

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Макаренко Елена Николаевна

Должность: Ректор

Дата подписания: 22.04.2021 14:55:02

Уникальный программный ключ:

c098bc0c1041cb2a4cf926cf171d6715d99a6ae00adc8e27b55cbe1e2dbd7c78

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ**

**РОСТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ “РИНХ”**

**Ниворожкина Л.И., Рудяга А.А., Федосова О.Н.**

**ТЕОРИЯ СТАТИСТИКИ  
ПРАКТИКУМ**

**РОСТОВ-НА-ДОНУ  
2005**

**УДК 331**

**Н60**

**Ниворожкина Л.И., Рудяга А.А., Федосова О.Н.** Теория статистики. Практикум. / Рост. гос. эконом. универ. «РИНХ». – Ростов - н/Д, 2005. – 186 с. – ISBN 5-7972-0854-7.

Рецензенты: д.э.н., проф. Чернова Т. В., к.э.н., доц. Сурова В. А.

Практикум подготовлен в соответствии с требованиями Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования, включает по каждой теме теоретические и методологические материалы, практические задания для аудиторных занятий и самостоятельной работы студентов. В приложениях даны математико-статистические таблицы.

Практикум предназначен для студентов всех форм обучения (очной и заочной) экономических специальностей.

ISBN 5-7972-0854-7.

© Ростовский государственный  
экономический университет  
«РИНХ»

© Ниворожкина Л.И., Рудяга А.А.,  
Федосова О.Н., 2005.

## Содержание

<b>Предисловие</b> .....	<b>5</b>
<b>Тема 1. Предмет и метод статистической науки</b> .....	<b>6</b>
1.1. <i>Справочные материалы</i> .....	<b>6</b>
1.2. <i>Контрольные вопросы к теме 1</i> .....	<b>8</b>
1.3. <i>Контрольные задания к теме 1</i> .....	<b>9</b>
<b>Тема 2. Статистическое наблюдение</b> .....	<b>10</b>
2.1. <i>Справочные материалы</i> .....	<b>10</b>
2.2. <i>Контрольные вопросы к теме 2</i> .....	<b>12</b>
2.3. <i>Контрольные задания к теме 2</i> .....	<b>13</b>
<b>Тема 3. Сводка и группировка статистических данных</b> .....	<b>17</b>
3.1. <i>Справочные материалы</i> .....	<b>17</b>
3.2. <i>Контрольные вопросы к теме 3</i> .....	<b>23</b>
3.3. <i>Контрольные задания к теме 3</i> .....	<b>24</b>
<b>Тема 4. Абсолютные и относительные статистические величины</b> ...	<b>34</b>
4.1. <i>Справочные материалы</i> .....	<b>34</b>
4.2. <i>Контрольные вопросы к теме 4</i> .....	<b>40</b>
4.3. <i>Контрольные задания к теме 4</i> .....	<b>41</b>
<b>Тема 5. Средние величины</b> .....	<b>50</b>
5.1. <i>Справочные материалы</i> .....	<b>50</b>
5.2. <i>Контрольные вопросы к теме 5</i> .....	<b>56</b>
5.3. <i>Контрольные задания к теме 5</i> .....	<b>57</b>
<b>Тема 6. Меры вариации</b> .....	<b>66</b>
6.1. <i>Справочные материалы</i> .....	<b>66</b>
6.2. <i>Контрольные вопросы к теме 6</i> .....	<b>82</b>
6.3. <i>Контрольные задания к теме 6</i> .....	<b>82</b>
<b>Тема 7. Статистическое изучение связи между явлениями</b> .....	<b>90</b>
7.1. <i>Справочные материалы</i> .....	<b>90</b>
7.2. <i>Контрольные вопросы к теме 7</i> .....	<b>102</b>
7.3. <i>Контрольные задания к теме 7</i> .....	<b>102</b>

<b>Тема 8. Анализ динамики социально-экономических процессов....</b>	<b>118</b>
8.1. <i>Справочные материалы</i> .....	118
8.2. <i>Контрольные вопросы к теме 8</i> .....	133
8.3. <i>Контрольные задания к теме 8</i> .....	134
<b>Тема 9. Индексы</b> .....	<b>151</b>
9.1. <i>Справочные материалы</i> .....	151
9.2. <i>Контрольные вопросы к теме 9</i> .....	160
9.3. <i>Контрольные задания к теме 9</i> .....	161
<b>Заключение</b> .....	<b>176</b>
<b>Список литературы</b> .....	<b>177</b>
<b>Приложения</b> .....	<b>179</b>

## Предисловие

Цель учебной дисциплины «Теория статистики» – научить будущих специалистов основам статистического измерения, методам обобщения и анализа информации о социально-экономических явлениях и процессах, о закономерностях общественной жизни.

При изучении курса «Теория статистики» в экономических вузах важное место принадлежит аудиторным лекционным и практическим занятиям, которые занимают половину общего бюджета времени, отводимого на преподавание данной дисциплины в учебных планах специальностей. Однако усвоение материала студентами невозможно без самостоятельной работы и самоконтроля знаний.

При составлении части задач были использованы фактические материалы статистических сборников, другая часть задач построена на упрощенных условных данных.<sup>1</sup>

Пособие подготовлено авторским коллективом преподавателей кафедры математической статистики, эконометрики и актуарных расчетов Ростовского государственного экономического университета «РИНХ» в составе заведующего кафедрой д.э.н. профессора **Ниворожкиной Людмилы Ивановны**, к.э.н. доцента **Рудяги Анны Альбертовны**, к.э.н. доцента **Федосовой Оксаны Николаевны**.

---

<sup>1</sup> Большинство задач составлены на основе учебников, практикумов и учебных пособий, приведенных в библиографическом списке.

## Тема 1. Предмет и метод статистической науки

### 1.1. Справочные материалы

*Статистика разрабатывает методы сбора, систематизации, анализа, интерпретации и отображения результатов наблюдений массовых случайных явлений и процессов с целью выявления существующих в них закономерностей.*

*Предметом исследования в статистике* является изучение размеров и количественных соотношений массовых общественных явлений в конкретных условиях места и времени, а также числовое выражение проявляющихся в них закономерностей.

Закономерность, проявляющаяся лишь в большой массе явлений через преодоление свойственной её единичным элементам случайности, называется *статистической закономерностью*.

*Объектом статистического изучения является статистическая совокупность* – множество единиц, обладающих массовостью, качественной однородностью, определенной целостностью, взаимозависимостью состояний отдельных единиц и наличием вариации. Статистическая совокупность состоит из единиц совокупности.

*Единица совокупности* – это предел дробления объекта исследования, при котором сохраняются все свойства изучаемого процесса.

Единицы совокупности обладают определенными свойствами, качествами, которые принято называть признаками.

*Статистический признак* – общее свойство, характерная черта или иная особенность единиц совокупности, которые могут быть наблюдаемы или измерены.

*Статистический показатель* – обобщающая количественная характеристика социально-экономических явлений в конкретных условиях места и времени.

*Статистические признаки* отличаются способами их измерения и другими особенностями, влияющими на приемы статистического изучения. Это дает основания для классификации признаков (схема 1.1).

*Описательные (качественные) признаки* выражаются словесно: национальность, тип акции (простая, привилегированная), тип ткани (шелк, шерсть) и т.д. Описательные признаки подразделяются на номинальные и порядковые.

*Номинальные* – это описательные признаки, по которым нельзя ранжировать данные, тогда как *порядковые* – те, по которым можно ранжировать, упорядочивать данные. Например, оценки судей на спортивных соревнованиях.



**Количественные признаки** выражены числами. Например, возраст, заработная плата, цена акции и т.д.

**Первичные признаки** характеризуют единицу совокупности в целом. Это абсолютные величины, которые могут быть измерены, сосчитаны, взвешены. Они существуют сами по себе, независимо от статистического изучения. Например, численность населения страны, цена за акцию и т.д.

**Вторичные, или расчетные, признаки** не измеряются непосредственно, а рассчитываются. Например, себестоимость продукции, рентабельность, индекс Доу-Джонса и т.д. Вторичные признаки получают путем действий с первичными. Например, разделив объем выпущенной продукции на численность работников, получим производительность труда.

**Прямые (непосредственные) признаки** – это свойства, непосредственно присущие тому объекту, который ими характеризуется. Это, например, возраст человека, численность работников предприятия, цена за доллар.

**Косвенные признаки** являются свойствами, присущими не самому объекту, а другим совокупностям, относящимся к объекту, входящими в него. Например, цена за акцию, как косвенный признак компании,

выпустившей эту акцию. Хотя цена – это характеристика акции, но она косвенно характеризует и компанию.

**Альтернативные признаки** – это признаки, которые могут принимать только два возможных значения. Например, пол, место проживания (город, село) и т.д.

**Дискретные признаки** – это количественные признаки, которые могут принимать только отдельные значения. Например, число членов семьи, число выпущенных акций и т.д.

**Непрерывные признаки** – это признаки, принимающие любые значения в определенных границах.

**Моментные признаки** характеризуют изучаемый объект в какой-то момент времени, установленный статистическим исследованием. Например, стоимость доллара на 1.02.2005 года, численность наличного населения на 1.01.2005 года и т.д.

**Интервальные признаки** - это признаки, характеризующие результаты процесса. Поэтому их значения могут возникать только за интервал времени: год, месяц, сутки, а не на момент времени. Например, число родившихся или умерших, объем торгов на ММВБ за сутки и т.д.

Специфика предмета статистики обуславливает **специфику статистического метода**. Он включает: сбор данных (статистическое наблюдение), обобщение и представление данных (сводку и группировку), анализ и интерпретацию данных.

В настоящее время законченное оформление получили три отрасли статистики: общая теория статистики, экономическая статистика, социальная статистика.

## 1.2. Контрольные вопросы к теме 1

1. Что входит в круг вопросов, изучаемых статистикой?
2. В каких значениях употребляется термин «статистика»?
3. Что представляет собой статистика как наука?
4. Что является предметом статистики?
5. Что такое статистическая закономерность?
6. Что понимается под единицей статистической совокупности?
7. Что такое статистический показатель?
8. Что такое статистический признак? Какие признаки играют преобладающую роль в статистике?
9. Какие науки являются теоретической основой статистики?
10. В чем состоит связь статистики с другими науками?
11. В чем состоит специфика статистического метода изучения социально-экономических явлений?
12. Каковы организация и задачи статистики на современном этапе



развития России?

### *1.3. Контрольные задания к теме 1*

1. Какими признаками можно охарактеризовать совокупность студентов вуза?
2. Исследуется совокупность коммерческих банков Ростова. Какими признаками её можно охарактеризовать?
3. Назовите существенные варьирующие признаки, характеризующие студенческую группу.
4. Укажите, какие совокупности можно выделить в вузе для статистического изучения?
5. Какими наиболее существенными признаками можно охарактеризовать такие единицы наблюдения, как:
  - а) промышленное предприятие;
  - б) коммерческий банк;
  - в) торговое предприятие;
  - г) студент вуза;
  - д) преподаватель вуза.
6. Какими признаками по классификации, приведенной в пункте 1.1, являются:
  - численность населения страны;
  - количество браков и разводов;
  - производство продукции в стоимостном выражении;
  - число посадочных мест в самолете;
  - количество работников на фирме;
  - родственные связи членов семьи;
  - пол и возраст человека;
  - этажность жилых помещений;
  - розничный товароборот торговых объединений;
  - тарифный разряд рабочего;
  - балл успеваемости;
  - форма собственности;
  - национальность;
  - состояние в браке.

## Тема 2. Статистическое наблюдение

### 2.1. Справочные материалы

Статистическое наблюдение можно представить в виде следующей схемы взаимодействующих компонентов (рис. 2.1).

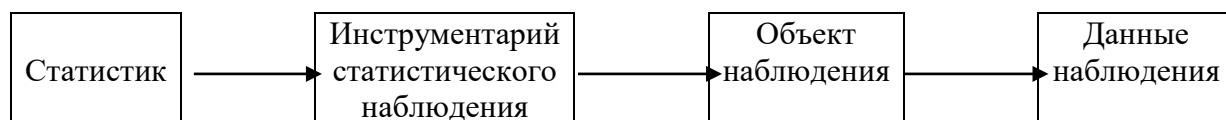


Рис. 2.1. Схема взаимодействия компонентов статистического наблюдения

Статистическое наблюдение имеет две основные формы: **отчетность и специально организованное наблюдение.**

Для проведения статистического наблюдения составляется **план и программа статистического наблюдения** (схема 2.1).

Схема 2.1

#### Составные элементы плана статистического наблюдения



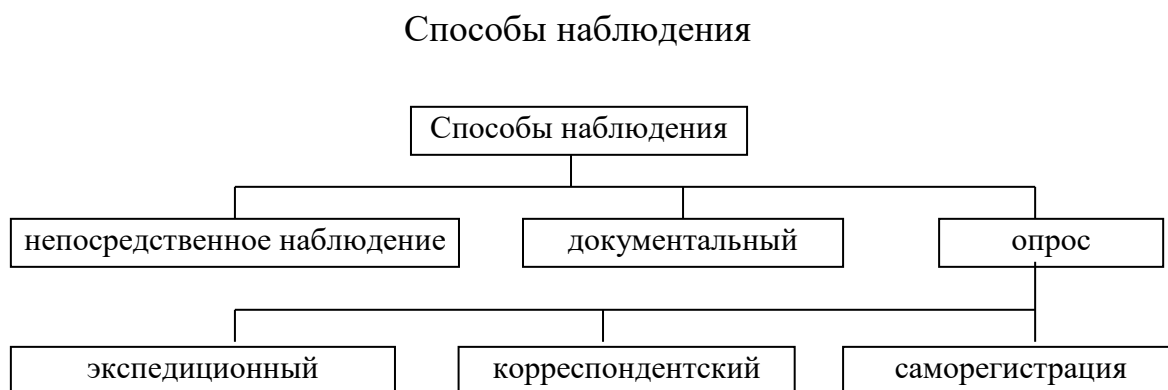
**Статистическое наблюдение подразделяется на виды** по времени наблюдения и по охвату единиц наблюдения (схема 2.2.).

