходимую численность выборки:

$$n = \frac{1{,}96^2 \cdot 2{,}7^2}{0{,}5^2} = 112{,}02.$$

Так как n - целое число, а также, учитывая необходимость не превысить заданную ошибку, округлим полученный результат до большего целого.

Следовательно, необходимо обследовать не менее 113 служащих.

Ответ. Чтобы с вероятностью 0,95 и Δ= 0,5 года с помощью собственно-случайного повторного отбора определить средний стаж работы в фирме, необходимо обследовать не менее 113 служащих.

б) Дано: $\Delta = 0{,}05$; $w = 0{,}3$; $\gamma = 0{,}9$.

По условию задачи требуется найти необходимую численность выборки для доли для собственно-случайного повторного отбора.

Воспользуемся формулой расчета необходимой численности выборки для доли для собственно-случайного повторного отбора:

$$n = \frac{t^2 w(1-w)}{\Delta^2}.$$

Найдем t из соотношения $2\Phi_0(t) = \gamma$:

$$2\Phi_0(t) = 0{,}9;$$

$$\Phi_0(t) = 0{,}9 / 2 = 0{,}45.$$

По таблице функции Лапласа (приложение 2) найдем при каком t
$\Phi_0(t) = 0{,}45$.

$\Phi_0(1{,}64) = 0{,}45$.

Следовательно, t = 1,64.

Рассчитаем необходимую численность выборки:

$$n = \frac{1{,}64^2 \cdot 0{,}3 \cdot (1-0{,}3)}{0{,}05^2} = 225{,}93.$$

Так как n - целое число, а также, учитывая необходимость не превысить заданную ошибку, округлим полученный результат до большего целого.

Следовательно, $n \approx 226$.

Ответ. Чтобы с вероятностью 0,9 и ошибкой $\Delta =$ 0,05 с помощью собственно-случайного повторного отбора определить долю женщин во всем коллективе фирмы, необходимо обследовать не менее 226 служащих.

Пример 7.3 Владелец автостоянки опасается обмана со стороны своих служащих (охраны автостоянки). В течение года (365 дней) владельцем автостоянки проведено 40 проверок. По данным проверок среднее число автомобилей, оставляемых на ночь на охрану, составило 400 единиц, а среднее квадратическое (стандартное) отклонение их числа - 10 автомобилей.

а) Считая отбор собственно-случайным, с вероятностью 0,99 оцените с помощью доверительного интервала истинное среднее число автомобилей, оставляемых на ночь на охрану. Обоснованны ли опасения владельца автостоянки, если по отчетности охранников среднее число автомобилей, оставляемых на ночь на стоянку, составляет 395 автомобилей?

Решение. По условию задачи выборочное обследование проведено с помощью собственно-случайного отбора. Очевидно, что отбор - бесповторный, т.к. не имеет смысла производить проверку более 1 раза в сутки. Объем выборки n = 40, что больше 30 единиц, т.е. выборка - большая. Объём генеральной совокупности N==365.

а) Найдем границы доверительного интервала для оценки среднего числа автомобилей, оставляемых на ночь на охрану, т.е. границы доверительного интервала для генеральной средней.

По условию: $\tilde{X} = 400$; $\sigma = 10$; $n = 40$; $\gamma = 0{,}99$; $N=365$

Используем формулу:

$$P\left(\tilde{X} - t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{1-\frac{n}{N}} < \overline{X} < \tilde{X} + t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{1-\frac{n}{N}}\right) = 2\Phi_0(t) = \gamma.$$

Найдем t из соотношения $2\Phi_0(t) = \gamma$:

$$2\Phi_0(t) = 0{,}99;$$

$$\Phi_0(t) = 0{,}99 / 2 = 0{,}495;$$

По таблице функции Лапласа (приложение 2) найдем при каком t
$\Phi_0(t) = 0{,}495$.

$\Phi_0(2{,}58) = 0{,}495$.

Следовательно, t = 2,58.

Найдем предельную ошибку выборки:

$$\Delta = t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{1-\frac{n}{N}};$$

$$\Delta = 2{,}58 \cdot \frac{10}{\sqrt{40}} \cdot \sqrt{1-\frac{40}{365}} = 3{,}8493.$$

$$\tilde{X} - \Delta < \overline{X} < \tilde{X} + \Delta;$$

$$400 - 3{,}8493 < \overline{X} < 400 + 3{,}8493;$$

$$396{,}1507 < \overline{X} < 403{,}8493.$$

Ответ. С уверенностью в 99% можно ожидать, что среднее число автомобилей, оставляемых на ночь на охрану, находится в интервале от 396 до 404. Таким образом можно утверждать, что служащие автостоянки обманывают ее владельца.

Пример 7.4 В 24-х из 40 проверок число автомобилей на автостоянке не превышало 400 единиц.

С вероятностью 0,98 найдите доверительный интервал для оценки истинной доли дней в течение года, когда число оставляемых на стоянку автомобилей не превышало 400 единиц.

Решение. Определим границы доверительного интервала для доли дней в течение года, когда число оставляемых на стоянку автомобилей не превышало 400 единиц.

По условию: $m = 24$; $n = 40$; $\gamma = 0{,}98$.

Выборочная доля $w = \dfrac{24}{40} = 0{,}6.$

Так как $P\left(w - t\cdot\sqrt{\dfrac{w(1-w)}{n}\left(1-\dfrac{n}{N}\right)} < p < w + t\cdot\sqrt{\dfrac{w(1-w)}{n}\left(1-\dfrac{n}{N}\right)}\right) = 2\Phi_0(t) = \gamma,$

то найдем t из соотношения $2\Phi_0(t) = \gamma$:

$$2\Phi_0(t) = 0{,}98;$$

$$\Phi_0(t) = 0{,}98 / 2 = 0{,}49.$$

По таблице функции Лапласа (приложение 2) найдем при каком t
$\Phi_0(t) = 0{,}49$.

$\Phi_0(2{,}33) = 0{,}49$.

Следовательно, $t = 2{,}33$.

Найдем предельную ошибку выборки:

$$\Delta = t\cdot\sqrt{\frac{w(1-w)}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)};$$

$$\Delta = 2{,}33\cdot\sqrt{\frac{0{,}6\cdot(1-0{,}6)}{40}\cdot\left(1-\frac{40}{365}\right)} = 2{,}33\cdot\sqrt{\frac{0{,}6\cdot 0{,}4}{40}\cdot\left(1-\frac{40}{365}\right)} = 0{,}1703.$$

$$w - \Delta < p < w + \Delta;$$

$$0{,}6 - 0{,}1703 < p < 0{,}6 + 0{,}1703;$$

$$0{,}4297 < p < 0{,}7703.$$

Ответ. С вероятностью 0,98 можно ожидать, что доля дней в течение года, когда число оставляемых на стоянку автомобилей не превышало 400 единиц, находится в интервале от 0,4297 до 0,7703.

Пример 7.5 Изменим условие примера 7.3.

С помощью собственно-случайного бесповторного отбора определяется среднее число автомобилей, оставляемых на ночь на охрану. Предполагается, что оно подчиняется нормальному закону. Каким должен быть объём выборки, чтобы с вероятностью 0,95 можно было утверждать, что принимая полученное среднее число автомобилей по выборке за истинное, совершается погрешность, не превышающая 3 автомобилей, если среднее квадратическое отклонение σ равно 10 автомобилям?

Решение. Дано: $\Delta = 3$; $\sigma = 10$; $\gamma = 0{,}95$; $N=365$.

Воспользуемся формулой расчета необходимой численности выборки для средней для собственно-случайного бесповторного отбора:

$$n = \frac{t^2\cdot\sigma^2\cdot N}{\Delta^2\cdot N + t^2\cdot\sigma^2}.$$

Найдем t из соотношения $2\Phi_0(t) = \gamma$:

$$2\Phi_0(t) = 0{,}95;$$

$$\Phi_0(t) = 0{,}95 / 2 = 0{,}475;$$

По таблице функции Лапласа (приложение 2) найдем при каком t
$\Phi_0(t) = 0{,}475$.

$\Phi_0(1,96) = 0,475$.

Следовательно, t = 1,96.

Рассчитаем объём выборки:

$$n = \frac{1,96^2 \cdot 10^2 \cdot 365}{3^2 \cdot 365 + 1,96^2 \cdot 10^2} = 38,22\,.$$

Так как n - целое число, а также, учитывая необходимость не превысить заданную ошибку, округлим полученный результат до большего целого.

Следовательно, необходимо провести не менее 39 проверок.

Ответ. Для определения среднего числа автомобилей, оставляемых на ночь на охрану с вероятностью 0,95 и Δ=3, необходимо, необходимо провести не менее 39 проверок.

Пример 7.6 Изменим условие примера 7.4.

Каким должен быть объём собственно-случайной бесповторной выборки, чтобы с вероятностью 0,9 можно было утверждать, что максимальное отклонение выборочной доли дней от доли дней в течение года (когда среднее число оставляемых на охрану автомобилей не превышало 400 единиц) не превышало 0,1, если по данным прошлых проверок выборочная доля таких дней составляла 0,6?

Решение. Дано: $\Delta = 0,1$; w = 0,6; $\gamma = 0,9$; N=365.

Воспользуемся формулой расчета необходимой численности выборки для доли при собственно-случайном бесповторном отборе:

$$n = \frac{t^2 \cdot w \cdot (1-w) \cdot N}{\Delta^2 \cdot N + t^2 \cdot w \cdot (1-w)}.$$

Найдем t из соотношения $2\Phi_0(t) = \gamma$:

$$2\Phi_0(t) = 0,9;$$

$$\Phi_0(t) = 0,9 / 2 = 0,45.$$

По таблице функции Лапласа (приложение 2) найдем при каком t
$\Phi_0(t) = 0,45$.

$\Phi_0(1,64) = 0,45$.

Следовательно, t = 1,64.

Рассчитаем необходимую численность выборки:

$$n = \frac{1,64^2 \cdot 0,6 \cdot (1-0,6) \cdot 365}{0,1^2 \cdot 365 + 1,64^2 \cdot 0,6 \cdot (1-0,6)} = 54,85\,.$$

Так как n - целое число, а также, учитывая необходимость не превысить заданную ошибку, округлим полученный результат до большего целого.

Следовательно, $n \approx 55$.

Ответ. Для того чтобы с вероятностью 0,9 и предельной ошибкой 0,1 с помощью собственно-случайного бесповторного отбора определить искомую долю дней в течение года, необходимо провести не менее 55 проверок.