Схема 2.2



Получение первичных данных в ходе проведения статистического наблюдения осуществляется посредством следующих **способов наблюдения** (схема 2.3).

Схема 2.3.



Как бы тщательно ни разрабатывался план наблюдения, при любом статистическом наблюдении могут возникнуть **ошибки** (схема 2.4).

### Ошибки статистического наблюдения



### 2.2. Контрольные вопросы к теме 2

1. Назовите этапы статистического наблюдения.
2. В чем суть статистического наблюдения?
3. Что такое объект и единица статистического наблюдения?
4. С какой целью составляется план статистического наблюдения?
5. Что такое программа статистического наблюдения?
6. Как различается наблюдение с точки зрения охвата единиц наблюдаемой совокупности?
7. Назовите виды несплошного наблюдения.
8. Назовите способы статистического наблюдения.
9. Какие ошибки могут возникнуть в процессе наблюдения, какие существуют способы их предотвращения и контроля?
10. Как называется множество элементов, обладающих массовостью, качественной однородностью, определенной целостностью, взаимозависимостью состояний отдельных единиц и наличием вариации?
11. В каком документе статистического наблюдения определяется объект и задачи наблюдения?
12. Как называется перечень вопросов, на которые в процессе статистического исследования должны быть получены ответы о каждой единице совокупности?
13. Что является единицей наблюдения при переписи населения?
14. Как называется обследование, при котором регистрации подвергается только часть интересующей исследователя по какому-либо признаку совокупности и полученные результаты служат характеристикой всей совокупности?

### 2.3. Контрольные задания к теме 2

1. С целью изучения уровня и динамики розничных цен на рынках города необходимо провести статистическое наблюдение за изменением цен на продовольственные товары. Составьте проект организационного плана и программы наблюдения.
2. Для характеристики финансового состояния предприятия одной из отраслей промышленности в регионе предполагается провести статистическое наблюдение. Определите объект наблюдения, единицу совокупности и перечень признаков, характеризующих финансовое состояние предприятий.
3. Определите перечень вопросов программы проведения статистического наблюдения:
  - а) выборочного обследования текучести работников в строительных организациях;
  - б) обследования занятых работников на фирме по уровню образования и специальности;
  - в) выборочного обследования зарплаты работников предприятий промышленности;
  - г) выборочного обследования бюджетов семей пенсионеров;
  - д) учета валютных операций коммерческих банков.
4. Разработайте план и программу:
  - а) статистического обследования студентов одного из факультетов;
  - б) оценки качества преподавания отдельных дисциплин и мастерства преподавателей;
  - в) обследования инвестиционной привлекательности объектов гостиничного комплекса региона.
5. Какие бы признаки вы наметили для регистрации при проведении:
  - а) обследования страховых компаний города;
  - б) обследования рынка жилья.
6. Разработайте опросный бланк для проведения обследования бюджета времени студентов вуза. Цель обследования – узнать, сколько времени студенты затрачивают в среднем:
  - на учебу, в т.ч. на аудиторные занятия и на самостоятельную работу;
  - на посещение кино, концертов, театров, клубов;
  - на спорт;
  - на принятие пищи;
  - на самообслуживание;
  - на сон.
7. Для изучения зависимости академической успеваемости от пола, возраста, научных интересов, семейного положения, бытовых условий и материального положения студентов вуза необходимо провести специальное статистическое обследование. С этой целью составьте





9. Менеджер супермаркета решил провести обследование с целью выявления резервов и направлений улучшения работы его отделов. Помогите: а) определить и ограничить объект и единицу наблюдения; б) выбрать вид наблюдения и разработать программу; в) подготовить формуляр и краткую инструкцию.
10. Составьте проект статистического формуляра для обследований:
- а) текущего учета иммигрантов с целью выяснения их социально-демографического состава, цели въезда и страны выезда;
  - б) текущего учета клиентов коммерческого банка, который должен выяснить их статус (юридическое или физическое лицо), вид деятельности, юридический и фактический адрес, уровень платежеспособности, гарантии и поручительство, целевое использование кредитов.



## Тема 3. Сводка и группировка статистических данных

### 3.1. Справочные материалы

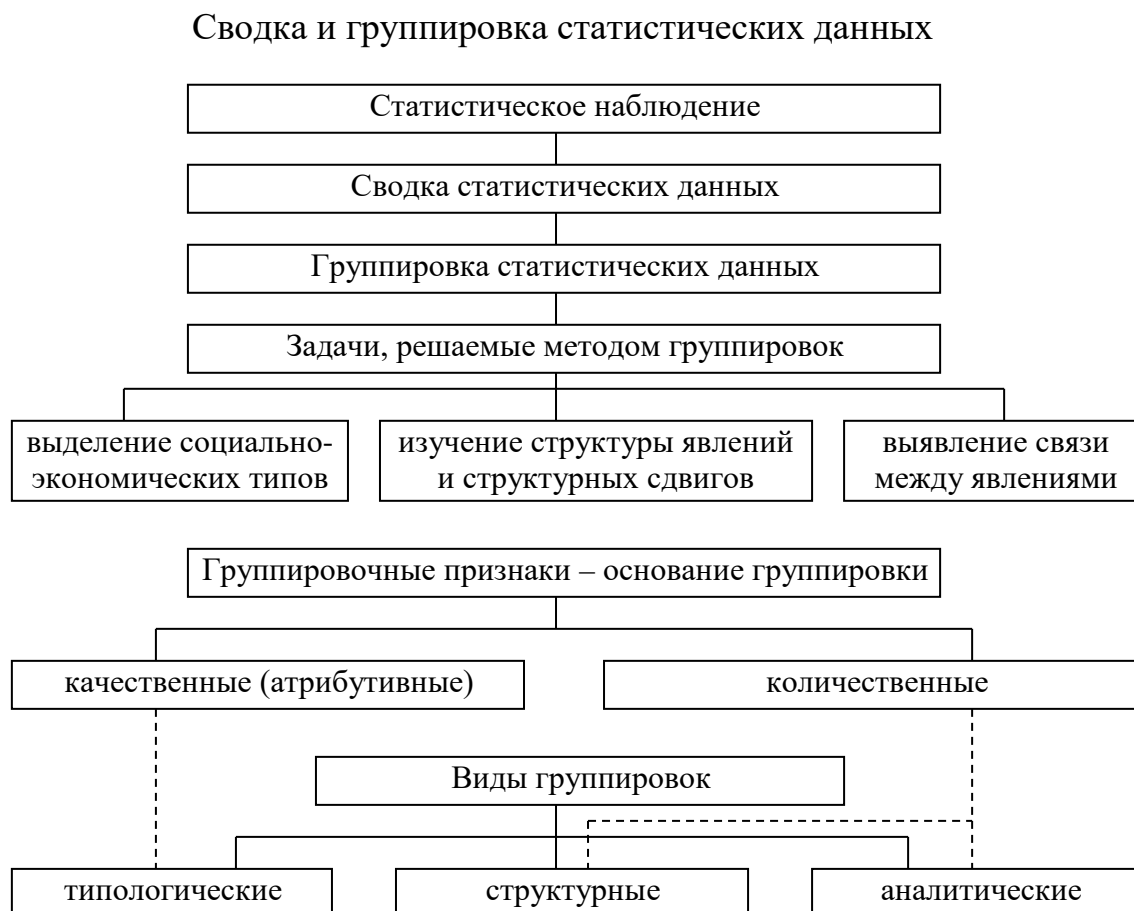
Сведения, собранные в процессе статистического наблюдения, подвергаются научной обработке и систематизации.

**Статистическая сводка** – это научно организованная обработка материалов наблюдения, включающая в себя систематизацию, группировку данных, построение таблиц, расчет итогов и производных показателей (средних, относительных величин).

Под **группировкой** в статистике понимают расчленение множества единиц статистической совокупности на группы, однородные в каком-либо существенном отношении.

Сводку и группировку статистических материалов можно представить в виде схемы 3.1.

Схема 3.1



Пример типологической группировки (табл. 3.1.).

Таблица 3.1

Группировка промышленных предприятий Ростовской области  
по формам собственности в 1994 году

№ п/п	Группы предприятий по формам собственности	Число предприятий	
		всего, единиц	% к итогу
1	Федеральная собственность	26326	93,6
2	Муниципальная собственность	89	0,3
3	Частная собственность	1366	4,9
4	Смешанная собственность	331	1,2
	Всего	28112	100

Пример структурной группировки (табл. 3.2.).

Таблица 3.2

Группировка населения России  
по размеру среднедушевого дохода в апреле 1994 г.

№ п/п	Группы населения по размеру среднедушевого денежного дохода, тыс. руб. в месяц	Численность населения	
		всего, млн. чел	% к итогу
1	До 40	2,4	1,6
2	40-80	23,4	15,8
3	80-120	34,8	23,5
4	120-160	29,4	19,8
5	160-200	20,7	13,9
6	200-240	13,5	9,1
7	240-280	8,7	5,9
8	280 и более	15,5	10,4
	Всего	148,4	100

Пример аналитической (факторной) группировки (табл. 3.3).

Таблица 3.3

Группировка населения по месту проживания за 1959-1994 гг.

№ п/п	Группировка населения по месту жительства	Численность населения					
		1959		1979		1994	
		всего, млн.чел	в % к итогу	всего, млн.чел	в % к итогу	всего, млн.чел	в % к итогу
1	Городское	61,6	52	95,4	69	108,5	73
2	Сельское	55,9	48	42,2	31	39,5	27
	Всего	117,5	100	137,6	100	148	100

При аналитической группировке выделяют **зависимые (результативные)** признаки и признаки, оказывающие влияние на них – **независимые (факторные)**.

Данные таблицы 3.3 характеризуют зависимость между местом жительства (**факторный признак**) и численностью населения (**результативный признак**). Если группы, образованные по одному признаку, делятся на подгруппы по второму признаку и т.д., то есть в основании группировки лежит несколько признаков, то группировка называется **комбинированной**.

Пример комбинированной группировки (табл. 3.4.).

Таблица 3.4

Группировка семей России по месту проживания и числу детей в 1989 г.

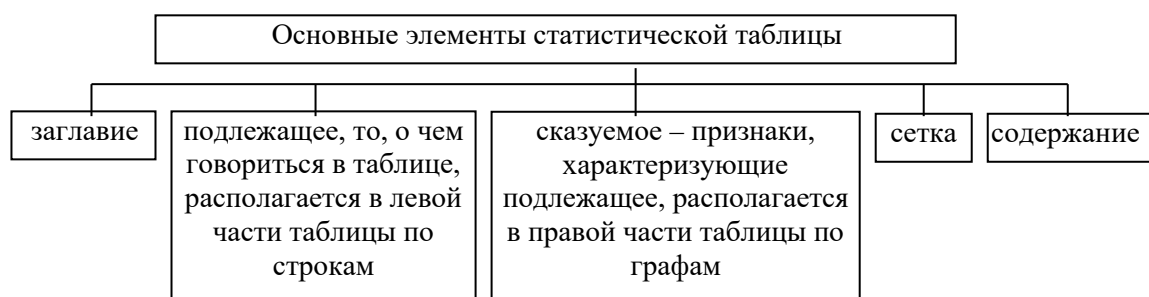
№ п/п	Группа семей по месту их проживания	В том числе подгруппа семей по числу детей	Число семей, тыс.
1	Городское население	1 ребенок	9605
		2 ребенка	6936
		3 и более детей	1200
Итого по группе			17741
2	Сельское население	1 ребенок	2328
		2 ребенка	2306
		3 и более детей	1111
Итого по группе			5745
	Итого по подгруппам	1 ребенок	11933
		2 ребенка	9242
		3 и более детей	2311
Итого по группам			23486

Упорядоченные в результате сводки статистические совокупности представляются в виде вариационных рядов, графиков и таблиц.

Таблица – компактное изображение собранного материала. **Статистическая таблица** состоит из следующих элементов (схема 3.2).

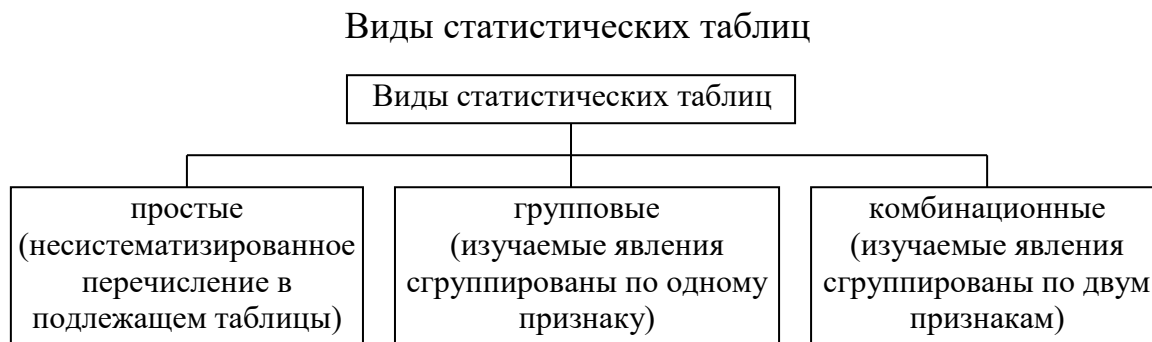
Схема 3.2

Статистическая таблица как наиболее рациональная схема изложения результатов сводки и группировки



Вид статистической таблицы зависит от конструктивного ее построения (схема 3.3).