Пример 7.7 Служба контроля Энергосбыта провела выборочную проверку расхода электроэнергии жителями одного из многоквартирных домов. С помощью собственно-случайного отбора выбрано 10 квартир и определен расход электроэнергии в течение одного из летних месяцев (кВт-час): 125; 78; 102; 140; 90; 45; 50; 125; 115; 112.

С надежностью 0,95 определите доверительный интервал для оценки среднего расхода электроэнергии на 1 квартиру во всем доме при условии, что в доме 70 квартир, а отбор был:

а) повторным;

б) бесповторным.

Решение. По условию задачи выборочное обследование проведено с помощью собственно-случайного отбора. Объем выборки n = 10 единиц, т.е. *выборка - малая*.

а) Считая отбор повторным, найдем доверительный интервал для оценки среднего расхода электроэнергии на 1 квартиру во всем доме, т.е. границы доверительного интервала для оценки генеральной средней.

Для этого используем формулы:

$$P\left(\tilde{X} - t\cdot\frac{s}{\sqrt{n}} < \overline{X} < \tilde{X} + t\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 2S(t) = \gamma;$$

$$\Delta = t\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Для определения границ доверительного интервала необходимо рассчитать выборочные среднюю и среднее квадратическое (стандартное) отклонение.

Рассчитаем выборочную среднюю арифметическую:

$$\tilde{X} = \frac{125+78+102+140+90+45+50+125+115+112}{10} = \frac{982}{10} = 98{,}2.$$

Найдем исправленную выборочную дисперсию:

$$s^2 = \frac{(125-98{,}2)^2 + (78-98{,}2)^2 + (102-98{,}2)^2 + (140-98{,}2)^2 + (90-98{,}2)^2}{10-1} +$$

$$+\frac{(45-98{,}2)^2 + (50-98{,}2)^2 + (125-98{,}2)^2 + (115-98{,}2)^2 + (112-98{,}2)^2}{10-1} =$$

$$= 1033{,}2889.$$

Найдем исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{1033{,}2889} = 32{,}1448.$$

Итак, дано: $\tilde{X}$ == 98,2; s = 32,1448; n = 10; γ = 0,95.

По таблице Стьюдента (Приложение 5) найдем t по уровню значимости α и числу степеней свободы k.

$\alpha = 1 - \gamma = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$;

$k = n - 1 = 10 - 1 = 9$.

$t_{\alpha=0,05;\ k=9} = 2{,}26$.

Найдем предельную ошибку выборки:

$$\Delta = t\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

$$\Delta = 2{,}26\cdot\frac{32{,}1448}{\sqrt{10}} = 22{,}9731.$$

$$\tilde{X} - \Delta < \overline{X} < \tilde{X} + \Delta;$$

$$98{,}2 - 22{,}9731 < \overline{X} < 98{,}2 + 22{,}9731;$$

$$75{,}2269 < \overline{X} < 121{,}1731.$$

Ответ. При условии, что отбор квартир был повторным, с вероятностью 0,95 можно ожидать, что средний расход электроэнергии на 1 квартиру во всем доме находится в интервале от 75,2269 до 121,1731 кВт-часа.

б) Найдем границы доверительного интервала для оценки среднего расхода электроэнергии на 1 квартиру во всем доме, считая отбор бесповторным.

Для этого используем формулы:

$$P\left(\tilde{X} - t\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}\sqrt{1-\frac{n}{N}} < \overline{X} < \tilde{X} + t\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}\sqrt{1-\frac{n}{N}}\right) = 2S(t) = \gamma.$$

$$\Delta = t\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}\sqrt{1-\frac{n}{N}}.$$

По условию: $\tilde{X}$ == 98,2; s = 32,1448; n = 10; γ = 0,95; $t_{\alpha=0,05;\ k=9}$ = 2,26; N = 70.

Найдем предельную ошибку выборки:

$$\Delta = 2{,}26\cdot\frac{32{,}1448}{\sqrt{10}}\cdot\sqrt{(1-\frac{10}{70})} = 21{,}2689.$$

$$\tilde{X} - \Delta < \overline{X} < \tilde{X} + \Delta;$$

$$98{,}2 - 21{,}2689 < \overline{X} < 98{,}2 + 21{,}2689\,;$$

$$76{,}9311 < \overline{X} < 119{,}4689\,.$$

Ответ. При условии, что отбор квартир был бесповторным, с вероятностью 0,95 можно ожидать, что средний расход электроэнергии на 1 квартиру во всем доме находится в интервале от 76,9311 до 119,4689 кВт-часа.

Задачи к теме 7 «Выборочный метод и статистическое оценивание».

1. Результаты 10-ти дневного наблюдения в молочном отделе супермаркета показали, что в среднем в день реализуется 144 пачки творога с исправленным средним квадратическим отклонением в 23 пачки. Оцените потребность супермаркета в закупке творога, построив 99% доверительный интервал.

2. Фирма, торгующая автомобилями в небольшом городе, собирает информацию о состоянии местного автомобильного рынка в текущем году. С этой целью из 8500 горожан в возрасте 18 лет и старше, отобрано 500 человек. Среди них оказалось 130 человек, планирующих приобрести новый автомобиль в текущем году. Оцените долю лиц в генеральной совокупности в возрасте 18 лет и старше, планирующих приобрести новый автомобиль в текущем году, если α = 0,01.

3. При выборочном опросе 1200 телезрителей оказалось, что 456 из них регулярно смотрят программы телеканала НТВ. Постройте 99%-ный доверительный интервал, оценивающий долю всех телезрителей, предпочитающих программы телеканала НТВ.

4. Выборочные обследования показали, что доля покупателей, предпочитающих новую модификацию зубной пасты, составляет 60% от общего числа покупателей данного товара. Каким должен быть объём выборки, чтобы можно было получить оценку генеральной доли с точностью не менее 0,1 при доверительной вероятности 0,954?

5. Среднемесячные расходы на питание домохозяйств из трех человек оцениваются по случайной выборке. С вероятностью 0,997 определите объем выборки, необходимой для такой оценки, если ошибка выборки не должна превышать 500 рублей, а по результатам более ранних исследований среднее квадратическое отклонение составило 2000 рублей.

6. Менеджер компании, занимающейся прокатом автомобилей, хочет оценить среднюю величину пробега одного автомобиля в течение месяца. Из 280 автомобилей, принадлежащих компании, методом случайной бесповторной выборки отобрано 35. По данным этой выборки установлено, что средний пробег автомобиля в течение месяца составляет 1342 км со стандартным отклонением 227 км. Считая пробег автомобиля случайной величиной, распределённой по нормальному закону, найти 95%-ный доверительный интервал, оценивающий средний пробег автомобилей всего парка в течение месяца.

7. Выборочные маркетинговые исследования показали, что 68% потребителей предпочитают приобретать черный чай без вкусовых добавок. Определите границы 95%-ного доверительного интервала доли таких потребителей в генеральной совокупности, если объем выборки составил 500 человек.

8. Выборочное исследование деятельности коммерческих банков региона показало, что в среднем каждый банк имеет 14 филиалов в регионе (со стандартным отклонением, равным 8). Найти объем выборки, позволивший сделать такую оценку, если предельная ошибка оценки генеральной средней находится в пределах 20% от ее выборочного среднего значения, а доверительная вероятность составляет 0,95.

9. Выборочное обследование распределения населения города по среднедушевому денежному доходу показало, что 25% обследованных в выборке имеют доход ниже прожиточного минимума. В каких пределах с надежностью 0,954 находится доля населения, имеющего среднедушевой доход ниже прожиточного минимума, в генеральной совокупности, если в городе проживает 1 млн. чел. и выборочное обследование осуществляется с помощью собственно-случайного бесповторного отбора?

10. Аудиторская фирма хочет проконтролировать состояние счетов одного из коммерческих банков. Для этого случайно отбираются 55 счетов. По 21 счету из 55 отобранных имело место движение денежных средств в течение месяца. Построить 95%-ный доверительный интервал, оценивающий долю счетов в генеральной совокупности, по которым имело место движение денежных средств в течение месяца.

11. Выборочные обследования, проведенные в сети строительных магазинов города, показали, что 45% горожан планируют ремонт квартиры или дома в течение следующих трех лет. Каким должен быть объем выборки, чтобы можно было получить оценку генеральной доли с точностью не менее 0,05 при доверительной вероятности 0,95, если в городе проживает 500000 человек ?

12. Предварительный опрос покупателей магазина рыболовных принадлежностей «Серебряный ручей» показал, что 25% из них планируют в дальнейшем делать покупки в этом магазине, если им будет предоставлена дисконтная карта. Каким должен быть объем выборки, необходимый для оценки генеральной доли постоянных покупателей, при заданной точности не менее 0,04 и доверительной вероятности 0,954?

13. Среднемесячный бюджет студентов в колледжах одного из штатов США оценивается по случайной выборке. Найдите наименьший объём выборки, необходимый для такой оценки с вероятностью 0,954, если среднее квадратическое отклонение предполагается равным 100 у.е., а предельная ошибка средней не должна превышать 25 у.е.

14. Коммерческий банк, изучая возможности предоставления долгосрочных кредитов населению, опрашивает своих клиентов для определения среднего размера такого кредита. Из 9700 клиентов банка опрошено 1000 человек. Среднее значение необходимого кредита в выборке составило 7750 у.е. со стандартным отклонением 1560 у.е. Найдите границы 95%-ного доверительного интервала для оценки неизвестного среднего значения кредита в генеральной совокупности.

15. Выборочное обследование показало, что 20% студентов университета нуждаются в общежитии. Каким должен быть объем случайной бесповторной выборки, в результате которой будет оценена генеральная доля с точностью не менее 0,02 при доверительной вероятности 0,954, если в университете обучается 6000 студентов дневного отделения?

16. По оценкам коммунальных служб города 10% потребителей имеют задолженности по оплате коммунальных услуг. Каким должен быть объем выборки, необходимой для оценки генеральной доли задолжников, если предельная ошибка выборки не должна превышать 0,05 при доверительной вероятности 0,954?

17. Строительная компания хочет оценить среднюю стоимость ремонтных работ, выполняемых для клиентов. Каким должен быть объем выборки среди 1200 клиентов строительной фирмы, если среднее квадратическое отклонение по результатам пробного

обследования составило 850 у.е., а предельная ошибка выборки не должна превышать 200 у.е. с вероятностью 0,95?