Схема 3.3



Итоговым этапом сводки и группировки статистических данных является построение графиков на основании имеющихся таблиц.

**Статистические графики** – условное, наглядное изображение статистических величин и их соотношений при помощи геометрических линий и фигур. На схеме 3.4 представлены основные положения оформления статистических графиков.

Схема 3.4



*Пример 3.1.* Методику построения группировок и статистических таблиц продемонстрируем на данных бюджетных обследований 20 домохозяйств (табл. 3.5).

Таблица 3.5

№ п/п	Число членов домохозяйства	Общий денежный доход, включая трансферты, ден. ед.	Среднедушевой доход, ден. ед.
1	2	185	92,5
2	3	268	89,3
3	4	539	134,7
4	2	193	96,5
5	3	473	157,6
6	3	324	108,0
7	4	710	177,5
8	3	172	57,3
9	4	248	62,0
10	2	350	175,0
11	3	516	172,0
12	3	374	124,7
13	4	450	112,5
14	3	603	201,0
15	3	229	76,3
16	2	368	184,0
17	4	313	78,3
18	3	346	115,3
19	3	447	149,0
20	4	392	98,0

По приведенным в таблице 3.5 данным сгруппировать домохозяйства отдельно по числу членов домохозяйства и по общему денежному доходу, а также по этим двум признакам в комбинации.

Число членов домохозяйства – дискретный признак, поэтому группировка сводится к подсчету числа домохозяйств по каждому значению признака (табл. 3.6).

Таблица 3.6

Число членов домохозяйства	Число домохозяйств
2	4
3	10
4	6
Итого	20

Денежный доход домохозяйства – непрерывный признак, поэтому строить необходимо интервальный ряд распределения, сформировав, например, четыре интервала: менее 200, 200 – 400, 400 – 600, 600 и более (табл. 3.7).

Таблица 3.7

Общий денежный доход домохозяйства, ден. ед.	Число домохозяйств
Менее 200	3
200 – 400	10
400 – 600	5
600 и более	2
Итого	20

Группировка домохозяйств одновременно по двум признакам представляет собой комбинационную группировку (табл. 3.8).

Таблица 3.8

Число членов домохозяйства	Общий денежный доход домохозяйства, ден. ед.				Итого
	До 200	200 – 400	400 – 600	600 и более	
2	2	2	-	-	4
3	1	5	3	1	10
4	-	3	2	1	6
Итого	3	10	5	2	20

Расположение частот в направлении от левого верхнего угла к правому нижнему свидетельствует о наличии прямой связи между числом членов домохозяйства и его общим денежным доходом.

Суммирование и усреднение признаков в каждой группе углубляет анализ данных. Так, на основе итоговых данных о количестве членов домохозяйств и денежном доходе в каждой группе можно определить средний доход на одно домохозяйство и на одного члена домохозяйства (среднедушевой доход). Результаты обобщения приведены в таблице 3.9.

Таблица 3.9

Число членов домохозяйства	Число домохозяйств	Суммарное количество членов домохозяйства	Доход за месяц, ден.ед.		
			Общий денежный доход	В среднем	
				на одно домохозяйство	на одного члена домохозяйства
2	4	8	1096	274,0	137,0
3	10	30	3752	375,2	125,1
4	6	24	2652	442,0	110,5
По совокупности в целом	20	62	7500	375,0	121,0

По данным таблицы с увеличением числа членов домохозяйства возрастает средний доход на одно домохозяйство, но уменьшается среднедушевой доход. Зависимость среднедушевого дохода от числа членов домохозяйства наглядно демонстрирует аналитическая

группировка (табл. 3.10).

Таблица 3.10

Число членов домохозяйства	Число домохозяйств	Среднедушевой доход, ден. ед.
2	4	137,0
3	10	125,1
4	6	110,5
По совокупности в целом	20	121,0

По первичным данным об уровне среднедушевого дохода (табл. 3.5) составим типологическую группировку, выделяя группы бедных, средних и состоятельных домохозяйств. По методике Европейской комиссии ООН к бедным отнесем домохозяйства, среднедушевой доход которых не превышает  $\frac{2}{3}$  среднего уровня по совокупности в целом. Тогда в нашем примере чертой бедности является  $\frac{2}{3} \cdot 121 = 81$  ден. ед. К среднему слою отнесем домохозяйства, среднедушевой доход которых попадает в интервал  $121 \pm \frac{121}{3}$ , т.е. от 81 до 161 ден. ед. Домохозяйства со среднедушевым доходом 161 ден. ед. и более считаются состоятельными. Результаты типологической группировки приведены в таблице 3.11.

Таблица 3.11

Группы по среднедушевому доходу	Число			Общий денежный доход домохозяйств, ден. ед.	Среднедушевой доход, ден. ед.
	домохозяйств		членов домохозяйства		
	всего по группам	в % к итогу			
До 81	4	20	14	962	68,7
81 – 161	11	55	34	3991	117,4
161 и более	5	25	14	2547	181,9
По совокупности в целом	20	100	62	7500	121,0

### 3.2. Контрольные вопросы к теме 3

1. Что происходит на стадии сводки статистических данных?
2. Что такое централизованная и децентрализованная сводка?
3. Как называют расчленение множества единиц изучаемой совокупности на однородные группы по определенным существенным для них признакам в статистике?
4. Что такое группировочный признак?
5. Как называются группировки, имеющие своей целью установление взаимосвязи между изучаемыми явлениями?

6. Какие группировки имеют своей целью выделить однородные в качественном отношении группы?
7. Какие интервалы групп предпочтительны в структурной группировке работающих по стажу работы?
8. При наличии каких данных можно рассчитать величину интервала групп по формуле Стерджесса?
9. Укажите отличительные черты статистической таблицы.
10. Как называется таблица, содержащая размер территории и численность населения краев и областей России на 1 января текущего года?
11. К какому типу принадлежит таблица, содержащая численность мужчин и женщин России на даты переписи населения?
12. Назовите достоинства и недостатки графического способа изображения статистических данных.
13. Охарактеризуйте основные элементы статистических графиков и шкалы, применяемые в графиках.
14. Классификация видов графиков (по форме графического образа и по задачам изображения).

### *3.3. Контрольные задания к теме 3*

1. Определите, пользуясь формулой Стерджесса, интервал группировки сотрудников фирмы по уровню доходов, если общая численность сотрудников фирмы составляет 20 человек, а минимальный и максимальный доход соответственно равен 500 и 3000 усл. ден. ед.
2. Имеются следующие данные об успеваемости студентов в летнюю сессию: 5, 4, 4, 4, 3, 2, 5, 3, 4, 4, 4, 3, 2, 5, 2, 5, 5, 2, 3, 3. Постройте по этим данным ряд распределения студентов по баллам оценок, полученных в сессию; ряд распределения студентов по уровню успеваемости, выделив в нем две группы студентов: не успевающие (2 балла) и успевающие (3 балла и выше) Каким видом ряда распределения (вариационным или атрибутивным) является каждый из этих двух рядов?
3. Известны следующие данные о результатах сдачи абитуриентами вступительных экзаменов на I курс вуза (в баллах)

18	16	20	17	19	20	17
17	12	15	20	18	19	18
18	16	18	14	14	17	19
16	14	19	12	15	16	20

Постройте:

- a) ряд распределения абитуриентов по результатам сдачи ими вступительных экзаменов, выделив четыре группы абитуриентов с равными интервалами;



б) ряд, делящий абитуриентов на поступивших и не поступивших в вуз, если проходной балл равен 15.

Каким видом ряда распределения (вариационным или атрибутивным) является каждый из этих двух рядов?

**4.** Имеются данные о деятельности КБ:

Размеры процентных ставок и кредитов, предоставленных коммерческими банками предприятиям и организациям

№ банка	Процентная ставка, %	Кредиты, млн. руб.
1	20,3	9,55
2	17,1	13,58
3	14,2	22,33
4	11,0	27,50
5	17,3	13,54
6	19,6	11,60
7	20,5	8,90
8	23,6	3,25
9	14,6	21,20
10	17,5	13,5
11	20,8	7,60
12	13,6	25,52
13	24,0	2,50
14	17,5	13,24
15	15,0	20,15
16	21,1	6,10
17	17,6	13,36
18	15,8	19,62
19	18,8	11,90
20	22,4	5,20
21	16,1	17,90
22	17,9	12,30
23	21,7	5,40
24	18,0	12,18
25	16,4	17,10
26	26,0	1,00
27	18,4	12,12
28	16,7	16,45
29	12,2	26,50
30	13,9	23,98

Необходимо построить:

- интервальный ряд, характеризующий распределение банков по сумме выданных кредитов, образовав пять групп с равными интервалами (таблица А);
- аналитическую группировку для изучения связи между размером процентной ставки и величиной выданного кредита (таблица Б, В).

Таблица А

## Распределение банков по размеру выданных кредитов

№ группы	Группы банков по размеру кредита, млн. руб.	Число банков	
		в абсолютном выражении	в относительных единицах, %
I			
II			
III			
IV			
V			
	Итого		

Таблица Б

## Распределение банков по процентной ставке

№ п/п	Группы банков по величине процентной ставки	№ банка	Процентная ставка	Сумма кредита, млн. руб.
<i>A</i>	<i>B</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>
I				
II				
III				
IV				
V				
	Всего			

Таблица В

## Зависимость суммы выданного банком кредита от размера процентной ставки

№ п/п	Группы банков по величине процентной ставки	Число банков	Процентная ставка		Сумма выданных кредитов, млн. руб.	
			всего	средняя процентная ставка	всего	в среднем на один банк
<i>A</i>	<i>B</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>
I						
II						
III						
IV						
V						
	Итого					

5. Имеются следующие производственные показатели по заводам отрасли за отчетный период:

№ предприятия	Произведено продукции, тыс. шт.	Общая сумма затрат на производство, млн. руб.	Себестоимость единицы продукции, руб.
1	9,0	81	9,00
2	1,7	16	9,41
3	4,6	40	8,70
4	11,5	86	7,48
5	2,1	19	9,05
6	10,6	82	7,78
7	6,0	51	8,50
8	8,5	70	8,00
9	11,6	87	7,50
10	1,6	15	9,36
11	4,2	40	9,52
12	7,4	61	8,25
13	4,8	43	9,17
14	2,6	24	9,23
15	4,0	36	9,00

Применяя метод аналитической группировки, выявите характер зависимости между размером выпуска продукции и себестоимостью единицы продукции. При группировке по факторному признаку образуйте пять групп заводов с равными интервалами.

6. За прошедшую неделю службой занятости района трудоустроено 24 зарегистрированных безработных. По приведенным в таблице данным сгруппируйте трудоспособных:
- по длительности перерыва в работе;
  - по полу (0 – мужчины, 1 – женщины) и длительности перерыва в работе.

№ п/п	Пол	Длительность перерыва в работе, мес.	№ п/п	Пол	Длительность перерыва в работе, мес.
1	0	2	13	0	2
2	1	4	14	0	3
3	0	3	15	1	4
4	0	1	16	0	1
5	1	3	17	1	3
6	0	2	18	0	2
7	1	3	19	0	3
8	1	2	20	0	2
9	0	1	21	1	2
10	0	3	22	1	4
11	1	2	23	0	1
12	0	2	24	1	3

Результаты группировок представьте в форме статистических таблиц, проанализируйте их, сделайте выводы.

7. В результате опроса населения были получены самооценки склонности к риску и приоритетности вложения свободных средств. Ответы респондентов представлены в таблице.

№ п/п	Возраст, лет	Склонность к риску	Направление вложения средств	№ п/п	Возраст, лет	Склонность к риску	Направление вложения средств
1	48	1	2	16	45	3	2
2	29	2	4	17	23	2	2
3	43	2	1	18	61	2	3
4	32	2	2	19	33	2	2
5	38	2	3	20	42	1	3
6	62	1	3	21	27	3	1
7	35	1	3	22	37	2	3
8	22	3	1	23	65	1	4
9	56	3	2	24	40	2	4
10	50	2	2	25	49	2	2
11	25	3	2	26	57	2	3
12	67	1	2	27	19	3	2
13	21	3	3	28	70	2	3
14	39	1	4	29	36	2	2
15	28	2	1	30	52	3	2

Коды самооценки склонности к риску: 1 – риска избегаю вообще, 2 – готов рисковать с определенными гарантиями, 3 – люблю рисковать. Коды направлений вложения средств: 1 – ценные бумаги, 2 – недвижимость, 3 – валюта, 4 – товар.

1) Сгруппируйте респондентов:

- а) по возрасту, выделив три группы: до 30 лет, 30 – 60, 60 лет и старше;
- б) по склонности к риску, выделив группы рискующих, осторожных и инертных инвесторов;
- в) по приоритетным направлениям вложения свободных средств.

2) Составьте комбинационные распределения респондентов:

- а) по возрасту и склонности к риску;
- б) по возрасту и приоритетным направлениям вложения свободных средств;
- в) по склонности к риску и направлениям вложения свободных средств.

Результаты группировок представьте в форме статистических таблиц, проанализируйте их, сделайте выводы.

8. В риэлторской фирме за сутки оформлена продажа 30 трехкомнатных квартир, параметры которых приведены в таблице. Коды расположения в городе: 1 – окраина, 2 – районы, прилегающие к центру, 3 – центр. Коды наличия телефона: 0 – нет, 1 – есть.

№ квартиры	Место-расположение	Этаж	Наличие телефона	Общая площадь, м <sup>2</sup>	Стоимость, тыс. у.е.
1	1	5	1	70	29
2	2	8	1	70	38
3	1	13	1	65	28
4	3	4	1	84	79
5	2	4	1	79	48
6	2	6	1	68	36
7	2	9	0	63	34
8	2	9	0	68	32
9	3	2	1	91	84
10	3	5	0	82	60
11	2	1	1	68	28
12	2	4	1	70	41
13	2	5	1	66	36
14	3	1	0	89	65
15	2	10	0	69	32
16	1	15	0	68	29
17	1	5	1	75	48
18	3	3	1	90	82
19	1	9	1	70	37
20	1	12	0	68	27
21	2	10	1	75	60
22	2	3	1	80	65
23	2	16	1	78	58
24	2	3	1	61	28
25	1	8	1	66	30
26	1	5	1	79	62
27	2	13	0	66	27
28	1	15	0	81	60
29	1	11	1	87	61
30	3	7	1	91	83

По данным таблицы постройте:

- а) комбинационные группировки по признакам: месторасположение – стоимость, этаж – стоимость, наличие телефона – стоимость, общая площадь – стоимость;
  - б) аналитические группировки, которые описывали бы зависимость стоимости квартир от каждого из указанных признаков;
  - в) комбинационные аналитические группировки, показывающие зависимость стоимости квартир от месторасположения и этажа; от этажа и наличия телефона; от наличия телефона и общей площади.
- Результаты группировок представьте в форме статистических таблиц, проанализируйте их, сделайте выводы.

**9.** Имеется группировка семей по среднедушевому доходу.

Распределение семей города по размеру среднедушевого дохода

Группы семей по размеру дохода, усл. ден. ед.	Число семей
до 10	928
10-40	3239
40-100	11 102
100-180	12698
180-300	9311
300-400	1 828
свыше 400	659
Итого	39765

Произвести группировку данных, образовав новые группы со следующими интервалами: до 50, 50-100, 100-200, 200-300, свыше 300.

**10.** Численность осужденных в области распределяется по возрастам следующим образом:

Возраст, лет	2000 г.	2002 г.
14-17	1959	2965
18-24	2673	5477
25-29	2183	2962
30-49	4512	8137
50 и старше	585	908

Определите, в каком году и в какой возрастной группе численность осужденных на 1000 человек была больше, если распределение населения области по возрастным группам следующее (тыс. чел.):

Возраст, лет	2000 г.	2002 г.
0-9	429,4	376,5
10-19	405,5	428,1
20-29	377,2	355,8
30-39	476,4	474,4
40-49	290,3	354,6
50-59	337,9	306,1
60-69	267,0	277,7
70 и старше	164,0	170,8

**11.** Постройте группировку численности безработных двух регионов по полу и возрасту (% к итогу) с целью приведения их к сопоставимому виду.

РЕГИОН 1				РЕГИОН 2			
Группы безработных, лет	Всего	В том числе		Группы безработных, лет	Всего	В том числе	
		женщин	мужчин			женщин	мужчин
15-19	11,8	14,2	9,5	до 20	12,0	13,7	10,2
20-24	16,2	15,2	17,2	20-30	35,5	37,2	39,7
25-29	11,3	10,9	11,8	30-40	26,2	24,5	24,6
30-49	48,5	48,1	48,8	40-50	14,0	14,6	15,5
50-54	5,2	5,3	5,0	50 и более	12,3	10,0	10,0
55-59	4,9	4,2	5,5				
60 и старше	2,1	2,1	2,2				
Итого	100,0	100,0	100,0	Итого	100,0	100,0	100,0

Сделайте сравнительный анализ результатов. Рассчитайте по каждой группе три-четыре показателя и постройте сводную таблицу. Сделайте выводы по результатам группировки.

- 12.** Имеются следующие данные о распределении промышленных предприятий двух регионов по численности занятого на них промышленно-производственного персонала (ППП):

РЕГИОН 1			РЕГИОН 2		
Группы предприятий по численности работающих, чел.	Число предприятий, %	Численность промышленно-производственного персонала, тыс. чел.	Группы предприятий по численности работающих, чел.	Число предприятий, %	Численность промышленно-производственного персонала, тыс. чел.
До 100	32	1	До 300	34	1
101-500	38	4	301-600	28	6
501-1000	17	10	601-1000	20	10
1001-2000	9	15	1001-2000	13	15
2001-5000	3	32	2001-4000	4	43
5001 и более	1	38	4001 и более	1	25
Итого	100	100	Итого	100	100

Постройте вторичную группировку данных о распределении промышленных предприятий, пересчитав данные:

- региона 2 в соответствии с группировкой региона 1;
- региона 1 в соответствии с группировкой региона 2;
- регионов 1 и 2, образовав следующие группы промышленных предприятий по численности ППП: до 500, 500 - 1000, 1000 - 2000, 2000 - 3000, 3000 - 4000, 4000 - 5000, 5000 и более.

- 13.** Имеются данные о распределении коммерческих банков по объявленному уставному фонду:

РЕГИОН 1		РЕГИОН 2	
Группы банков по уставному фонду	Удельный вес банков в общем их числе	Группы банков по уставному фонду	Удельный вес банков в общем их числе
До 100	7	До 100	2
100-500	9	100-300	5
500-1000	18	300-500	6
1000-5000	34	500-700	7
5000-20000	22	700-1000	12
Свыше 20000	10	1000-3000	28
		3000-5000	18
		5000-10000	14
		Свыше 10000	8
Итого	100	Итого	100

С целью сравнения осуществите вторичную группировку коммерческих банков, для чего выделите следующие группы банков по объявленному уставному фонду: до 100, 100 – 500, 500 – 1000, 1000 – 5000, 5000 – 10 000, свыше 10 000 тыс. руб. Сделайте выводы.

14. Продажа телевизоров характеризуется следующими данными, тыс. шт.: 1992 г. – 5527, 1993 г. – 5563, 1994 г. – 5628, в т.ч. было продано цветных телевизоров соответственно 3427, 3616, 3915. Приведенные данные представить в виде статистической таблицы. Сформулировать выводы, охарактеризовать происшедшие изменения в объеме и составе продаж телевизоров.
15. Имеются данные о численности и составе населения России (на начало года, млн. чел.). Все население: 1993 г. – 148,7; 1994 г. – 148,4; 1995 г. – 148,3; 1996 г. – 148,0, в т.ч. мужчины составили: 1993 г. – 69,9; 1994 г. – 69,8; 1995 г. – 69,5; 1996 г. – 69,3. Построить статистическую таблицу, характеризующую динамику численности и состава населения России.
16. Имеются следующие данные о численности постоянного населения России (на начало года, млн. чел.). Все население: 1993 г. – 148,3; 1994 г. – 148,0; 1995 г. – 147,9; 1996 г. – 147,6. Из общей численности постоянного населения численность населения моложе трудоспособного возраста составила: 1993 г. – 36,3; 1994 г. – 34,8; 1995 г. – 33,9; 1996 г. – 33,2. Численность трудоспособного населения: 1993 г. – 83,7; 1994 г. – 83,8; 1995 г. – 84,1; 1996 г. – 84,2. Остальное население старше трудоспособного возраста. Построить статистическую таблицу, характеризующую динамику численности постоянного населения России и его возрастной состав.
17. По приведенным ниже данным составьте статистические таблицы, озаглавьте каждую из них, определите подлежащее и сказуемое, вид представленной в таблице группировки.



А) Сумма кредитов, предоставленных коммерческими банками города на начало года составила 600 млн. ден. ед., в т.ч. краткосрочных – 400, долгосрочных – 200 млн. ден. ед. На конец года соответственно 1080, 800 и 280 млн. ден. ед. За год общий объем банковских услуг по предоставлению кредитов возрос в 1,8 раза, в т.ч. на рынке краткосрочных кредитов – в 2 раза, на рынке долгосрочных кредитов – в 1,4 раза.

Б) По данным бюджетных обследований домохозяйства разделяются на три группы по уровню совокупного дохода: с высоким, средним и низким доходом. Доля этих групп в общем объеме покупок соответственно составляет, %: 18, 52, 30, а средний балл качества приобретенных товаров – 2,8; 2,2; 1,4.

18. Разработайте макет статистической таблицы, характеризующей распределение коммерческих банков России по величине балансовой прибыли. Выделенные группы охарактеризуйте следующими показателями: собственный капитал и вложения в ценные бумаги. Сформулируйте и укажите вид проектируемой таблицы.
19. Разработайте макет статистической таблицы, характеризующей распределение численности занятого населения и безработных по семейному положению, и сформулируйте заголовок таблицы. Укажите: 1) к какому виду таблицы относится макет; 2) его подлежащее и сказуемое; 3) признак группировки подлежащего.
20. Разработайте макет статистической таблицы, характеризующей зависимость успеваемости студентов вашей группы от посещаемости учебных занятий и занятости внеучебной деятельностью. Сформулируйте заголовок таблицы. Укажите:
  - 1) к какому виду таблицы относится макет;
  - 2) название и вид разработки подлежащего и сказуемого;
  - 3) группировочные признаки.
21. Спроектируйте макеты групповой и комбинационной таблиц со сложной разработкой сказуемого для характеристики деловой активности коммерческих банков РФ. Сформулируйте заголовки таблиц. Определите:
  - 1) подлежащее и сказуемое;
  - 2) группировочные признаки, которые целесообразно положить в основу группировки подлежащего таблиц;
  - 3) показатели, которые целесообразно включить в сказуемое с целью более полной характеристики объекта.
22. Разработайте макеты таблиц для статистической характеристики:
  - а) населения РФ по полу и возрасту;
  - б) наиболее ликвидных акций на внебиржевом рынке;
  - в) предприятий какой-либо отрасли;
  - г) деятельности страховых компаний России;

д) рынка государственных ценных бумаг.

## Тема 4. Абсолютные и относительные статистические величины

### 4.1. Справочные материалы

**Статистический показатель** представляет собой обобщающую количественную характеристику какого-либо свойства совокупности, группы. В отличие от индивидуальных значений, называемых признаками, статистический показатель получают расчетным путем.

Статистические показатели подразделяются на абсолютные и относительные.

**Статистические показатели в форме абсолютных величин** характеризуют абсолютные размеры изучаемых процессов и явлений: их массу, площадь, протяженность, объем, а также могут представлять объем совокупности, то есть число составляющих ее единиц.

**Статистические показатели в форме относительных величин** – это результат деления одного показателя на другой, который выражает соотношение между количественными характеристиками социально-экономических явлений.

Статистические показатели можно представить в виде схемы 4.1.

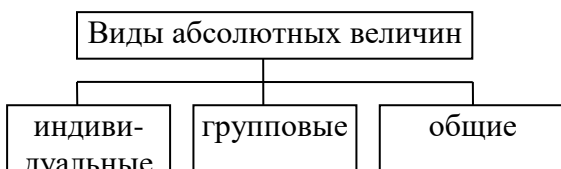
Схема 4.1

#### Обобщающие статистические показатели

**Относительные статистические показатели (ОПС)** характеризуют долю (удельный вес) отдельных частей в общем объеме совокупности. Например, отношение числа женщин к общей численности населения

в форме абсолютных величин

в форме относительных величин



**Относительные показатели структуры (ОПСт)** характеризуют долю (удельный вес) отдельных частей в общем объеме совокупности. Например, отношение числа женщин к общей численности населения.

$$ОПСт = \frac{\text{показатель, характеризующий часть совокупности}}{\text{показатель по всей совокупности в целом}} \quad (4.1)$$

**Относительные показатели координации (ОПК)** представляют собой разновидность ОПСт. Они характеризуют соотношение между отдельными частями статистической совокупности. Например, соотношение между численностью городского и сельского населения, численностью мужчин и женщин, величиной заемного и собственного капитала банка.

$$ОПК = \frac{\text{показатель, характеризующий } i\text{-ую часть совокупности}}{\text{показатель, характеризующий часть совокупности, выбранную в качестве базы сравнения}} \quad (4.2)$$

Относительные показатели структуры и относительные показатели координации называют **относительными показателями структурных соотношений**.

*Пример 4.1.* Имеются следующие данные о распределении населения по полу (таблица 4.1):

Таблица 4.1.

Годы	Численность населения на начало года, тыс. чел.	в том числе	
		мужское	женское
1980	138 127	63 610	74 517
1990	147 662	69 112	78 555
1995	147 938	69 486	78 455
1997	147 137	69 029	78 108

По этим данным исчислите соотношение численности мужчин и женщин, а также удельного веса мужчин и женщин в населении. Укажите, к какому виду относительных показателей структурных соотношений относятся исчисленные показатели.

*Решение:* 1) отношение численности мужского населения к численности женского – это **относительный показатель координации**:

$$ОПК_{1980} = \frac{63610}{74517} \cdot 1000 = 850; \quad ОПК_{1990} = \frac{69112}{78555} \cdot 1000 = 880;$$

$$ОПК_{1995} = \frac{69486}{78455} \cdot 1000 = 890; \quad ОПК_{1997} = \frac{69029}{78108} \cdot 1000 = 880.$$

Т.е. в 1980 г. на 1000 женщин приходилось 850 мужчин, в 1990 г. – 880 и т.д.

2) удельный вес мужчин (женщин) в общей численности рассчитывается как *относительный показатель структуры*:

$$\begin{aligned} ОПСт_{1980(м)} &= \frac{63610}{138127} \cdot 100 = 46; & ОПСт_{1990(м)} &= \frac{69112}{147662} \cdot 100 = 47; \\ ОПСт_{1995(м)} &= \frac{69486}{147938} \cdot 100 = 47; & ОПСт_{1997(м)} &= \frac{69029}{147137} \cdot 100 = 47. \\ ОПСт_{1980(ж)} &= \frac{74517}{138127} \cdot 100 = 54; & ОПСт_{1990(ж)} &= \frac{78555}{147662} \cdot 100 = 53; \\ ОПСт_{1995(ж)} &= \frac{78455}{147938} \cdot 100 = 53; & ОПСт_{1997(ж)} &= \frac{78108}{147137} \cdot 100 = 53. \end{aligned}$$

Т.е. в 1980 г. доля мужчин в общей численности населения составляла 46%, а доля женщин – соответственно 54%; в 1990, 1995 и 1997 годах данные соотношения были одинаковыми и находились на уровне 47% (доля мужчин) и 58% (доля женщин).