18. По данным автосалона, услугами гарантийного ремонта в течение года гарантии воспользовались 28% покупателей автомобилей. Постройте 95% доверительный интервал доли покупателей, пользующихся гарантийным ремонтом, если автосалон продал за год 297 автомобилей.

19. Опрос 20 горожан показал, что среднемесячные расходы на покупку журналов и газет составляют 125 рублей с исправленным средним квадратическим отклонением 60 рублей. Постройте 99% доверительный интервал для оценки среднемесячных расходов на прессу горожан в генеральной совокупности.

20. Для определения среднего размера дневной выручки маршрутных такси города была произведена 10%-ная случайная бесповторная выборка из 1200 маршрутных такси. В результате были получены данные о средней дневной выручке, которая составила 5000 рублей. В каких пределах с доверительной вероятностью 0,95 может находиться средняя дневная выручка всех маршрутных такси города, если среднее квадратическое отклонение составило 650 рублей?

Тема 8. ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Пример 8.1 В семи случаях из десяти фирма-конкурент компании "А" действовала на рынке так, как будто ей заранее были известны решения, принимаемые фирмой "А". На уровне значимости 0,05 определите, случайно ли это, или в фирме "А" работает осведомитель фирмы-конкурента?

Решение. Для того чтобы ответить на вопрос данной задачи, необходимо проверить статистическую гипотезу о том, совпадает ли данное эмпирическое распределение числа действий фирмы-конкурента с равномерным теоретическим распределением?

Если ходы, предпринимаемые конкурентом, выбираются случайно, т.е. в фирме "А" - нет осведомителя (инсайдера), то число "правильных" и "неправильных" ее действий должно распределиться поровну, т.е. по 5 (10/2). А это и есть отличительная особенность равномерного распределения.

Этот вид статистических гипотез относится к гипотезам о виде закона распределения генеральной совокупности.

Сформулируем нулевую и конкурирующую гипотезы согласно условию задачи.

H_0: $X \sim R(a; b)$ - случайная величина X подчиняется равномерному распределению с параметрами (a; b) (в контексте задачи - "в фирме "А" - нет осведомителя (инсайдера)"; "распределение числа удачных ходов фирмы-конкурента - случайно").

H_1: Случайная величина X не подчиняется равномерному распределению (в контексте задачи - "в фирме "А" - есть осведомитель (инсайдер)"; "распределение числа удачных ходов фирмы-конкурента - не случайно").

В качестве критерия для проверки статистических гипотез о неизвестном законе распределения генеральной совокупности используется случайная величина χ^2. Этот критерий называют критерием Пирсона.

Его наблюдаемое значение ($\chi^2_{\text{набл.}}$) рассчитывается по формуле:

$$\chi^2_{\text{набл.}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(m_{(\text{эмп.})i} - m_{(\text{теор.})i})^2}{m_{(\text{теор.})i}}, \qquad (8.1)$$

где $m_{(\text{эмп.})i}$ - эмпирическая частота i-той группы выборки;

$m_{(\text{теор.})i}$ - теоретическая частота i-той группы выборки.

Составим таблицу распределения эмпирических и теоретических частот:

$m_{(\text{эмп.})i}$	7	3
$m_{(\text{теор.})i}$	5	5

Найдем наблюдаемое значение $\chi^2_{\text{набл.}}$:

$$\chi^2_{\text{набл.}} = \frac{(7-5)^2}{5} + \frac{(3-5)^2}{5} = \frac{4}{5} + \frac{4}{5} = 1{,}6.$$

Критическое значение ($\chi^2_{\text{кр.}}$) следует определять по таблице распределения χ^2 (см. приложение 4) по уровню значимости α и числу степеней свободы k.

По условию $\alpha = 0{,}05$, а число степеней свободы рассчитывается по формуле:

$k = n - l - 1$,

где k - число степеней свободы;

n - число групп выборки;

l - число неизвестных параметров предполагаемой модели, оцениваемых по данным выборки (если все параметры предполагаемого закона известны точно, то $l = 0$).

По условию задачи число групп выборки (*n*) равно 2, т.к. могут быть только два варианта действий фирмы-конкурента: "удачные" и "неудачные", а число неизвестных параметров равномерного распределения (*l*) равно 0.

Отсюда, k = 2 - 0 - 1 = 1.

Найдем $\chi^2_{\text{кр.}}$ по уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числу степеней свободы k=1.

$$\chi^2_{\text{кр.}(\alpha=0{,}05;k=1)} = 3{,}8.$$

$\chi^2_{набл.} < \chi^2_{кр.}$, следовательно, на данном уровне значимости нулевую гипотезу нельзя отклонить, расхождения эмпирических и теоретических частот - незначимые. Данные наблюдений согласуются с гипотезой о равномерном распределении генеральной совокупности.

Это означает, что для утверждения о том, что действия фирмы-конкурента на рынке неслучайны; на уровне значимости α = 0,05 можно утверждать, что в фирме "А" нет платного осведомителя фирмы-конкурента.

Ответ. на уровне значимости α = 0,05 можно утверждать, что в фирме "А" нет платного осведомителя фирмы-конкурента.

Пример 8.2 На уровне значимости α = 0,025 проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, если известны эмпирические и теоретические частоты:

$m_{(эмп.)i}$	5	10	20	25	14	3
$m_{(теор.)i}$	6	14	28	18	8	3

Решение. Сформулируем нулевую и конкурирующую гипотезы согласно условию задачи.

H_0: X~N(a; σ^2) - случайная величина X подчиняется нормальному закону распределения с параметрами а и σ^2.

H_1: Случайная величина X не подчиняется нормальному закону распределения с параметрами а и σ^2.

В качестве критерия для проверки нулевой гипотезы используем критерий Пирсона χ^2.

Найдем наблюдаемое значение ($\chi^2_{набл.}$):

$$\chi^2_{набл.} = \frac{(5-6)^2}{6} + \frac{(10-14)^2}{14} + \frac{(20-28)^2}{28} + \frac{(25-18)^2}{18} + \frac{(14-8)^2}{8} + \frac{(3-3)^2}{3} \approx 10{,}8175.$$

Найдем критическое значение критерия ($\chi^2_{кр.}$) по таблице распределения χ^2 (приложение 4) по уровню значимости α и числу степеней свободы k.

По условию α = 0,025; число степеней свободы найдем по формуле:

$k = n - l - 1$,

где k - число степеней свободы;

n - число групп выборки;

l - число неизвестных параметров предполагаемой модели, оцениваемых по данным выборки.

По условию задачи число групп выборки (n) равно 6, а число неизвестных параметров нормального распределения (l) равно 2.

Отсюда, k = 6 - 2 - 1 = 3.

Найдем $\chi^2_{кр.}$ по уровню значимости α = 0,025 и числу степеней свободы k=3.

$\chi^2_{кр.(\alpha=0{,}025;k=3)} = 9{,}4.$

$\chi^2_{набл.} > \chi^2_{кр.}$, следовательно, на данном уровне значимости нулевая гипотеза отвергается в пользу конкурирующей, расхождения эмпирических и теоретических частот - значимые. Данные наблюдений не согласуются с гипотезой о нормальном распределении генеральной совокупности.

Ответ. На уровне значимости α = 0,025 данные наблюдений не согласуются с гипотезой о нормальном распределении генеральной совокупности.

Пример 8.3 Техническая норма предусматривает в среднем 40 сек. на выполнение определенной технологической операции на конвейере по производству часов. От работниц, работающих на этой операции, поступили жалобы, что они в действительности затрачивают на эту операцию больше времени. Для проверки данной жалобы произведены хронометрические измерения времени выполнения этой технологической операции у 16 работниц, занятых на этой операции, и получено среднее время выполнения операции $\tilde{X}$ = 42 сек. Можно ли по имеющимся хронометрическим данным на уровне значимости α = 0,01 отклонить гипотезу о том, что среднее время выполнения этой операции соответствует норме, если:

а) исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение s составило 3,5 сек.;

б) выборочное среднее квадратическое отклонение σ составило 3,5 сек.?

Решение. а) Для решения данной задачи необходимо проверить гипотезу о том, что неизвестная генеральная средняя нормальной совокупности точно равна определенному числу, когда *дисперсия генеральной совокупности неизвестна (*выборка мала, т.к. n = 16, меньше 30).

Сформулируем нулевую и конкурирующую гипотезы согласно условию задачи.

H_0: $a = a_0 = 40$ - неизвестное математическое ожидание *a* (нормально распределенной генеральной совокупности с неизвестной дисперсией) равно гипотетическому предполагаемому числовому значению a_0 (применительно к условию данной задачи - время выполнения технологической операции соответствует норме).

H_1: $a > 40$ - неизвестное математическое ожидание *a* (нормально распределенной генеральной совокупности с неизвестной дисперсией) больше числовому значению a_0 (применительно к условию данной задачи - время выполнения технологической операции больше установленной нормы).

Так как конкурирующая гипотеза - правосторонняя, то и критическая область - правосторонняя.

В качестве критерия для сравнения неизвестного математического ожидание *a* (нормально распределенной генеральной совокупности с неизвестной дисперсией) с гипотетическим числовым значением a_0, используется случайная величина t - критерий Стьюдента:

Его наблюдаемое значение ($t_{набл.}$) рассчитывается по формуле:

$$\mathbf{t_{набл.}} = \frac{\tilde{\mathbf{X}} - \boldsymbol{a_0}}{\mathbf{s}}\sqrt{\mathbf{n}}\,. \qquad \textbf{(8.2)}$$

где $\tilde{X}$ - выборочная средняя;

a_0 - числовое значение генеральной средней;

s - исправленное среднее квадратическое отклонение;

n - объем выборки.

Найдем наблюдаемое значение $t_{набл.}$:

$$t_{набл.} = \frac{42-40}{3{,}5}\cdot\sqrt{16} \approx 2{,}2857.$$

Критическое значение ($t_{кр.}$) следует находить по таблице распределения Стьюдента (приложение 5) по уровню значимости α и числу степеней свободы k.

По условию $\alpha = 0{,}01$; число степеней свободы найдем по формуле:

k = n - 1,

где k - число степеней свободы;

n - объем выборки.

k = 16 - 1 = 15.