*Пример 4.2.* Распределение общего объема денежных доходов по 20-процентным группам населения представлено в таблице 4.2.

Таблица 4.2

Годы	Первая группа (с наименьшими доходами)	Вторая группа	Третья группа	Четвертая группа	Пятая группа (с наибольшими доходами)	Коэффициент фондов (в раз)
1992	6,0	11,6	17,6	26,3	38,3	8,0
2000	6,0	10,4	14,8	21,2	47,6	13,8

По этим данным проанализируйте доходную структуру населения.

*Решение:* Данные таблицы свидетельствуют, что за прошедший период доходная структура заметно изменилась. Доля доходов наиболее обеспеченных 20% населения выросла с 38,3% до 47,6%. Об этих изменениях свидетельствует и такой относительный показатель, как коэффициент фондов, показывающий соотношение долей доходов 20% наиболее обеспеченных к 20% наименее обеспеченных.

*Пример 4.3.* Проанализируйте нижеследующие данные о составе и использовании денежных доходов населения (таблица 4.3).

Таблица 4.3

Годы	Оплата труда	Доходы от предпринимательской деятельности	Социальные трансферты	Доходы от собственности	Прочие доходы
1990	76,4	3,7	14,7	2,5	2,7

2000	61,4	15,9	14,4	7,1	1,2
------	------	------	------	-----	-----

*Решение:* За анализируемые 10 лет произошли значительные изменения в структуре доходов населения. Резко выросла доля доходов от предпринимательской деятельности, сократилась доля доходов от оплаты труда, выросли доходы от собственности.

**Относительные показатели динамики (ОПД)** характеризуют изменение явления во времени. Они представляют собой результат сопоставления уровней одного и того же явления, относящихся к различным периодам или моментам времени. Например, коэффициенты или темпы роста, которые подробно будут рассмотрены в теме 8.

$$ОПД = \frac{\text{уровень явления за отчетный (текущий) период}}{\text{уровень явления за базисный или предшествующий период}} \quad (4.3.)$$

Если показатели текущего периода сопоставляются с предшествующими уровнями, то такой способ вычисления ОПД называется **цепным**. В этом случае рассчитываются ОПД **с переменной базой сравнения**.

Если показатели текущего периода сопоставляются с одним и тем же базисным (например, начальным) уровнем, то такой способ вычисления ОПД называется **базисным**. В этом случае рассчитываются ОПД **с постоянной базой сравнения**.

ОПД с переменной и постоянной базой сравнения взаимосвязаны между собой: произведение всех относительных показателей с переменной базой сравнения равно относительному показателю с постоянной базой сравнения за исследуемый период.

*Пример 4.4.* По данным примера 4.1 рассчитать ОПД с переменной и постоянной базой сравнения (темпы роста цепные и базисные).

*Решение:* Расчетные данные представлены в таблице 4.4.

Таблица 4.4

Годы	Темпы роста общей численности населения		Темпы роста мужского населения		Темпы роста женского населения	
	цепные	базисные	цепные	базисные	цепные	базисные
1980	-	100%	-	100%	-	100%
1990	$\frac{147\,662}{138\,127} \cdot 100\% =$ =106,9%	$\frac{147\,662}{138\,127} \cdot 100\% =$ =106,9%	$\frac{69\,112}{63\,610} \cdot 100\% =$ =108,6%	$\frac{69\,112}{63\,610} \cdot 100\% =$ =108,6%	$\frac{78\,555}{74\,517} \cdot 100\% =$ =105,4%	$\frac{78\,555}{74\,517} \cdot 100\% =$ =105,4%
1995	$\frac{147\,938}{147\,662} \cdot 100\% =$ =100,2%	$\frac{147\,938}{138\,127} \cdot 100\% =$ =107,1%	$\frac{69\,486}{69\,112} \cdot 100\% =$ =100,5%	$\frac{69\,486}{63\,610} \cdot 100\% =$ =109,2%	$\frac{78\,455}{78\,555} \cdot 100\% =$ =99,9%	$\frac{78\,455}{74\,517} \cdot 100\% =$ =105,3%

1997	$\frac{147137}{147938} \cdot 100\% =$ =99,5%	$\frac{147137}{138127} \cdot 100\% =$ =106,5%	$\frac{69029}{69486} \cdot 100\% =$ =99,3%	$\frac{69029}{63610} \cdot 100\% =$ =108,5%	$\frac{78108}{78455} \cdot 100\% =$ =99,6%	$\frac{78108}{74517} \cdot 100\% =$ =104,8%
------	---	--	---	--	---	--

Переведя темпы роста в коэффициенты, убедимся во взаимосвязи ОПД с переменной и постоянной базой сравнения. Для всего населения получим:  
 $1,069 \cdot 1,002 \cdot 0,995 = 1,065$  или 106,5%

**Относительные показатели, характеризующие взаимосвязи между разными признаками объекта, объектом и средой и т.п. (ОПВ)**, выражают связь, соотношение между вариацией факторных и результативных признаков. Например, рассматриваемые подробно в темах 6 и 7 коэффициенты детерминации, корреляции, регрессии, эластичности.

**Относительные показатели интенсивности (ОПИ)** характеризуют степень распространенности или развития того или иного явления в определенной среде. Данные показатели получают, сопоставляя разноименные, но взаимосвязанные в своем развитии объекты двух связанных между собой совокупностей

$$ОПИ = \frac{\text{показатель, характеризующий какое – либо явление}}{\text{показатель, характеризующий среду распространения этого явления}} \quad (4.4)$$

Примерами ОПИ, полученных как отношение значений различных признаков одной совокупности, являются уровень занятости (отношение числа занятых к численности экономически активного населения), демографические показатели – коэффициенты рождаемости (число родившихся на 1000 человек населения), смертности и т.д.

Примерами ОПИ, которые получены на основе сопоставления разных совокупностей, являются показатели жизненного уровня населения (производство и потребление каких-либо продуктов и товаров на душу населения), плотность населения (число людей, приходящихся на 1 кв. км. территории). К этому типу относятся также фондоотдача (стоимость продукции, произведенной на 1 руб. основных фондов), показатели технической оснащенности труда (фондо-, машино-, энерговооруженность труда).

Учитывая экономическую сущность ОПИ, их можно назвать показателями уровня экономического и социального развития

*Пример 4.5.* Численность населения на 1.01.1997 г. составила 147,5 млн. чел., а число родившихся в 1996 г. – 2389,7 тыс. чел. Определить относительный показатель, характеризующий рождаемость.

*Решение:* Коэффициент рождаемости в 1996 г. определяется как ОПИ следующим образом:

$$\text{Коэффициент рождаемости} = \frac{\text{число родившихся}}{\text{численность населения}} \cdot 1000 = \frac{2389,7}{147500} \cdot 1000 = 16,2\text{‰}$$

Полученный результат (16,2 промилле) указывает на то, что на 1000 жителей приходилось около 16 новорожденных.

*Пример 4.6.* В I квартале 1996 г. размер ВВП в России составил 508 трлн. руб. Учитывая, что среднеквартальная численность населения (полусумма численности населения на начало и конец квартала) была 148,1 млн. чел., сделайте вывод об уровне развития экономики России.

*Решение:* Чтобы на основе этих данных делать вывод об уровне развития экономики, необходимо рассчитать ОПИ, сопоставив абсолютный размер ВВП со среднеквартальной численностью населения. В результате размер ВВП на душу населения составил:

$$\text{ОПИ} = \frac{508\,000 \text{ млрд. руб.}}{0,1481 \text{ млрд. чел.}} = 3,43 \text{ млн. руб.}$$

Необходимость расчетов **относительных показателей плана (ОПП) и реализации плана (ОПРП)** обуславливается тем, что практически все субъекты финансово-хозяйственной деятельности в той или иной степени осуществляют текущее и стратегическое планирование, сравнивают реально достигнутые результаты с ранее намеченными.

$$\text{ОПП} = \frac{\text{запланированный уровень на предстоящий период}}{\text{уровень показателя, достигнутого в предыдущем периоде}} \quad (4.5)$$

$$\text{ОПРП} = \frac{\text{фактически достигнутый уровень в текущем периоде}}{\text{уровень планируемого показателя на этот же период}} \quad (4.6)$$

Между ОПП, ОПРП и ОПД существует следующая взаимосвязь:  
 $\text{ОПП} \cdot \text{ОПРП} = \text{ОПД}$ .

*Пример 4.7.* В III квартале оборот торговой фирмы составил 150 млн. руб., в IV квартале планируется оборот в 180 млн. руб. Определить относительный показатель плана.

*Решение:*  $\text{ОПП} = \frac{180}{150} \cdot 100\% = 120\%$ , т.е. в IV квартале планируется увеличить оборот торговой фирмы на 20%.

*Пример 4.8.* Оборот торговой фирмы в IV квартале составил 202,5 млн. руб. при плане 180 млн. руб. Определить степень реализации плана оборота в IV квартале.



*Решение:*  $ОПРП = \frac{202,5}{180} \cdot 100\% = 112,5\%$ , т.е. план по обороту выполнен на 112,5%, перевыполнение составило 12,5%.

По данным примеров 4.7 и 4.8, предварительно переведя полученные результаты в коэффициенты, имеем:

$$ОПД = ОПП \cdot ОПРП = 1,2 \cdot 1,125 = 1,35 \text{ или } 135\%$$

**Относительные показатели сравнения (ОПСр)** характеризуют соотношение одноименных абсолютных показателей, соответствующих одному и тому же периоду или моменту времени, но к различным объектам или территориям. Например, сравнивают уровень потребления в расчете на душу населения жителями Московской и Ростовской областей в первом квартале текущего года, сопоставляют уровень среднемесячной заработной платы работников государственных и частных предприятий.

$$ОПСр = \frac{\text{показатель, характеризующий объект или территорию } A}{\text{показатель, характеризующий объект или территорию } B} \quad (4.7)$$

*Пример 4.10.* Среднеголетние запасы воды в Ладожском озере составили 911 куб. м, а в Байкале – 23 000 куб. м. Исчислить ОПСр, приняв за базу сравнения запасы воды в Ладожском озере.

*Решение:*  $ОПСр = \frac{23000}{911} = 25,2$ , следовательно, запас воды в Байкале в 25,2 раза больше, чем в Ладожском озере.

**При построении относительных статистических показателей необходимо соблюдать ряд принципов.**

**Первый принцип.** Сравнимые в относительном показателе абсолютные (относительные) показатели должны быть чем-то связаны в реальной жизни объективно, независимо от нашего желания.

**Второй принцип.** При построении относительного статистического показателя сравниваемые исходные показатели могут различаться только одним атрибутом: или видом признака (при одинаковом объекте, периоде времени, плановом или фактическом характере показателей), или временем (при том же признаке, объекте и т.п.), или только фактическим, плановым или нормативным характером показателей (тот же объект, признак, время) и т.д.

**Третий принцип.** Необходимо знать возможные границы существования относительного показателя.

## 4.2. Контрольные вопросы к теме 4

1. Что такое статистический показатель?

2. Что в статистике понимается под статистическим показателем в форме абсолютных величин?
3. В каких единицах измерения не выражаются статистические показатели в форме абсолютных величин?
4. К какому виду абсолютных показателей относится показатель “производственный стаж работника”?
5. Что понимается под статистическим показателем в форме относительных величин?
6. Как выражаются относительные показатели, если базу сравнения принимают за 1000?
7. Определите вид относительных показателей, характеризующих удельный вес какого-либо явления в генеральной совокупности.
8. Определите вид относительных показателей, характеризующих темпы изменения какого-либо явления во времени.
9. Назовите способ вычисления относительных показателей динамики, при котором показатели каждого последующего периода сопоставляются с предшествующими.
10. Как называется способ вычисления относительных показателей динамики, при котором за базу принимается все время одна постоянная величина и с ней сравниваются все остальные?
11. Как взаимосвязаны между собой относительные показатели динамики с переменной и постоянной базой сравнения?
12. К какому виду относительных показателей относится показатель, характеризующий степень распространенности или развития того или иного явления в определенной среде?
13. Что позволяет получить произведение относительных показателей плана (планового задания) и относительных показателей реализации (выполнения) плана?
14. Определите вид относительных показателей, характеризующих сравнительные размеры одноименных величин, относящихся к одному и тому же периоду либо моменту времени, но к различным объектам или территориям.
15. Можно ли при расчете относительных показателей координации в качестве базы сравнения использовать структурную часть, имеющую наименьший удельный вес в совокупном объеме признака?

### ***4.3. Контрольные задания к теме 4***

1. Имеются следующие данные о численности экономически активного населения России по состоянию на начало 2001 г. (в млн. чел.):

Экономически активное население	72,7
в том числе:	

занятые в экономике	65,9
безработные	6,8

Исчислить, сколько безработных приходится на 1000 занятых в экономике России

2. Имеются следующие данные о розничном товарообороте Российской Федерации за 2001 – 2002 гг. (в млрд. руб.):

Показатель	2001 г.	2002 г.
Общий объем розничного товарооборота	753,3	862,6
в том числе		
продовольственные товары	361,9	420,7
непродовольственные товары	391,4	441,9

Вычислите относительные показатели структуры розничного товарооборота и показатели координации. Сделайте сравнительный анализ изменения структуры.

3. По данным о пассажирообороте всех видов транспорта (в млрд. пассажиров) вычислите относительные показатели структуры пассажирооборота за 1995 и 2000 гг.:

Год	Все виды транспорта	В том числе				
		железнодорожный	морской	речной	автомобильный	воздушный
1995	653,1	365,4	1,6	5,4	202,5	78,2
2000	747,1	312,5	2,1	6,3	303,6	122,6

Результаты представьте в виде таблицы и проанализируйте полученные данные.

4. По данным нижеследующей таблицы определите отдельно для мужчин и женщин относительные показатели, характеризующие:
- долю безработных, получающих пособие по безработице;
  - долю безработных, проходящих профессиональное переобучение.

Показатель	Количество безработных, тыс. чел.	
	мужчин	женщин
Зарегистрировано безработных	22,6	57,4
Получают пособие по безработице	12,4	35,2
Проходят профессиональное переобучение	17,8	13,6

Проведите сравнительный анализ рассчитанных долей. Определите долю женщин среди безработных, получающих пособие, и среди безработных, проходящих профессиональное переобучение. Сделайте выводы.

5. На основе данных о распределении населения региона по возрасту и виду поселения определите относительные показатели, характеризующие:

- а) структуру городского и сельского населения по признаку трудоспособности, проведите сравнительный анализ структур;  
 б) соотношение населения трудоспособного и нетрудоспособного возраста в городах и селах;  
 в) структуру населения по виду поколений;  
 г) соотношение городского и сельского населения.

Возраст	Население, млн. чел.	
	городское	сельское
Моложе трудоспособного	0,8	0,4
Трудоспособный	2,0	0,8
Старше трудоспособного	0,6	0,5
Итого	3,4	1,7

6. Среднегодовая численность населения Российской Федерации в 1999 г. составила 148,6 млн. чел., число родившихся – 1796,6 тыс. чел., число умерших – 1690,7 тыс. чел.; в 2002 г. – соответственно 147,7 млн., 1304,6 тыс., 2082,2 тыс. чел. Определите показатели интенсивности естественного движения населения Российской Федерации за 1999 и 2002 гг.
7. Имеются данные о розничном товарообороте области за 2000 г. (в млрд. руб.):

Розничный товарооборот – всего	14 403,3
по формам собственности:	
государственная	1 445,7
негосударственная	12 957,6
в том числе частная	10 723,1

Определите показатели структуры розничного товарооборота по формам собственности и показатели координации.

8. Имеются следующие данные о внешнеторговом обороте со странами дальнего зарубежья и СНГ, млн. долл.:

	IV квартал 1995 г.	I квартал 1996 г.
Экспорт	22 761	20 972
Импорт	18 274	13 954

Вычислите относительные показатели структуры и координации.

9. Численность врачей в РФ характеризуется следующими данными (на начало года, тыс. чел.):

	1981	1995
Всего врачей, в т.ч.	560,7	663,1
терапевтов	127,7	169,0
педиатров	63,9	75,4

Проведите анализ изменения обеспеченности населения врачами, если известно, что численность постоянного населения на начало 1981 г. составляла 139,0 млн. чел., в т.ч. в возрасте до 14 лет – 30,1 млн. чел., а на начало 1995 г. – соответственно 147,9 и 31,8 млн. чел.

10. Имеются следующие данные об объемах производства продукции черной металлургии в РФ, тыс.т:

Вид продукции	1993	1994	1995
Чугун	40 519	36 118	39 229
Сталь	58 838	48 769	51 323
Трубы стальные	5 843	3 568	3 722

Охарактеризуйте уровень экономического развития с учетом численности населения РФ, которая составляла на начало года, млн. чел.: в 1993 г. – 148,7; в 1994 г. – 148,3 и в 1996 г. – 148,2.

11. Численность населения в Российской Федерации на 1 января 2001 г. составила 147,5 млн. чел., в том числе: городского – 107,8 млн. чел., сельского – 39,7 млн. чел. Вычислите долю городского и сельского населения в общей численности населения, сравните численность городского и сельского населения страны.
12. По региону имеются следующие данные о вводе в эксплуатацию жилой площади:

Вид жилых домов	Введено в эксплуатацию, тыс. м <sup>2</sup>	
	прошлый год	отчетный год
Кирпичные многоквартирные	5000	5100
Панельные многоквартирные	2800	2500
Коттеджи	200	800

Определить: 1) динамику ввода в эксплуатацию жилой площади по каждому виду жилых домов и в целом по региону;  
2) структуру введенной в эксплуатацию жилой площади в прошлом и отчетном годах.

13. Имеются следующие данные о стоимости основного капитала по фирме:

№ предприятия, входящего в фирму	Стоимость основного капитала, млн. руб.		
	на 1 января 1999 г.	на 1 января 2000 г.	на 1 января 2001 г.
1	22 150	24 855	26 970
2	7 380	9 100	12 550
3	13 970	16 700	20 800

Определите показатели динамики стоимости основного капитала фирмы.

14. По фирме имеются следующие данные о выпуске продукции за год:

№ фирмы	Фактический выпуск продукции,	Процент реализации плана
---------	-------------------------------	--------------------------

	млн. руб.	
1	29,4	105,0
2	42,6	100,0
3	24,0	96,0

- Определить процент реализации плана в целом по фирме.
15. Объем продаж предприятия в отчетном году в сопоставимых ценах вырос по сравнению с предыдущим годом на 5% и составил 146 млрд. руб. Определите объем продаж в предыдущем году.
  16. Торговая фирма планировала в 2002 году по сравнению с 2001 годом увеличить оборот на 14,5%. Выполнение установленного плана составило 102,7%. Определите относительный показатель динамики оборота.
  17. Волжский автозавод в мае 1996 г. превысил плановое задание по реализации машин на 10,6%, продав 5576 автомобилей сверх плана. Определите общее количество реализованных машин за месяц.
  18. Предприятие планировало увеличить выпуск продукции в 2003г. по сравнению с 2002 г. на 18%. Фактический же объем продукции составил 112,3% от прошлогоднего уровня. Определите относительный показатель реализации плана.
  19. Бизнес-планом на 2002 г. установлен прирост выпуска продукции на 4% по сравнению с 2001 г. Фактически увеличен выпуск продукции за 2002г. на 6%. Определите выполнение плана выпуска продукции в 2002г.
  20. В прошлом году объем грузооборота по автотранспортному предприятию составил 210 млн. ткм. Планом текущего года было предусмотрено довести объем грузооборота до 220,5 млн. ткм.; фактический объем в текущем году составил 229, 32 млн. ткм. Определите относительные показатели плана, реализации плана и динамики грузооборота.
  21. Планом предусмотрено увеличение годовой производительности труда работников против прошлого года на 4%. Фактически против прошлого года производительность труда увеличилась на 6,2%. Определить процент реализации плана по уровню производительности труда.
  22. Планом предусмотрено увеличение объема продукции предприятия против прошлого года на 2,1%. Фактически прирост продукции против прошлого года составил 4,8%. Определить процент выполнения плана по выпуску продукции.
  23. По плану объем продукции в отчетном году должен возрасти против прошлого года на 2,5%. План выпуска продукции перевыполнен на 3%. Определите фактический выпуск продукции в отчетном году, если известно, что объем продукции в прошлом году составил 25300 тыс. руб.
  24. По плану отчетного года уровень годовой производительности труда работников должен возрасти против прошлого года на 3,0%. План по

- уровню производительности труда перевыполнен на 2,0%. Определить фактический уровень производительности труда, если известно, что в прошлом году уровень производительности труда составил 170 тыс. руб.
25. Предприятие перевыполнило план реализации продукции в отчетном году на 3,8%. Увеличение реализации продукции в отчетном году по сравнению с прошлым составило 5,6%. Определите, каков был план по росту объема реализации продукции.
26. План 2002 г. невыполнен на 0,5%. В 2002 г. по сравнению с 2001 г. возрос на 0,3%. Каков был запланированный рост производства в 2002 г. по сравнению с 2001 г.
27. По вузу за два года имеются данные о численности работников:

Показатель	Прошлый год	Отчетный год
Среднесписочная численность работников	1092	1251
в том числе		
профессорско-преподавательский состав	780	900
сотрудники	312	351

С помощью относительных показателей координации охарактеризовать изменения в соотношениях численности работников.

28. По двум промышленным предприятиям за отчетный год имеются следующие данные:

№ предприятия	Выпуск продукции, млн. руб.	Среднесписочная численность работников
1	180,0	1200
2	346,5	1980

Определить различие (в %) в уровне годовой производительности труда работников двух предприятий.

29. Жилищный фонд и численность населения России следующие:

Показатель	1999 г.	2000 г.	2001 г.
Весь жилой фонд на начало года, млн. м <sup>2</sup>	2492,0	2546,0	2608,0
Численность населения на начало года, млн. чел.	148,7	148,4	148,3

Охарактеризовать изменение обеспеченности населения жилой площадью. Перечислить, какие виды относительных показателей использовались.

30. Среднегодовая численность населения области в 1997 г. была 2540,7 тыс. чел. Из них занято в экономике 926, 2 тыс. чел. (в 1996 г. было занято в экономике 957,1 тыс. чел. при общей численности населения 2518,1 тыс. чел.), безработные составили 25,4 тыс. чел. Среди безработных лица с высшим образованием – 3,0 тыс. чел., молодежь в возрасте от 16 до 29 лет – 7,8 тыс. чел, женщины – 18,4 тыс. чел.

Определите относительные показатели динамики, структуры, координации и интенсивности.

31. В апреле 1996 г. прожиточный минимум в РФ для трудоспособного населения составил 419,0 тыс. руб. в месяц на человека, для пенсионеров – 262,5 тыс. руб., для детей – 376,1 тыс. руб. Сделайте выводы о соотношении этих величин, используя относительные показатели сравнения.
32. Демографическая ситуация области характеризуется следующими данными:

Зарегистрировано	1996 г.	Январь-ноябрь 1997 г.
1. Средняя численность населения	2 518 068	2 504 705
2. Родившихся живых	22 159	21 907
3. Умерших, в том числе детей до 1 года	39 709 426	35 270 334
4. Браков	17 820	17 507
5. Разводов	11 307	11 469

Рассчитайте относительные показатели динамики, интенсивности, сравнения и сделайте выводы о естественном движении населения.

33. На торгах фондовой биржи зафиксированы следующие цены акций:

Эмитент	Цена акций, ден. ед.		
	номинальная	рыночная	
		на 14.10	на 17.11
А	20	24	25
В	30	24	27

Проведите сравнительный анализ курса акций, укажите виды использованных относительных показателей

34. Имеются следующие данные о среднедушевом денежном доходе, тыс. руб. в месяц:

	Среднедушевой денежный доход в месяц, тыс. руб.	
	1995	1996
Москва	1803,9	2668,4
Ростовская область	333,0	503,3

Сравните доходы жителей Москвы и Ростовской области.

35. Численность экономически активного населения и безработных в России и во Франции (в среднем за год) представлена в следующей таблице:

	1992 г.	1993 г.	1994 г.
<b>Россия</b>			
Численность экономически активного населения, млн. чел.	76,5	75,6	74,0
Численность безработных, тыс. чел.	3594	4160	5478



<b>Франция</b>			
Численность экономически активного населения, млн. чел.	28,0	27,3	26,6
Численность безработных, тыс. чел.	2911	3172	3329

Определить удельный вес численности безработных в общей численности экономически активного населения и динамику этого показателя для каждой страны. С помощью относительных показателей сравнения дать оценку развития безработицы в России и во Франции.

- 36.** Используя относительные показатели сравнения, сопоставьте объемы хранимых ценных бумаг в крупнейших мировых депозитарных банках:

Банк	Объем ценных бумаг, млрд. долл.
State Street Bank	300
Euroclear	1748
Citibank	640
Chase Manhattan	452
Barclays	283
Midland	173

- 37.** Удельный вес мужчин в общей численности работников на предприятии увеличился с 48,3% в 2000 г. до 50,6% в 2003 г., а общая численность мужчин за этот период увеличилась на 12,3%. Определите:

- как изменилась за этот период общая численность женщин и всех работников данного предприятия;
- численность мужчин и женщин, работающих на предприятии в 2000 и в 2003 гг., если известно, что численность мужчин на предприятии за это время увеличилась на 430 человек.

Полученные данные представьте в таблице.

- 38.** Удельный вес мужского населения РФ увеличился с 15 января 1989 г. по 15 января 2000 г. с 45,0 до 46,1%. Определите показатели динамики численности мужского и женского населения, если общая численность населения за эти годы увеличилась на 15,8%.

- 39.** Удельный вес профессорско-преподавательского состава (ППС) в общей численности работников ВУЗа составил на 1 января 1999 г. 84,6%. С 1 января 1990 г. по 1 января 1999 г. численность ППС в этом вузе увеличилась на 87,5%, а численность всех работников увеличилась на 89,6%. Определите:

- удельный вес ППС и прочих сотрудников вуза на 1 января 1990 г.;
- относительные показатели динамики удельного веса ППС и прочих сотрудников вуза с 1 января 1990 г. до 1 января 1999 г.