Найдем $t_{кр.}$ по уровню значимости $\alpha = 0{,}01$ (для односторонней критической области) и числу степеней свободы k = 15:

$$t_{кр.(\alpha=0{,}01;k=15)} = 2{,}6.$$

Заметим, что при левосторонней конкурирующей гипотезе H_1: $a < 40$ $t_{кр.}$ следует находить по таблицам распределения Стьюдента (приложение 5) по уровню значимости α (для односторонней критической области) и числу степеней свободы k = n - 1 и присваивать ему "минус";

При двусторонней конкурирующей гипотезе H_1: $a \neq 40$ $t_{кр.}$ следует находить по таблицам распределения Стьюдента (приложение 5) по уровню значимости α (для двусторонней критической области) и числу степеней свободы k = n - 1).

$t_{набл.} < t_{кр}$, следовательно, на данном уровне значимости нет оснований отклонить нулевую гипотезу.

Ответ. По имеющимся хронометрическим данным на уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ нельзя отклонить гипотезу о том, что среднее время выполнения этой операции соответствует норме. Следовательно, жалобы работниц - необоснованны.

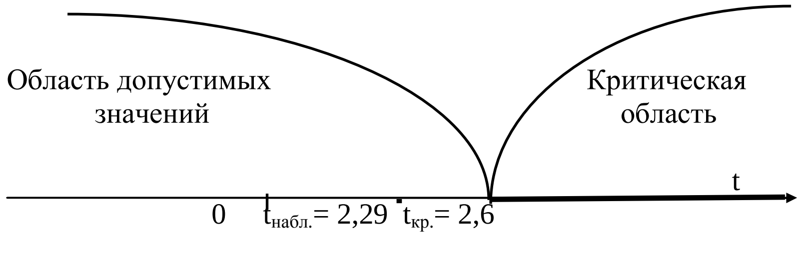


Рис 8.4.

Наблюдаемое значение критерия попадает в область допустимых значений, следовательно, нет оснований отклонить нулевую гипотезу.

б) Для решения данной задачи необходимо проверить гипотезу о том, что неизвестная генеральная средняя нормальной совокупности точно равна определенному числу, когда *дисперсия генеральной совокупности неизвестна.*

Алгоритм решения задачи будет тот же, что и в первом случае. Однако наблюдаемое значение $t_{набл.}$ будет рассчитывается по формуле:

$$\mathbf{t_{набл.}} = \frac{\tilde{\mathbf{X}} - \boldsymbol{a_0}}{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{выб.}}}\sqrt{\mathbf{n-1}}. \qquad \mathbf{(8.3)}$$

где $\tilde{X}$ - выборочная средняя;

a_0 - числовое значение генеральной средней;

$\sigma_{выб.}$ - выборочное среднее квадратическое отклонение;

n - объем выборки.

Найдем наблюдаемое значение ($t_{набл.}$):

$$t_{набл.} = \frac{42-40}{3{,}5}\cdot\sqrt{16-1} \approx 2{,}2131.$$

Критическое значение ($t_{кр.}$) следует находить по таблице распределения Стьюдента (приложение 5) по уровню значимости α и числу степеней свободы k.

$$t_{кр.(\alpha=0{,}01;k=15)} = 2{,}6.$$

$t_{набл.} < t_{кр}$, следовательно, на данном уровне значимости нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу, жалобы работниц - необоснованны.

Ответ. По имеющимся хронометрическим данным на уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ нельзя отклонить гипотезу о том, что среднее время выполнения этой операции соответствует норме, жалобы работниц - необоснованны.

Пример 8.4 Изменим условие предидущей задачи. Техническая норма предусматривает в среднем 40 сек. на выполнение определенной технологической операции на конвейере по производству часов. От работниц, работающих на этой операции, поступили жалобы, что они в действительности затрачивают на эту операцию больше времени. Для проверки данной жалобы произведены хронометрические измерения времени выполнения этой технологической операции у 36 работниц, занятых на этой операции, и получено среднее время выполнения операции $\tilde{X} = 42$ сек. Можно ли (предполагая время выполнения технологической операции случайной величиной, подчиняющейся нормальному закону) по имеющимся хронометрическим данным на уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ отклонить гипотезу о том, что среднее время выполнения этой операции соответствует норме, если известно, что среднее квадратическое отклонение генеральной совокупности σ составляет 3,5 сек.?

*Решение***.** Для решения данной задачи необходимо проверить гипотезу о том, что неизвестная генеральная средняя нормальной совокупности точно равна числовому значению, когда *дисперсия генеральной совокупности известна* (большая выборка, т.к. n = 36, больше 30).

Сформулируем нулевую и конкурирующую гипотезы согласно условию задачи.

H_0: $a = a_0 = 40$ - неизвестная генеральная средняя нормально распределенной совокупности с известной дисперсией равна числовому значению (применительно к условию данной задачи - время выполнения технологической операции соответствует норме).

H_1: $a > 40$ - неизвестная генеральная средняя нормально распределенной совокупности с известной дисперсией больше числового значения (применительно к условию данной задачи - время выполнения технологической операции больше установленной нормы).

Так как конкурирующая гипотеза - правосторонняя, то и критическая область - правосторонняя.

В качестве критерия для сравнения выборочной средней с гипотетической генеральной средней нормальной совокупности, когда дисперсия генеральной совокупности известна, используется случайная величина U:

Его наблюдаемое значение ($u_{набл.}$) рассчитывается по формуле:

$$\mathbf{u}_{\text{набл.}} = \frac{\tilde{\mathbf{X}} - a_0}{\sigma_{\text{ген.}}} \sqrt{\mathbf{n}}\,. \qquad \mathbf{(8.4)}$$

где $\tilde{X}$ - выборочная средняя;

a_0 - числовое значение генеральной средней;

$\sigma_{ген.}$ - выборочное среднее квадратическое отклонение;

n - объем выборки.

Найдем наблюдаемое значение ($u_{набл.}$):

$$u_{\text{набл.}} = \frac{42-40}{3,5} \cdot \sqrt{36} \approx 3,4286.$$

Так как конкурирующая гипотеза - правосторонняя, критическое значение $u_{кр.}$ следует находить по таблице функции Лапласа (приложение 2) из равенства:

$\Phi_0(u_{кр}) = (1 - 2\alpha) / 2.$

По условию $\alpha = 0,01$.

Отсюда:

$\Phi_0(u_{кр}) = (1 - 2 \cdot 0,01) / 2 = 0,49.$

По таблице функции Лапласа (приложение 2) найдем при каком $u_{кр.}$ $\Phi_0(u_{кр}) = 0,49$.

$\Phi_0(2,33) = 0,49.$

Следовательно: $u_{кр.} = 2,33$.

Заметим, что при левосторонней конкурирующей гипотезе H_1: $a < 40$ $u_{кр.}$ следует находить по таблице функции Лапласа (приложение 2) из равенства $\Phi_0(u_{кр}) = (1 - 2\alpha) / 2$ и присваивать ему "минус".

При двусторонней конкурирующей гипотезе H_1: $a \neq 40$ $u_{кр.}$ следует находить по таблице функции Лапласа (приложение 2) из равенства $\Phi_0(u_{кр}) = (1 - \alpha) / 2)$.

$u_{набл.} > u_{кр}$, следовательно, на данном уровне значимости нулевая гипотеза отвергается в пользу конкурирующей. По имеющимся хронометрическим данным с более чем 99%-ной надежностью можно утверждать, что среднее время выполнения этой операции превышает норму. Следовательно, жалобы работниц - обоснованны.

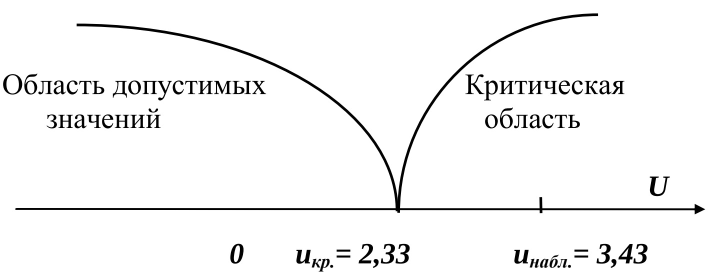


Рис. 8.5.

Наблюдаемое значение критерия попадает в критическую область, следовательно, нулевая гипотеза отвергается в пользу конкурирующей.

Ответ. По имеющимся хронометрическим данным на уровне значимости $\alpha = 0,01$ можно утверждать, что среднее время выполнения этой операции превышает норму, жалобы работниц - обоснованны.

Пример 8.5 Экономический анализ производительности труда предприятий отрасли позволил выдвинуть гипотезу о наличии двух типов предприятий с различной средней величиной показателя производительности труда. Выборочное обследование 42-х предприятий первой группы дало следующие результаты: средняя производительность труда $\tilde{X}$ составила 119 деталей. По данным выборочного обследования 35-и предприятий второй группы средняя производительность труда $\tilde{Y}$ составила 107 деталей. Генеральные дисперсии известны: $D(X) = 126,91$ (дет.^{2}); $D(Y) = 136,1$ (дет.^{2}). Считая, что выборки извлечены из нормально распределенных генеральных совокупностей X и Y, на уровне значимости 0,05 проверьте, случайно ли полученное различие средних показателей производительности труда в группах или же имеются два типа предприятий с различной средней величиной производительности труда.

Решение. Для решения данной задачи необходимо сравнить две средние нормально распределенных генеральных совокупностей, *генеральные дисперсии которых известны* (большие независимые выборки). В данной задаче речь идет о больших выборках, так как $n_x = 42$ и $n_y = 35$ больше 30. Выборки - независимые, так как из контекста задачи видно, что они извлечены из непересекающихся генеральных совокупностей.

Сформулируем нулевую и конкурирующую гипотезы согласно условию задачи.

H_0: $\overline{X} = \overline{Y}$ - генеральные средние двух нормально распределенных совокупностей с известными дисперсиями равны (применительно к условию данной задачи - предприятия двух групп относятся к одному типу предприятий, - средняя производительность труда в двух группах - одинакова).

H_1: $\overline{X} \neq \overline{Y}$ - генеральные средние двух нормально распределенных совокупностей с известными дисперсиями не равны (применительно к условию данной задачи - предприятия двух групп относятся к разному типу предприятий, - средняя производительность труда в двух группах - неодинакова).

Выдвигаем двустороннюю конкурирующую гипотезу, так как из условия задачи не следует, что необходимо выяснить больше или меньше производительность труда в одной из групп предприятий по сравнению с другой.

Так как конкурирующая гипотеза - двусторонняя, то и критическая область - двусторонняя.

В качестве критерия для сравнения двух средних генеральных совокупностей, дисперсии которых известны (большие независимые выборки), используется случайная величина Z.

Его наблюдаемое значение ($z_{набл.}$) рассчитывается по формуле:

$$\mathbf{z_{набл.}} = \frac{\tilde{\mathbf{X}} - \tilde{\mathbf{Y}}}{\sqrt{\frac{\mathbf{D(X)}}{\mathbf{n_x}} + \frac{\mathbf{D(Y)}}{\mathbf{n_y}}}}, \qquad \textbf{(8.5)}$$

где $\tilde{X}$ - выборочная средняя для X;

$\tilde{Y}$ - выборочная средняя для Y;

D(X) - генеральная дисперсия для X;

D(Y) - генеральная дисперсия для Y;

n_x - объем выборки для X;

n_y - объем выборки для Y.

Найдем наблюдаемое значение ($z_{набл.}$):

$$z_{набл.} = \frac{119 - 107}{\sqrt{\frac{129,91}{42} + \frac{136,1}{35}}} \approx 4,5649.$$

Так как конкурирующая гипотеза - двусторонняя, критическое значение ($z_{кр.}$) следует находить по таблице функции Лапласа (приложение 2) из равенства:

$\Phi_0(z_{кр}) = (1 - \alpha) / 2$.

По условию $\alpha = 0,05$.

Отсюда:

$\Phi_0(z_{кр}) = (1 - 0,05) / 2 = 0,475$.

По таблице функции Лапласа (приложение 2) найдем при каком $z_{кр.}$ $\Phi_0(z_{кр}) = 0,475$.

$\Phi_0(1,96) = 0,475$.

Учитывая, что конкурирующая гипотеза - двусторонняя, находим две критические точки:

$z_{кр.(прав.)} = 1,96$; $z_{кр.(лев.)} = -1,96$.

Заметим, что при левосторонней конкурирующей гипотезе H_1: $\overline{X} < \overline{Y}$ $z_{кр.}$ следует находить по таблице функции Лапласа (приложение 2) из равенства $\Phi_0(z_{кр}) = (1 - 2\alpha) / 2$ и присваивать ему "минус".

При правосторонней конкурирующей гипотезе H_1: $\overline{X} > \overline{Y}$ $z_{кр.}$ следует находить по таблице функции Лапласа (приложение 2) из равенства $\Phi_0(z_{кр}) = (1 - 2\alpha) / 2$).

$z_{набл.} > z_{кр}$, следовательно, на данном уровне значимости нулевая гипотеза отвергается в пользу конкурирующей. На уровне значимости $\alpha = 0,05$ можно утверждать, что полученное различие средних показателей производительности труда в группах - неслучайно, имеются два типа предприятий с различной средней величиной производительности труда.

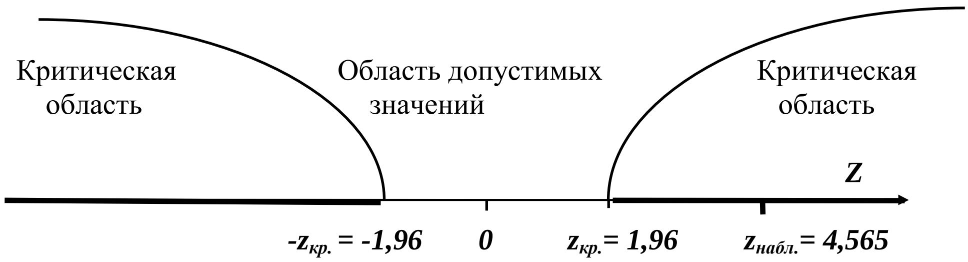


Рис. 8.6.

Наблюдаемое значение критерия попадает в критическую область, следовательно, нулевая гипотеза отвергается в пользу конкурирующей.

Ответ. На уровне значимости α = 0,05 можно утверждать, что полученное различие средних показателей производительности труда в группах - неслучайно, имеются два типа предприятий с различной средней величиной производительности труда.

Пример 8.6 Предполагается, что применение нового типа резца сократит время обработки некоторой детали. Хронометраж времени обработки 9 деталей, обработанных старым типом резцов, дал следующие результаты: среднее время обработки детали $\tilde{X}$ составило 57 мин., исправленная выборочная дисперсия s_x^2 = 186,2 (мин.^{2}). Среднее время обработки 15 деталей, обработанных новым типом резца, $\tilde{Y}$ по данным хронометражных измерений составило 52 мин., а исправленная выборочная дисперсия s_y^2= 166,4 (мин.^{2}). На уровне значимости α = 0,01 ответьте на вопрос, позволило ли использование нового типа резцов сократить время обработки детали?

Решение. Для решения данной задачи необходимо сравнить две средние нормально распределенных генеральных совокупностей, *генеральные дисперсии которых неизвестны*, но предполагаются одинаковыми (малые независимые выборки). В данной задаче речь идет о малых выборках, так как n_x = 9 и n_y = 15 меньше 30. Выборки - независимые, так как из контекста задачи видно, что они извлечены из непересекающихся генеральных совокупностей.

Сформулируем нулевую и конкурирующую гипотезы согласно условию задачи.

H_0: $\overline{X} = \overline{Y}$ - генеральные средние двух нормально распределенных совокупностей с неизвестными дисперсиями (но предполагаемыми одинаковыми) равны (применительно к условию данной задачи - среднее время, затрачиваемое на обработку детали резцами нового и старого типа - одинаково, т.е. использование нового типа резца не позволяет снизить время на обработку детали).

H_1: $\overline{X} > \overline{Y}$ - генеральная средняя для X больше, чем генеральная средняя для Y (применительно к условию данной задачи - среднее время, затрачиваемое на обработку детали резцами старого типа больше, чем - нового, т.е. использование нового типа резца позволяет снизить время на обработку детали).

Так как конкурирующая гипотеза - правосторонняя, то и критическая область - правосторонняя.

Приступать к проверке гипотезы о равенстве генеральных средних двух нормально распределенных совокупностей с неизвестными дисперсиями можно лишь в том случае, если генеральные дисперсии равны. В противном случае, данная задача в теории неразрешима.

Поэтому, прежде чем проверять эту гипотезу, проверим гипотезу о равенстве генеральных дисперсий нормальных совокупностей.

Сформулируем нулевую и конкурирующую гипотезы согласно условию задачи.

H_0: D(X) = D(Y) - генеральные дисперсии двух нормально распределенных совокупностей равны.

H_1: D(X) > D(Y) - генеральная дисперсия для X больше генеральной дисперсии для Y. Выдвигаем правостороннюю конкурирующую гипотезу, так как исправленная выборочная дисперсия для X значительно больше, чем исправленная выборочная дисперсия для Y.

Так как конкурирующая гипотеза - правосторонняя, то и критическая область - правосторонняя.

В качестве критерия для сравнения двух дисперсий нормальных генеральных совокупностей используется случайная величина F - критерий Фишера-Снедекора.

Его наблюдаемое значение ($f_{набл.}$) рассчитывается по формуле:

$$\mathbf{f_{набл.}} = \frac{\mathbf{s^2_{б.}}}{\mathbf{s^2_{м.}}}, \qquad \textbf{(8.6)}$$

где $s^2_б$ - большая (по величине) исправленная выборочная дисперсия;

$s_м^2$ - меньшая (по величине) исправленная выборочная дисперсия.

Найдем $f_{набл.}$:

$$f_{набл.} = \frac{186{,}2}{166{,}4} \approx 1{,}119.$$

Критическое значение ($f_{кр.}$) следует находить по таблице распределения Фишера-Снедекора (приложение 6) по уровню значимости α и числу степеней свободы k_1 и k_2.

По условию α = 0,01; число степеней свободы найдем по формуле:

$k_1 = n_1 - 1$; $k_2 = n_2 - 1$,

где k_1 - число степеней свободы большей (по величине) исправленной дисперсии;

k_2 - число степеней свободы меньшей (по величине) исправленной дисперсии;

n_1 - объем выборки большей (по величине) исправленной дисперсии;

n_2 - объем выборки меньшей (по величине) исправленной дисперсии.

Найдем k_1 и k_2:

$k_1 = 10 - 1 = 8$;

$k_2 = 15 - 1 = 14$.

Определяем $f_{кр.}$ по уровню значимости α = 0,01 и числу степеней свободы k_1=9 и k_2=14:

$$f_{кр.(\alpha=0{,}01;k_1=8;k_2=14)} = 4{,}14.$$

$f_{набл.} < f_{кр}$, следовательно, на данном уровне значимости нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий нормальных совокупностей.

Следовательно, можно приступить к проверке гипотезы о равенстве генеральных средних двух нормально распределенных совокупностей.

В качестве критерия для проверки этой гипотезы, используется случайная величина t - критерий Стьюдента:

Его наблюдаемое значение ($t_{набл.}$) рассчитывается по формуле:

$$\mathbf{t_{набл.} = \frac{\tilde{X} - \tilde{Y}}{\sqrt{(n_x - 1) \cdot s_x^2 + (n_y - 1) \cdot s_y^2}} \cdot \sqrt{\frac{n_x \cdot n_y \cdot (n_x + n_y - 2)}{n_x + n_y}}}, \qquad \textbf{(8.7)}$$

где $\tilde{X}$ - выборочная средняя для X;

$\tilde{Y}$ - выборочная средняя для Y;

D(X) - генеральная дисперсия для X;

D(Y) - генеральная дисперсия для Y;

n_x - объем выборки для X;

n_y - объем выборки для Y.

Найдем $t_{набл.}$:

$$t_{набл.} = \frac{57 - 52}{\sqrt{(9-1) \cdot 186{,}2 + (15-1) \cdot 166{,}4}} \cdot \sqrt{\frac{9 \cdot 15 \cdot (9 + 15 - 2)}{9 + 15}} \approx 0{,}9.$$

Критическое значение ($t_{кр.}$) следует находить по таблице распределения Стьюдента (приложение 5) по уровню значимости α и числу степеней свободы k.

По условию α = 0,01; число степеней свободы найдем по формуле:

$k = n_x + n_y - 2$,

где k - число степеней свободы;

n_x - объем выборки для X;

n_y - объем выборки для Y.

$k = 9 + 15 - 2 = 22$.