- 40.** Удельный вес продовольственных товаров в общем объеме розничного товарооборота области составил в 1995 г. 70,7%, а общий объем розничного товарооборота и оборота по продаже продовольственных товаров вырос в 2003 г. по сравнению с 1995 г. соответственно на 28,3% и 26,4%. Определите:

- а) удельный вес непродовольственных товаров в общем объеме розничного товарооборота области в 1995 г.;
- б) удельный вес продовольственных и непродовольственных товаров в общем объеме розничного товарооборота области в 2003 г.;
- в) относительные показатели динамики удельного веса продовольственных и непродовольственных товаров (с 1995 по 2003 гг.).
- 41.** Удельные веса трех предприятий промышленного объединения в общем объеме валовой продукции составили в 2000 г. соответственно 24,3; 25,6 и 50,1%, а ее стоимость увеличилась в 2003 г. по сравнению с 2000 г. по первому предприятию на 10,0%, второму – 16,7%, третьему – 22,1%. Определите удельный вес валовой продукции каждого предприятия в 2003 г.
- 42.** Удельные веса численности работающих в трех фирмах промышленного объединения составили в 2003 г. 30,0; 25,8 и 44,2%, а относительные показатели динамики численности работающих в 2003 г. по сравнению с 1995 г. – 112,3; 120,6 и 110,4%. Определите:
- а) удельные веса отдельных фирм в общей численности работающих в объединении в 1995 г.;
- б) относительные показатели динамики этих удельных весов.

## Тема 5. Средние величины

### 5.1. Справочные материалы

Наиболее распространенными статистическими показателями являются статистические показатели в форме средних величин.

**Средняя величина** – это обобщающая мера варьирующего признака, характеризующая его уровень в расчете на единицу совокупности.

**Условиями применения средних величин** являются наличие качественно однородной совокупности и достаточно большой ее объем.

Определить среднюю во многих случаях можно через исходное соотношение средней или её логическую формулу:

$$\text{ИСС} = \frac{\text{Суммарное значение или объем осредняемого признака}}{\text{Число единиц совокупности}}$$

Числитель исходного соотношения средней представляет собой определяющий показатель.

Различают две основные формы средних:

1. Степенные средние.
2. Структурные.

Общая формула **степенной средней простой** записывается следующим образом:

$$\bar{x} = \left( \frac{\sum_{i=1}^n x_i^k}{n} \right)^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^k}{n}} = \sqrt[k]{\frac{x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k}{n}} \quad (5.1)$$

Общая формула **степенной средней взвешенной** записывается следующим образом:

$$\bar{x} = \left( \frac{\sum_{j=1}^m x_j^k f_j}{\sum_{j=1}^m f_j} \right)^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{\frac{\sum_{j=1}^m x_j^k f_j}{\sum_{j=1}^m f_j}} = \sqrt[k]{\frac{x_1^k f_1 + x_2^k f_2 + \dots + x_m^k f_m}{f_1 + f_2 + \dots + f_m}} \quad (5.2)$$

Изменение показателя степени  $k$  приводит в каждом отдельном случае к определенному виду средней:

Показатель степени	Вид средней	Формулы средней	
		Простая	Взвешенная
$k = -1$	Средняя гармоническая	$\bar{x}_{\text{гарм}} = \left( \frac{\sum_{i=1}^n x_i^{-1}}{n} \right)^{-1} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$	$\bar{x}_{\text{гарм}} = \frac{\sum_{j=1}^m f_j}{\sum_{j=1}^m \frac{1}{x_j} f_j}$
$k = 0$	Средняя геометрическая	$\bar{x}_{\text{геом}} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$	$\bar{x}_{\text{геом}} = \sqrt[\sum f_j]{x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \cdot \dots \cdot x_m^{f_m}} = \sqrt[\sum f_j]{\prod_{j=1}^m x_j^{f_j}}$
$k = 1$	Средняя арифметическая	$\bar{x}_{\text{арифм}} = \sqrt[\frac{1}{n}]{\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$	$\bar{x}_{\text{арифм}} = \frac{\sum_{j=1}^m x_j f_j}{\sum_{j=1}^m f_j}$
$k = 2$	Средняя квадратическая	$\bar{x}_{\text{квадр}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}}$	$\bar{x}_{\text{квадр}} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^m x_j^2 f_j}{\sum_{j=1}^m f_j}}$

Степенные средние, исчисленные для одной и той же совокупности, имеют различные количественные значения. Это отражено в **правиле мажорантности средних**: чем больше показатель степени, тем больше величина соответствующей средней:

$$\bar{x}_{\text{гарм}} < \bar{x}_{\text{геом}} < \bar{x}_{\text{арифм}} < \bar{x}_{\text{квадр}} \quad (5.3)$$

**Пример 5.1.** Рассмотрим следующие данные о реализации продукта одного вида на трех рынках:

Рынки	Цена за ед. продукции, руб., $x$	Количество проданной продукции, шт., $f$	Выручка от продажи, руб., $M$
I	0,30	1000	300
II	0,35	2000	700
III	0,40	2000	800
Итого	-	5000	1800

Требуется рассчитать среднюю цену, по которой продавался товар. Исходное соотношение средней, или ее логическая формула, выглядит следующим образом:

$$\text{средняя цена за единицу} = \frac{\text{выручка от продажи}}{\text{количество проданной продукции}}$$

Пусть мы располагаем только данными о ценах на трех рынках и о количестве товара, проданного на каждом из них. При этом цены на отдельных рынках выступают в качестве вариантов, а количество проданного товара – в качестве весов. Тогда средняя цена определится по средней арифметической взвешенной, то есть

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{0,3 \cdot 1000 + 0,35 \cdot 2000 + 0,4 \cdot 2000}{1000 + 2000 + 2000} = \frac{1800}{5000} = 0,36.$$

Теперь предположим, что количество проданного товара неизвестно, а известны цены и выручка от продажи. В этом случае расчет следует записать в форме средней гармонической взвешенной, т.е.

$$\bar{x} = \frac{\sum M}{\sum \frac{M}{x}} = \frac{300 + 700 + 800}{\frac{300}{0,3} + \frac{700}{0,35} + \frac{800}{0,4}} = \frac{1800}{5000} = 0,36.$$

Результат, как и следовало ожидать, получился тот же.

*Пример 5.2.* Предположим, что произведены инвестиции, приносящие ежегодный доход. Процент доходности меняется из года в год. Например, в течение 5 лет получен % дохода  $i_1$ - в первый год,  $i_2$  во второй год,  $i_3$  в третий год,  $i_4$  в четвертый год,  $i_5$ - в пятый год. Доход на инвестиции начисляется один раз в год. Это значит, что после первого года сумма, равная процентному приросту  $i_1$ , добавляется к первоначальной сумме счета.

Если необходимо найти средний уровень дохода за пять лет, то можно сложить  $i_1, i_2, i_3, i_4, i_5$  и разделить на 5. Полученная величина будет арифметической средней уровня дохода за 5 лет.

С другой стороны, если первоначальная сумма инвестиций  $P$ , то после первого года мы имеем  $P(1+i_1)$ . В конце второго года эта сумма составит  $P(1+i_1)(1+i_2)$  и т.д. После истечения пяти лет получим  $F=P(1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)(1+i_4)(1+i_5)$ . Если необходимо определить средний процент дохода  $i$ , который даст сумму дохода  $F$  по истечении пяти лет, при прибавлении ежегодного накопленного прироста к сумме вклада, то это должна быть геометрическая средняя процента по вкладу. Уровень процента  $i$  есть средняя из  $i_1, i_2, i_3, i_4, i_5$  в мультипликативном смысле. Это коэффициент, который находится из следующего уравнения:  $(i+1)^5=(1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)(1+i_4)(1+i_5)$ . Решение этого уравнения находится по формуле:  $(i+1) = \sqrt[5]{(1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)(1+i_4)(1+i_5)}$ ,

где  $(i+1)$  геометрическая средняя из  $(1+i_1), (1+i_2), (1+i_3), (1+i_4), (1+i_5)$ .

Например, предположим, что  $n = 2$  года,  $i_1 = 0,10$  и  $i_2 = 0,05$ .

Геометрическая средняя от  $(1+i_1)$  и  $(1+i_2)$  есть:

$$(i+1) = \sqrt{(1+0,1)(1+0,05)} = 1,0747$$

Эта средняя дает процентный рост по вкладу за два года – 0.0747, или 7,47%. Если использовать среднюю арифметическую, то  $x=(0,10+0,05)/2=0,075$ , что несколько отличается от геометрической средней. Разница в данном примере невелика, но расчет по формуле средней геометрической более верен.

*Пример 5.3.* Максимальный выигрыш в лотерее равен 1 000 000 рублей, а минимальный – 100 рублей. Какую величину можно считать средней между миллионом и сотней? Арифметическая средняя, равная 500 050 руб., здесь непригодна, т.к. это, как и миллион, крупный, а никак не средний выигрыш. Геометрическая средняя в этом случае дает наиболее правильный с точки зрения экономики и логики ответ:

$$\bar{x} = \sqrt{100 \cdot 1000000} = 10000 \text{ руб.}$$

При изучении статистической совокупности применяются такие ее характеристики, которые описывают количественно ее структуру, строение.

**Квантили** – это варианты, занимающие определенное место в ранжированной совокупности. К числу квантилей, наиболее часто используемых в статистическом анализе, относят **перцентили, квартили, децили и медиану**, которые характеризуют структуру совокупности.

**Перцентиль** – это значение признака в определенной позиции ранжированного ряда, мера относительной позиции варианта в ряду. Р-тый перцентиль – это значение признака, слева от которого лежит Р% вариантов ряда. Позиция Р-го перцентилея задается как  $(n+1)P/100$ , где n – число вариантов ряда.

В статистике наиболее часто применяются квантили, которые делят ряд на четыре равные части – **квартили** (от латинского слова quarta - четверть).

**Первый квартиль** (25-й перцентиль) – это значение признака, слева от которого лежит 1/4 (или 25%) всех вариантов.

**Второй квартиль** – это 50 перцентиль или медиана. **Медиана** – значение признака, относительно которого совокупность делится на две равные по числу вариантов части.<sup>1</sup>

**Третий квартиль** - это точка, слева от которой находится 3/4, или 75%, вариантов ряда.

25-й перцентиль называют нижним квартилем ( $Q_1$ ), 50-й перцентиль (медиану) – средним квартилем ( $Q_2$ ), 75-й перцентиль – верхним квартилем ( $Q_3$ ).

---

<sup>1</sup> Медиана обладает свойством: сумма абсолютных величин отклонений вариантов от медианы меньше, чем от любой другой величины, т.е.  $\sum |x_i - Me| = \min$ .

В статистическом анализе также часто применяют квантили, которые делят совокупность на десять равных частей – **децили**. Их значения определяются соответственно как 10, 20, ..., 90 перцентили.

В общем случае квантили интервального вариационного ряда определяются по формуле:

$$Q_p = x_{Q_p(\min)} + k \frac{P \sum f_i - V_{Q_{p-1}}}{f_{Q_p}}, \quad (5.4)$$

где  $x_{Q_p(\min)}$  – нижняя граница интервала, в котором находится квантиль;

$k$  – величина квантильного интервала (интервальная разность);

$V_{Q_{p-1}}$  – накопленная частота или частость интервала, предшествующего квантильному;

$P$  – доля признаков, находящихся левее квантиля (например, для верхнего квартиля -0,25, для медианы -0,5, для седьмого дециля - 0,7);

$\sum f_i$  – сумма всех частот;

$f_{Q_p}$  – частота квантильного интервала.

Для расчета значения медианы в интервальном вариационном ряду вначале находят интервал, содержащий медиану. Медианному интервалу соответствует первая из накопленных частот или частостей, превышающая половину всего объема совокупности. Внутри медианного интервала расчет значения медианы производится по формуле:

$$Me = x_{Me \min} + k \frac{0,5 \sum f_i - v_{Me-1}}{f_{Me}}, \quad (5.5)$$

где  $x_{Me \min}$  – нижняя граница медианного интервала;

$k$  – величина медианного интервала;

$0,5 \sum f_i$  – половина суммы всех частот (или частостей);

$v_{Me-1}$  – накопленная частота или частость интервала, предшествующего медианному;

$f_{me}$  – частота медианного интервала.

**Мода** – это значение признака, наиболее часто встречающееся в совокупности. В интервальном вариационном ряду мода рассчитывается по следующей формуле:

$$Mo = x_{Mo \min} + k \frac{f_{Mo} - f_{Mo-1}}{(f_{Mo} - f_{Mo-1}) + (f_{Mo} - f_{Mo+1})}, \quad (5.6)$$

где  $x_{Mo\min}$  – нижняя граница модального интервала;

$k$  – величина модального интервала;

$f_{Mo}$  – частота модального интервала;

$f_{Mo-1}$  – частота интервала, предшествующего модальному;

$f_{Mo+1}$  – частота интервала, следующего за модальным.

*Пример 5.4.* Правительство развивающейся страны объявило конкурс для зарубежных инвесторов на заключение контракта по строительству нового морского порта. В ответ были получены следующие предложения цены (млрд. долл.): 2, 3, 2, 4, 3, 5, 1, 1, 6, 4, 7, 2, 5, 1, 6. Построить вариационный ряд, найти среднюю арифметическую, квартили и 65-ый перцентиль.

*Решение:* Строим вариационный ряд

$x_i$	1	2	3	4	5	6	7
$f_i$	3	3	2	2	2	2	1

Рассчитаем среднюю арифметическую взвешенную:

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 1}{3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1} = \frac{52}{15} = 3,47 \text{ млрд. долл.}$$

Определим первый квартиль, или 25-ый перцентиль. Позиция этого перцентилья:  $(15+1) \cdot 0,25 = 4$ . Четвертое по порядку значение равно 2, т.е.  $Q_1 = 2$ .

Определим второй квартиль, или 50-ый перцентиль, т.е. медиану. Позиция этого перцентилья:  $(15+1) \cdot 0,5 = 8$ . Восьмое по порядку значение равно 3, т.е.  $Q_2 = Me = 3$ .

Определим третий квартиль, или 75-ый перцентиль. Позиция этого перцентилья:  $(15+1) \cdot 0,75 = 12$ . Двенадцатое значение признака равно 5, т.е.  $Q_3 = 5$ .