Найдем $t_{кр.}$ по уровню значимости α = 0,01 (для односторонней критической области) и числу степеней свободы k = 22:

$$t_{кр..(\alpha=0{,}01;k=22)} = 2{,}51.$$

Заметим, что при левосторонней конкурирующей гипотезе $\overline{X} < \overline{Y}$ $t_{кр.}$ следует находить по таблицам распределения Стьюдента (приложение 5) по уровню значимости α (для односторонней критической области) и числу степеней свободы $k = n_x + n_y - 2$ и присваивать ему "минус";

При двусторонней конкурирующей гипотезе $\overline{X} \neq \overline{Y}$ $t_{кр}$ следует находить по таблицам распределения Стьюдента (приложение 5) по уровню значимости α (для двусторонней критической области) и числу степеней свободы $k = n_x + n_y - 2$).

$t_{набл.} < t_{кр}$, следовательно, на данном уровне значимости нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. По имеющимся хронометрическим данным на уровне значимости $\alpha = 0,01$ нельзя отклонить гипотезу о том, что генеральные средние равны, т.е. среднее время, затрачиваемое на обработку детали старым и новым типом резцов отличается незначимо, расхождения между средними - случайны, использование нового типа резцов не позволяет снизить время обработки детали.

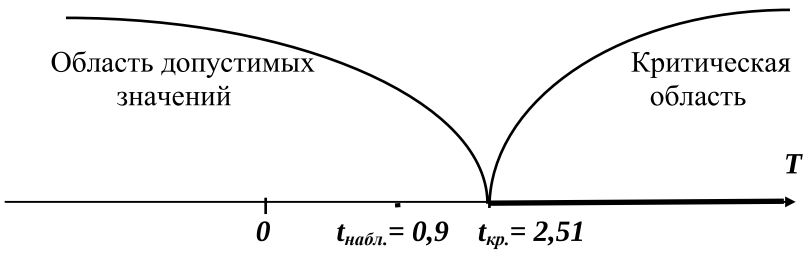


Рис 8.7.

Наблюдаемое значение критерия попадает в область допустимых значений, следовательно, нулевую гипотезу нельзя отвергнуть.

Ответ. На уровне значимости $\alpha = 0,01$ нельзя утверждать, что использование нового типа резцов позволило сократить время обработки детали.

Пример 8.7 Партия изделий принимается в том случае, если вероятность того, что изделие окажется соответствующим стандарту, составляет не менее 0,97. Среди случайно отобранных 200 изделий проверяемой партии оказалось 193 соответствующих стандарту. Можно ли на уровне значимости $\alpha = 0,02$ принять партию?

Решение. Для решения данной задачи необходимо проверить гипотезу о том, что неизвестная генеральная доля точно равна определенному числу.

Сформулируем нулевую и конкурирующую гипотезы согласно условию задачи.

H_0: $p = p_0 = 0,97$ - неизвестная генеральная доля p равна p_0 (применительно к условию данной задачи - вероятность того, что деталь из проверяемой партии окажется соответствующей стандарту, равна 0,97; то есть партию изделий можно принять).

H_1: $p < 0,97$ - неизвестная вероятность p меньше гипотетической вероятности p_0 (применительно к условию данной задачи - вероятность того, что деталь из проверяемой партии окажется соответствующей стандарту, меньше 0,97; то есть партию изделий нельзя принять).

Так как конкурирующая гипотеза - левосторонняя, то и критическая область - левосторонняя.

В качестве критерия для сравнения наблюдаемой относительной частоты с гипотетической вероятностью появления события используется случайная величина U:

Его наблюдаемое значение ($u_{набл.}$) рассчитывается по формуле:

$$\mathbf{u}_{\text{набл.}} = \frac{\dfrac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}} - \mathbf{p}_0}{\sqrt{\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{q}_0}} \cdot \sqrt{\mathbf{n}}, \qquad \mathbf{(8.8)}$$

где m / n - относительная частота (частость) появления события;

p_0 - гипотетическая вероятность появления события;

q_0 - гипотетическая вероятность непоявления события;

n - объем выборки.

По условию: $m = 193$; $n = 200$; $p_0 = 0,97$; $q_0 = 1 - p_0 = 0,03$; $\alpha = 0,02$.

Найдем наблюдаемое значение ($u_{набл.}$):

$$u_{набл.} = \frac{\dfrac{193}{200} - 0,97}{\sqrt{0,97 \cdot 0,03}} \cdot \sqrt{200} \approx -0,2771.$$

Так как конкурирующая гипотеза - левосторонняя, то критическое значение ($u_{кр.}$) следует находить по таблице функции Лапласа (приложение 2) из равенства:

$\Phi_0(u_{кр}) = (1 - 2\alpha) / 2$.

По условию $\alpha = 0,02$.

Отсюда:

$\Phi_0(u_{кр}) = (1 - 2 \cdot 0,02) / 2 = 0,48$.

По таблице функции Лапласа (приложение 2) найдем при каком $u_{кр.}$ $\Phi_0(u_{кр}) = 0,48$.

$\Phi_0(2,05) = 0,48$.

Учитывая, что конкурирующая гипотеза - левосторонняя, критическому значению необходимо присвоить знак "минус".

Следовательно: $u_{кр.} = -2,05$.

Заметим, что при правосторонней конкурирующей гипотезе H_1: $p > 0,97$ $u_{кр.}$ следует находить по таблице функции Лапласа (приложение 2) из равенства $\Phi_0(u_{кр}) = (1 - 2\alpha) / 2$.

При двусторонней конкурирующей гипотезе H_1: $p \neq 0,97$ $u_{кр.}$ следует находить по таблице функции Лапласа (приложение 2) из равенства $\Phi_0(u_{кр}) = (1 - \alpha) / 2)$.

$u_{набл.} > u_{кр}$, следовательно, на данном уровне значимости нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. По имеющимся данным на уровне значимости $\alpha = 0,02$ нельзя отклонить гипотезу о том, что вероятность того, что изделие окажется соответствующим стандарту, составляет 0,97. Следовательно, партию изделий принять можно.

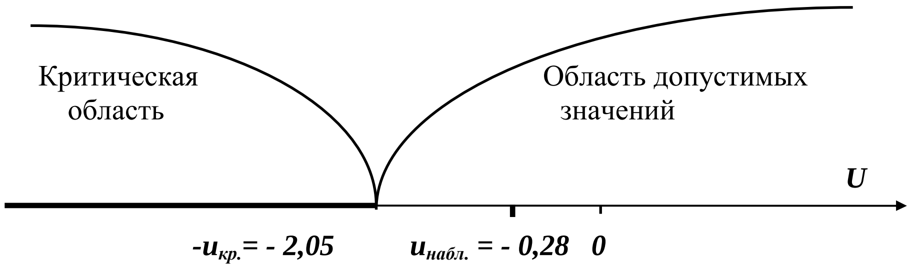


Рис.8.8.

Наблюдаемое значение критерия попадает в область допустимых значений, следовательно, нет оснований отклонить нулевую гипотезу.

Ответ. На уровне значимости $\alpha = 0,02$ партию изделий принять можно.

Пример 8.8 Два завода изготавливают однотипные детали. Для оценки их качества извлечены выборки из продукции этих заводов и получены следующие результаты:

	Завод №1	Завод №2
Объем выборки	n_1	n_2
Число бракованных деталей	m_1	m_2

На уровне значимости $\alpha = 0,025$ определите, имеется ли существенное различие в качестве изготавливаемых этими заводами деталей?

Решение. Для решения данной задачи необходимо сравнить две вероятности биномиальных распределений.

Сформулируем нулевую и конкурирующую гипотезы согласно условию задачи.

H_0: $p_1 = p_2$ - вероятности появления события в двух генеральных совокупностях, имеющих биномиальное распределение, равны (применительно к условию данной задачи - вероятность того, что деталь изготовленная на первом заводе, окажется бракованной, равна вероятности того, что деталь изготовленная на втором заводе, окажется бракованной).

H_1: $p_1 \neq p_2$ - вероятности появления события в двух генеральных совокупностях, имеющих биномиальное распределение, не равны (применительно к условию данной задачи - вероятность того, что деталь изготовленная на первом заводе, окажется бракованной, не равна вероятности того, что деталь изготовленная на втором заводе, окажется бракованной; заводы изготавливают детали разного качества). Так как по условию задачи не требуется проверить, на каком заводе качество изготавливаемых деталей выше, выдвигаем двустороннюю конкурирующую гипотезу.

Так как конкурирующая гипотеза - двусторонняя, то и критическая область - двусторонняя.

В качестве критерия для сравнения двух вероятностей биномиальных распределений используется случайная величина U:

Его наблюдаемое значение $u_{набл.}$ рассчитывается по формуле:

$$\mathbf{u}_{\text{набл.}} = \frac{\dfrac{\mathbf{m_1}}{\mathbf{n_1}} - \dfrac{\mathbf{m_2}}{\mathbf{n_2}}}{\sqrt{\dfrac{\overline{\mathbf{p}} \cdot \overline{\mathbf{q}}}{\mathbf{n_1}} + \dfrac{\overline{\mathbf{p}} \cdot \overline{\mathbf{q}}}{\mathbf{n_2}}}}, \qquad \textbf{(8.9)}$$

где m_1 / n_1 - относительная частота (частость) появления события в первой выборке;

m_2 / n_2 - относительная частота (частость) появления события во второй выборке;

$\overline{\mathbf{p}}$ - средняя частость появления события;

$$\boxed{\overline{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{m_1} + \mathbf{m_2}}{\mathbf{n_1} + \mathbf{n_2}}}$$

$\overline{\mathbf{q}}$ - средняя частость непоявления события;

$$\overline{\mathbf{q}} = \mathbf{1} - \overline{\mathbf{p}};$$

n_1 - объем первой выборки;

n_2 - объем второй выборки.

По условию: $m_1 = 20$; $n_1 = 200$; $m_2 = 15$; $n_2 = 300$; $\alpha = 0{,}025$.

Найдем $\overline{p}$ - среднюю частость появления события:

$$\overline{p} = \frac{20 + 15}{200 + 300} = 0{,}07 .$$

Найдем $\overline{q}$ - среднюю частость непоявления события:

$\overline{q} = 1 - \overline{p}$ = 1 - 0,07 = 0,93.

Найдем $u_{набл.}$:

$$u_{\text{набл.}} = \frac{\dfrac{20}{200} - \dfrac{15}{300}}{\sqrt{\dfrac{0{,}07 \cdot 0{,}93}{200} + \dfrac{0{,}07 \cdot 0{,}93}{300}}} \approx 2{,}1467.$$

Так как конкурирующая гипотеза - двусторонняя, критическое значение ($u_{кр.}$) следует находить по таблице функции Лапласа (приложение 2) из равенства:

$\Phi_0(u_{кр}) = (1 - \alpha) / 2$.

По условию $\alpha = 0{,}025$.

Отсюда:

$\Phi_0(u_{кр}) = (1 - 0{,}025) / 2 = 0{,}4875$.

По таблице функции Лапласа (приложение 2) найдем при каком $u_{кр.}$ $\Phi_0(u_{кр}) = 0{,}4875$.

$\Phi_0(2{,}24) = 0{,}4875$.

Учитывая, что конкурирующая гипотеза - двусторонняя, находим две критические точки:

$u_{кр.(прав.)} = 2{,}24$; $u_{кр.(лев.)} = -2{,}24$.

Заметим, что при правосторонней конкурирующей гипотезе H_1: $p_1 > p_2$ $u_{кр.}$ следует находить по таблице функции Лапласа (приложение 2) из равенства $\Phi_0(u_{кр}) = (1 - 2\alpha) / 2$.

При левосторонней конкурирующей гипотезе H_1: $p_1 < p_2$ $u_{кр.}$ следует находить по таблице функции Лапласа (приложение 2) из равенства $\Phi_0(u_{кр}) = (1 - 2\alpha) / 2$ и присваивать ему знак "минус").

$-u_{кр.} < u_{набл.} < u_{кр}$, следовательно, на данном уровне значимости нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. По имеющимся данным на уровне значимости $\alpha = 0{,}025$ нет оснований отклонить нулевую гипотезу. Следовательно, заводы изготавливают детали одинакового качества.

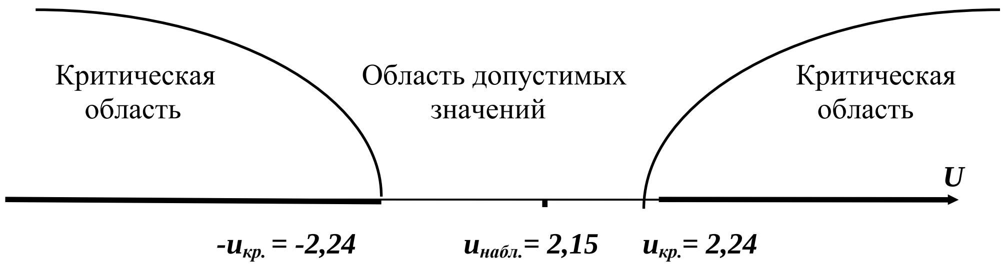


Рис.8.9.

Наблюдаемое значение критерия попадает в область допустимых значений, следовательно, нет оснований отклонить нулевую гипотезу.

Ответ. Нет оснований отклонить нулевую гипотезу, то есть имеющееся различие в качестве изготавливаемых этими заводами деталей - случайно, незначимо.

Задачи к теме 8 «Статистическая проверка гипотезы».

1. Компания, производящая средства для потери веса, утверждает, что прием таблеток в сочетании со специальной диетой позволяет сбросить в среднем в неделю 800 граммов веса. Случайным образом отобраны 25 человек, использующих эту терапию, и обнаружено, что в среднем еженедельная потеря в весе составила 830 граммов со средним квадратическим отклонением 250 граммов. Ответьте, правда ли, что потеря в весе составляет 800 граммов? Уровень значимости $\alpha = 0,05$.

2. Компания утверждает, что новый вид зубной пасты для детей лучше предохраняет зубы от кариеса, чем зубные пасты, производимые другими фирмами. Для проверки эффекта в случайном порядке была отобрана группа из 500 детей, которые пользовались новым видом зубной пасты. Другая группа из 600 детей, также случайно выбранных, в это же время пользовалась другими видами зубной пасты. После окончания эксперимента было выяснено, что у 30 детей, использующих новую пасту, и 35 детей из контрольной группы появились новые признаки кариеса. Имеются ли у компании достаточные основания для утверждения о том, что новый сорт зубной пасты эффективнее предотвращает кариес, чем другие виды зубной пасты? Принять уровень значимости $\alpha = 0,05$.

3. По оценкам оператора сотовой связи средняя длительность ежедневных звонков составляет 24 минуты на одного абонента. Выборочное обследование 100 абонентов показало, что среднедневная длительность звонков составляет 30 минут. На уровне значимости $\alpha = 0,05$ оцените статистическую значимость различий выборочного обследования, если известно, что стандартное отклонение длительности звонков в генеральной совокупности составляет 3 минуты.

4. По оценкам финансовых аналитиков риск потери денежных средств для инвесторов арт - бизнеса составляет 17% в течение пяти лет. Среди 400 постоянных клиентов аукционного дома был проведен опрос, в ходе которого выяснилось, что 65 из них потеряли средства на вложениях в предметы искусства за последние пять лет. Можно ли утверждать, что оценки финансовых аналитиков совпадают с действительностью на уровне значимости $\alpha = 0,01$?

5. Крупный коммерческий банк заказал маркетинговое исследование по выявлению эффекта «премирования» (калькулятор, набор ручек и др.), как стимула для открытия счета в банке. Для проверки случайным образом было отобрано 230 «премированных» посетителей и 200 «не премированных». В результате выяснилось, что 80% посетителей, которым предлагалась премия и 75% посетителей, которым не предлагалась премия, открыли счет в банке в течение 6 месяцев. Используя эти данные, проверьте гипотезыу о том, что доля «премированных»

посетителей, открывших счет в банке, статистически существенно отличается от удельного веса «не премированных» посетителей, открывших счет в банке. Принять уровень значимости $\alpha = 0{,}01$.

6. По данным российской аналитической компании средняя розничная цена покупки мобильного телефона в 2006 году составила 5000 рублей. Выборочная оценка 25 случайно выбранных телефонов, купленных в одном из салонов города показала, что средняя цена купленного телефона составляет 5200 рублей с исправленным средним квадратическим отклонением 250 рублей. На уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ проверьте гипотезыу о том, что средняя розничная цена мобильного телефона, купленного в 2006 году равна 5200 рублей.

7. Компания, выпускающая в продажу новый сорт сока, проводит оценку вкусов покупателей по случайной выборке из 500 человек, и оказалось, что 310 из них предпочли новый сорт всем остальным. Проверьте на уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ гипотезыу о том, что новый сорт сока предпочитают 65 % потребителей.

8. Страховая компания изучает вероятность дорожных происшествий для подростков, имеющих мотоциклы. За прошедший год проведена случайная выборка 1000 страховых полисов подростков-мотоциклистов и выявлено, что 11 из них попадали в дорожные происшествия и предъявили компании требование о компенсации за ущерб. Может ли аналитик компании отклонить гипотезыу, о том, что менее одного процента всех подростков-мотоциклистов, имеющих страховые полисы, попадали в дорожные происшествия в прошлом году? Принять уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

9. Новое лекарство, изобретенное для лечения атеросклероза, должно пройти экспериментальную проверку для выяснения возможных побочных эффектов. В ходе эксперимента лекарство принимали 7000 мужчин и 6000 женщин. Результаты выявили, что 100 мужчин и 100 женщин испытывали побочные эффекты при приеме нового медикамента. Можем ли мы на основании эксперимента утверждать, что побочные эффекты нового лекарства у женщин проявляются в большей степени, чем у мужчин? Принять уровень значимости $\alpha = 0{,}01$.

10. Руководство фирмы - провайдера полагает, что проведение рекламной акции приведет к увеличению числа новых клиентов. За 30 рабочих дней после проведения рекламной акции число новых клиентов составило 120 чел., тогда как до нее в среднем за день к услугам Internet впервые подключились 2 чел. Считая среднее квадратическое отклонение равным 3, на уровне значимости 0,01 определите принесла ли успех рекламная акция?

11. Владелец фирмы считает, что добиться более высоких финансовых результатов ему помешала неравномерность поставок комплектующих по месяцам года, несмотря на то, что поставщик в полном объеме выполнил свои обязательства за год. Поставщик утверждает, что поставки были не так уж неравномерны. Распределение поставок по месяцам года имеет следующий вид:

Месяцы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Объем поставок, единиц	19	23	26	18	20	20	20	20	32	27	35	40

На уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ определите кто прав: владелец фирмы или поставщик? Изменится ли ответ на поставленный вопрос, если уровень значимости принять равным 0,01? Объясните результаты.

12. Годовой оборот 8 супермаркетов некоторой федеральной сети в Ростовской области составил 16 млн. у.е. с исправленным средним квадратическим отклонением 0,25 млн. у.е., а

годовой оборот 5 супермаркетов этой же сети в Краснодарском крае составил 9,5 млн. у.е. с исправленным средним квадратическим отклонением 0,4 млн. у.е. Можно ли на уровне значимости α = 0,05 утверждать, что в Ростовской области сеть супермаркетов работает более эффективно?

13. Компания по производству безалкогольных напитков предполагает выпустить на рынок новую модификацию популярного напитка, в котором сахар заменен сукразитом. Компания хотела бы быть уверенной в том, что не менее 60% её потребителей предпочтут новую модификацию напитка. Новый напиток был предложен на пробу 1500 человек, и 850 из них сказали, что он вкуснее старого. Может ли компания отклонить предположение о том, что 60% всех её потребителей предпочтут новую модификацию напитка старой? Принять уровень значимости α = 0,01.

14. Кондитерская компания решила выяснить, действительно ли новая упаковка увеличивает объем продаж дорогих конфет. Исследования были проведены в 35 магазинах и супермаркетах, продающих конфеты в старой упаковке и в 42 магазинах, в которых продавались конфеты в новой упаковке. Среднедневной объем продаж конфет в старой упаковке составил 27,4 коробки с дисперсией 6,8, а объем продаж конфет в новой упаковке составил 35,6 с дисперсией 4,2. Можно ли на уровне значимости α = 0,01 утверждать, что новая упаковка увеличила объем продаж конфет?

15. Производители нового типа аспирина утверждают, что он снимает головную боль за 30 минут. Случайная выборка 100 человек, страдающих головными болями, показала, что новый тип аспирина снимает головную боль за 33,6 минуты при среднем квадратическом отклонении 4,2 минуты. Проверьте на уровне значимости α = 0,05 справедливость утверждения производителей аспирина о том, что это лекарство излечивает головную боль за 30 минут.

16. В ходе анализа размеров валютных вкладов 200 клиентов коммерческого банка получено следующее эмпирическое распределение размеров валютных вкладов. Проверьте гипотезыу о нормальном законе распределения на5% уровне значимости, полагая следующие теоретические частоты:

Размер вклада (в долларах)	До 500	500-1000	1000-1500	1500-2000	2000-2500	2500-3000	Более 3000
Число вкладов	8	16	40	72	36	18	10
Теоретические частоты	6	18	36	76	39	18	7

17. На двух станках с программным управлением обрабатываются одинаковые детали. Для оценки точности станков отобраны 10 деталей с первого станка и 12 деталей со второго станка. По этим выборкам найдены исправленные выборочные дисперсии, равные соответственно 30 кв.ед. и 10 кв.ед. Можно ли на основании этих данных утверждать на 5% уровне значимости, что дисперсии существенно различны, а следовательно имеются значительные различия в точности станков ?

18. По данным Росстата средний возраст безработного по РФ составляет 40 лет. Выборочное обследование демографических характеристик безработных в регионе выявило, что средний возраст безработного составил 38 лет, со стандартным отклонением 4 года. Выяснить, существенно ли отличается средний возраст безработных региона от среднероссийского, если в выборку попало 25 человек? Ответ дать на 5% уровне значимости

19. Главный бухгалтер большой корпорации провел обследование по данным прошедшего года с целью выяснения доли некорректных счетов. Из 2000 выбранных счетов в 25 оказались некорректные проводки. Для уменьшения доли ошибок он внедрил новую систему. Год спустя он решил проверить, как работает новая система, и выбрал для проверки в порядке случайного отбора 3000 счетов компании. Среди них оказалось 30 некорректных. Можно ли утверждать, что новая система позволила уменьшить долю некорректных проводок в счетах? Принять уровень значимости $\alpha = 0,05$.

20. На предприятии исследовалось изменение расхода сырья на производство продукции в условиях применения новой и старой технологий изготовления изделий. Выборочная дисперсия расхода сырья на изделие по новой технологии составила 124 кв.ед., а по старой – 189 кв.ед. Считая, что расход сырья на изделие по старой и новой технологии имеет нормальный закон распределения с одинаковыми дисперсиями, выяснить, существенны ли различия в вариации расхода сырья на изделие при использовании старой и новой технологий. Ответ дать на 1% уровне значимости, применив двухстороннюю альтернативную гипотезы, если $n_1 = n_2 = 10$.

Приложение 1

Таблица функции $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-z^2}{2}}$

(кривая вероятностей)

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
4,0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
4,1	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
4,2	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Приложение 2

Таблица функции $\Phi_0(z)=\int\limits_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{\frac{-x^2}{2}}\,dx$ (функция Лапласа)

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	0,00399	0,00798	0,01197	0,01595	0,01994	0,02392	0,02790	0,03188	0,03586
0,1	0,03983	0,04380	0,04776	0,05172	0,05567	0,05962	0,06356	0,06749	0,07142	0,07535
0,2	0,07926	0,08317	0,08706	0,09095	0,09483	0,09871	0,10257	0,10642	0,11026	0,11409
0,3	0,11791	0,12172	0,12552	0,12930	0,13307	0,13683	0,14058	0,14431	0,14803	0,15173
0,4	0,15542	0,15910	0,16276	0,16640	0,17003	0,17364	0,17724	0,18082	0,18439	0,18793
0,5	0,19146	0,19497	0,19847	0,20194	0,20540	0,20884	0,21226	0,21566	0,21904	0,22240
0,6	0,22575	0,22907	0,23237	0,23565	0,23891	0,24215	0,24537	0,24857	0,25175	0,25490
0,7	0,25804	0,26115	0,26424	0,26730	0,27035	0,27337	0,27637	0,27935	0,28230	0,28524
0,8	0,28814	0,29103	0,29389	0,29673	0,29955	0,30234	0,30511	0,30785	0,31057	0,31327
0,9	0,31594	0,31859	0,32121	0,32381	0,32639	0,32894	0,33147	0,33398	0,33646	0,33891
1,0	0,34134	0,34375	0,34614	0,34849	0,35083	0,35314	0,35543	0,35769	0,35993	0,36214
1,1	0,36433	0,36650	0,36864	0,37076	0,37286	0,37493	0,37698	0,37900	0,38100	0,38298
1,2	0,38493	0,38686	0,38877	0,39065	0,39251	0,39435	0,39617	0,39796	0,39973	0,40147
1,3	0,40320	0,40490	0,40658	0,40824	0,40988	0,41149	0,41308	0,41466	0,41621	0,41774
1,4	0,41924	0,42073	0,42220	0,42364	0,42507	0,42647	0,42785	0,42922	0,43056	0,43189
1,5	0,43319	0,43448	0,43574	0,43699	0,43822	0,43943	0,44062	0,44179	0,44295	0,44408
1,6	0,44520	0,44630	0,44738	0,44845	0,44950	0,45053	0,45154	0,45254	0,45352	0,45449
1,7	0,45543	0,45637	0,45728	0,45818	0,45907	0,45994	0,46080	0,46164	0,46246	0,46327
1,8	0,46407	0,46485	0,46562	0,46638	0,46712	0,46784	0,46856	0,46926	0,46995	0,47062
1,9	0,47128	0,47193	0,47257	0,47320	0,47381	0,47441	0,47500	0,47558	0,47615	0,47670
2,0	0,47725	0,47778	0,47831	0,47882	0,47932	0,47982	0,48030	0,48077	0,48124	0,48169
2,1	0,48214	0,48257	0,48300	0,48341	0,48382	0,48422	0,48461	0,48500	0,48537	0,48574
2,2	0,48610	0,48645	0,48679	0,48713	0,48745	0,48778	0,48809	0,48840	0,48870	0,48899
2,3	0,48928	0,48956	0,48983	0,49010	0,49036	0,49061	0,49086	0,49111	0,49134	0,49158
2,4	0,49180	0,49202	0,49224	0,49245	0,49266	0,49286	0,49305	0,49324	0,49343	0,49361
2,5	0,49379	0,49396	0,49413	0,49430	0,49446	0,49461	0,49477	0,49492	0,49506	0,49520
2,6	0,49534	0,49547	0,49560	0,49573	0,49585	0,49598	0,49609	0,49621	0,49632	0,49643
2,7	0,49653	0,49664	0,49674	0,49683	0,49693	0,49702	0,49711	0,49720	0,49728	0,49736
2,8	0,49744	0,49752	0,49760	0,49767	0,49774	0,49781	0,49788	0,49795	0,49801	0,49807
2,9	0,49813	0,49819	0,49825	0,49831	0,49836	0,49841	0,49846	0,49851	0,49856	0,49861
3,0	0,49865	0,49869	0,49874	0,49878	0,49882	0,49886	0,49889	0,49893	0,49896	0,49900
3,1	0,49903	0,49906	0,49910	0,49913	0,49916	0,49918	0,49921	0,49924	0,49926	0,49929
3,2	0,49931	0,49934	0,49936	0,49938	0,49940	0,49942	0,49944	0,49946	0,49948	0,49950
3,3	0,49952	0,49953	0,49955	0,49957	0,49958	0,49960	0,49961	0,49962	0,49964	0,49965
3,4	0,49966	0,49968	0,49969	0,49970	0,49971	0,49972	0,49973	0,49974	0,49975	0,49976
3,5	0,49977	0,49978	0,49978	0,49979	0,49980	0,49981	0,49981	0,49982	0,49983	0,49983
3,6	0,49984	0,49985	0,49985	0,49986	0,49986	0,49987	0,49987	0,49988	0,49988	0,49989
3,7	0,49989	0,49990	0,49990	0,49990	0,49991	0,49991	0,49992	0,49992	0,49992	0,49992
3,8	0,49993	0,49993	0,49993	0,49994	0,49994	0,49994	0,49994	0,49995	0,49995	0,49995
3,9	0,49995	0,49995	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49997	0,49997
4,0	0,499968									
4,5	0,499997									
5,0	0,4999997									

Приложение 3

Таблица значений функции Пуассона: $\mathbf{P(X=m)=P_{n,m}\approx\frac{\lambda^m}{m!}\cdot e^{-\lambda}}$.

m \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066
1	0,0905	0,1638	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3596	0,3659
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494
4	-	0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111
5	-	-	-	0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020
6	-	-	-	-	-	-	0,0001	0,0002	0,0003

m \ λ	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011
2	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050
3	0,0613	0,1805	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150
4	0,0153	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337
5	0,0031	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607
6	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911
7	0,0001	0,0034	0,0216	0,0595	0,1045	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171
8	-	0,0009	0,0081	0,0298	0,0655	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318
9	-	0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0689	0,1014	0,1241	0,1318
10	-	-	0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186
11	-	-	0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970
12	-	-	0,0001	0,0006	0,0034	0,0113	0,0264	0,0481	0,0728
13	-	-	-	0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504
14	-	-	-	0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324
15	-	-	-	-	0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194
16	-	-	-	-	-	0,0003	0,0015	0,0045	0,0109
17	-	-	-	-	-	0,0001	0,0006	0,0021	0,0058
18	-	-	-	-	-	-	0,0002	0,0009	0,0029
19	-	-	-	-	-	-	0,0001	0,0004	0,0014
20	-	-	-	-	-	-	-	0,0002	0,0006
21	-	-	-	-	-	-	-	0,0001	0,0003
22	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0001

Приложение 4

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы k	**Уровень значимости α**					
	0,01	**0,025**	**0,05**	**0,95**	**0,975**	**0,99**
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Приложение 5

Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы k	**Уровень значимости α(двусторонняя критическая область)**					
	0,10	**0,05**	**0,02**	**0,01**	**0,002**	**0,001**
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,00	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,70
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,28	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,07	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
Число степеней свободы k	**0,05**	**0,025**	**0,01**	**0,005**	**0,001**	**0,0005**
	Уровень значимости α(односторонняя критическая область)					

Приложение 6

Критические точки распределения Фишера-Снедекора

($К_1$ - число степеней свободы большей дисперсии,
$К_2$ - число степеней свободы меньшей дисперсии)

	Уровень значимости α = 0,01								
$К_1$ / $К_2$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	4052	4999	5403	5625	5764	5889	5928	5981	6022
2	98,49	99,01	90,17	99,25	99,33	99,30	99,34	99,36	99,36
3	34,12	38,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,96	14,80	14,66
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95
11	9,86	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,72	4,63
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,44	4,10	3,93	3,79	3,68

Окончание приложения 6

Уровень значимости α = 0,05									
К$_1$ / К$_2$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50