Позиция 65-го перцентилья:  $(15+1) \cdot 0,65 = 10,4$ . Десятый по порядку вариант равен 4, а одиннадцатый равен 5. Значение 65-го перцентилья находится в точке, которая делит расстояние десятым и одиннадцатым признаком в отношении 0,4 к 1. Следовательно,  $P_{65} = 4 + 0,4(5-4) = 4,4$ .<sup>2</sup>

***Среднюю арифметическую, медиану и моду часто называют мерами центральной тенденции.***

Что характеризуют эти три меры и каковы их достоинства и недостатки? Средняя суммирует всю информацию и является центром массы. Медиана – это значение признака в центре набора данных. Одна

<sup>2</sup> Квантили не всегда совпадают с определенными вариантами. Квантиль – это либо вариант ряда, либо промежуточное значение между двумя соседними вариантами.



половина значений признака лежит левее этой точки, другая – правее. Точное местонахождение любой точки не существенно при определении медианы; важно только ее положение относительно центрального значения, т.е. медиана устойчива по отношению к крайним значениям ряда. Средняя арифметическая, напротив, чувствительна к положению крайних значений ряда. Тем не менее средняя арифметическая имеет существенные преимущества перед другими мерами центральной тенденции. Средняя арифметическая основывается на информации, содержащей все значения ряда, в то время как медиана базируется только на значении, лежащем «в середине ряда». Если же необходимо предотвратить влияние нескольких наблюдений, лежащих далеко от центра ряда, то надо использовать и медиану. Например, если изучается распределение доходов и имеет место высокая степень неравенства, т.е. присутствует некоторое число единиц наблюдения как с очень высокими, так и с очень низкими доходами, то логичнее рассчитывать не средний доход, а медианный. В такой ситуации он более адекватно отразит типичное значение дохода.

Мода не так популярна в статистическом анализе, как средняя арифметическая и медиана. В одном ряду может быть несколько мод. Мода отдается предпочтение при изучении цен на рынке, спроса населения на отдельные продукты питания, одежду и обувь определенных размеров. ***Если средняя арифметическая близка к моде и медиане, то она типична.*** Вычисление моды особенно существенно в несимметричных рядах, когда она сильно отличается от медианы и средней арифметической.

## 5.2. Контрольные вопросы к теме 5

1. Дайте определение средней величины.
2. Каковы условия необходимости применения и типичности средней величины?
3. Когда применяется средняя гармоническая?
4. Какая величина должна быть использована в качестве обобщающей средней характеристики, чтобы число отклонений индивидуальных значений признака от нее было минимальным?
5. Какой показатель обладает свойством: алгебраическая сумма отклонений индивидуальных значений признака от него равна 0?
6. Какой показатель должен быть использован в качестве обобщающей средней характеристики, чтобы сумма квадратов отклонений индивидуальных значений признака от него была минимальной?
7. Какая величина должна быть использована в качестве обобщающей средней характеристики, чтобы сумма абсолютных отклонений индивидуальных значений признака от нее была минимальной?

8. Если все значения признака ряда уменьшить в одно и то же число раз, то что произойдет со средней арифметической?
9. Чем обуславливается выбор способа вычисления средней величины?
10. В чем заключается правило мажорантности средних?
11. Что такое квантили вариационного ряда?
12. Средняя арифметическая, мода и медиана как меры центральной тенденции.

### 5.3. Контрольные задания к теме 5

1. Общий размер капитала пяти коммерческих банков составлял 18,8 млн. ден. ед., а общая сумма прибыли – 51,7 млн. ден. ед. Определить среднюю прибыльность капитала.
2. Просроченная задолженность по кредитам акционерных обществ (АО) за отчетный период характеризуется следующими данными:

Номер акционерного общества	Задолженность по кредитам, тыс. руб.	Удельный вес просроченной задолженности, %
1	2500	20
2	3000	30
3	1000	16
Итого:	6500	-

Определить средний процент просроченной задолженности акционерного общества.

3. Доходы банков в отчетном году характеризуются следующими показателями:

№ банка	Средняя процентная ставка	Доход банка, тыс.руб.
1	40	600
2	35	350
Итого:	-	950

Определить среднюю процентную ставку.

4. Результаты работы страховых организаций в I полугодии характеризуются следующими данными:

№ организации	Страховой взнос, млн. руб.	Коэффициент выплат, К <sub>в</sub> .
1	400	0.5
2	500	0.6
3	700	0.2
Итого:	1600	-

Определить: 1) средний коэффициент выплат; 2) абсолютную сумму дохода страховых операций; 3) относительную доходность.

5. Имеются данные об итогах торгов на российских валютных биржах за 6.02.1995 г.

Валютные биржи	Объем продаж, млн. долл.	Курс, руб./долл.
Московская межбанковская	72,99	4133
Санкт-Петербургская	8,40	4165
Сибирская межбанковская	3,97	4126
Уральская региональная	25,69	4130
Азиатско-тихоокеанская межбанковская	3,50	4115
Ростовская межбанковская	0,64	4127
Нижегородская валютно-фондовая	0,02	4133

Вычислите средний курс доллара по результатам биржевых торгов.

6. Продукция, производимая малым предприятием, имеет разный уровень рентабельности реализации. В декабре этот показатель составил:

Продукция	Рентабельность реализации продукции, %	Прибыль, тыс. ден. ед.
А	12	600
В	7	140
С	21	630

Определите средний уровень рентабельности реализации продукции. Обоснуйте выбор средней.

7. Рентабельность активов акционерного общества характеризуется следующими данными:

№ предприятия, входящего в АО	Величина активов, тыс. руб.	Рентабельность активов, %
1	5000	8,0
2	8000	9,5

Определить рентабельность активов по АО в целом.

8. Финансирование инвестиций в основные средства за счет собственных средств по предприятиям акционерного общества за отчетный период характеризуется следующими данными:

№ предприятия АО	Общая сумма инвестиций в основные средства, млн. руб.	Удельный вес собственных средств предприятий АО в общем объеме инвестиций, %
1	15,5	69,3
2	40,0	57,4
3	32,0	62,8

Необходимо определить средний удельный вес собственных средств в общем объеме инвестиций в основные средства по АО.

9. В будние дни на протяжении торговой недели цена изделия оставалась на уровне 246 руб. «Распродажная» цена в субботу и в воскресенье была ниже на 20%. Определить среднюю цену изделия за неделю.

10. Фондовый индекс в течение пяти лет изменился со следующими годовыми темпами прироста: +10%, +20%, +15%, -30%, +20%. Определить среднегодовой темп прироста за пять лет.
11. В результате инфляции за первый год цена товара возросла в два раза к предыдущему году, а за второй год еще в три раза к уровню предыдущего года. Каков средний темп роста цены за год?
12. Первые два года фирма увеличивала выручку от реализации на 10%, или в 1,1 раза, ежегодно, за следующие три года она увеличивала выручку ежегодно на 20%, или в 1,2 раза. Чему равен среднегодовой темп роста выручки от реализации за весь период работы фирмы?
13. Количество зарегистрированных преступлений за четыре года возросло в 1,57 раза, в т.ч. за первый год – в 1,08, за второй – в 1,1, за третий – в 1,18, за четвертый – в 1,12 раза. Чему равен среднегодовой темп роста количества зарегистрированных преступлений?
14. Себестоимость продукции за первый год снизилась на 8%, за второй – на 5% и за третий – на 6%. Чему равно среднегодовое снижение себестоимости?
15. За первый год производительность труда выросла на 10%, за второй упала на 5%, а за третий выросла на 4%. Чему равен среднегодовой прирост производительности труда?
16. На сколько процентов ежегодно должна снижаться себестоимость единицы продукции, чтобы за пять лет произошло ее снижение на 30%?
17. За пять лет деятельности предприятия объем выпускаемой им продукции вырос в 2 раза. Чему равен среднегодовой темп роста продукции?
18. Автомобиль шел 3 часа со скоростью 110 км в час, 5 часов – со скоростью 90 км в час и 2 часа – со скоростью 80 км в час. Определите среднюю скорость движения машины.
19. Автомобиль совершил рейс общей протяженностью 500 км, из которых 240 км прошел со скоростью 100 км в час, 160 км – со скоростью 90 км в час и 100 км – со скоростью 120 км в час. Вычислите среднюю скорость, с которой машина прошла весь путь.
20. Определить среднюю сторону  $n$  квадратов, которая заменила бы собой конкретные величины, но оставила бы прежней общую площадь квадратов. Пусть стороны этих квадратов ( $x_i$ ) принимают такие варьирующие значения: 6, 8, 10 и 20 м.
21. Имеются данные о финансовых показателях фирм, тыс. руб.:

№ фирмы	Получено прибыли	Акционерный капитал	Рентабельность акционерного капитала, %	Удельный вес акционерного капитала, %
<i>A</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>
1	1500	5000	30	57,14
2	500	1250	40	14,29
3	850	2500	34	28,57

Определите средний процент рентабельности акционерного капитала фирм, используя показатели: а) гр.1 и 2; б) гр. 2 и 3; в) гр. 1 и 3; г) гр. 3 и 4.

- 22.** Имеются следующие данные об оплате труда работников малых предприятий:

№ предприятия	Фонд заработной платы, руб.	Среднесписочная численность работников, чел.	Среднемесячная заработная плата, руб.	Удельный вес работников, %
<i>A</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>
1	270 000	300	900	39,47
2	240 000	200	1200	26,32
3	260 000	260	1000	34,21

Определите среднюю заработную плату работников предприятий, используя показатели: а) гр. 1 и 2; б) гр. 2 и 3; в) гр. 1 и 3; г) гр. 3 и 4.

- 23.** Банк имеет данные о работе трех обменных пунктов валюты за день:

№ обменного пункта	Валютный курс, руб./долл.	Объем продаж, тыс. долл.	Выручка от продажи валюты, тыс. руб
<i>A</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>
1	28,70	8,1	232,47
2	28,68	10,4	298,27
3	28,73	5,2	149,40

Определите средний взвешенный курс доллара по трем обменным пунктам банка, используя показатели: а) гр. 1 и 2; б) гр. 1 и 3; в) гр. 2 и 3.

- 24.** По нижеследующим данным определить средний размер двух видов вкладов в банке в октябре и ноябре.

Вид вклада	Октябрь		Ноябрь	
	число вкладов, тыс.,	средний размер вклада, тыс. у.е.	сумма вкладов, млрд. у.е.	средний размер вклада, тыс. у.е.
До востребования	10	350	4,07	370
Срочный	8	400	3,87	430

- 25.** Окупаемость затрат на развитие новаторских работ характеризуется данными таблицы:

Новаторские работы	2002 г.		2003 г.	
	доход от использования работ, млн. ден. ед.	окупаемость 1 млн. затрат на развитие новаторства, млн. ден. ед.	затраты на развитие работ, млн. ден. ед.	окупаемость 1 млн. затрат на развитие новаторства, млн. ден. ед.
Изобретения	391	4,6	92	4,5
Рацпредложения	377	6,5	64	7,0

Определите среднюю окупаемость затрат на развитие новаторства в 2002 и 2003 годах. Как изменилась окупаемость в 2003 г. по сравнению с 2002 г.?

**26.** Имеются следующие данные о финансовых показателях фирм:

№ группы	Базисный период		Отчетный период	
	прибыль на одну акцию, руб.	количество акций	прибыль на одну акцию, руб.	сумма прибыли, тыс. руб.
1	8,0	60	9,0	810
2	4,0	40	8,0	480
3	5,0	53	7,0	520

Определите среднюю прибыль на одну акцию по трем фирмам в каждом периоде.

**27.** Результаты работы страховых компаний за отчетный период характеризуются следующими показателями:

№ компании	Имущественное страхование		Личное страхование	
	страховые взносы, тыс. руб.	коэффициент выплат, %	страховые выплаты, тыс. руб.	коэффициент выплат, %
1	7600	18	4480	56
2	8400	30	14000	70

Определите средние коэффициенты выплат и показатели относительной доходности по каждой отрасли страхования по двум отраслям.

**28.** Эффективность работы акционерного общества характеризуется показателями:

№ предприятия	I полугодие		II полугодие	
	акционерный капитал	рентабельность акционерного капитала, %	прибыль, тыс. руб.	рентабельность акционерного капитала, %
1	2040	30	770	35
2	760	40	378	42
3	1500	25	480	30

Определите средний процент рентабельности акционерного капитала по предприятиям АО за каждое полугодие и абсолютный прирост прибыли по каждому предприятию и в целом по АО.

29. Получены данные о кредитных операциях банков за отчетный период:

№ банка	Краткосрочный кредит		Долгосрочный кредит	
	средняя процентная ставка	сумма кредита, млн. руб.	средняя процентная ставка	доход банка, млн. руб.
1	40	400	18	27
2	50	600	15	45
3	44	560	20	34

Определите среднюю процентную ставку по каждому виду кредита в целом по трем банкам.

30. Имеются следующие данные о торговле товаром А на субрынках города за базисный и отчетный периоды:

Субрынки	Базисный период		Отчетный период	
	товарооборот, тыс. руб.	средняя цена, руб.	количество продаж, тыс. руб.	средняя цена, руб.
Рынки мелкооптовой торговли	1200	25	45	26
Центр. часть города	324	36	6	39
“Спальные” районы	400	32	11	34

Определите среднюю цену товара в каждом периоде.

31. Имеются следующие данные по трем заводам, вырабатывающим одноименную продукцию:

№ завода	Базисный период		Отчетный период	
	затраты времени на единицу продукции, час.	изготовлено продукции, тыс. шт.	затраты времени на единицу продукции, час.	затраты времени на всю продукцию, час.
1	0,40	63	0,35	21000
2	0,45	56	0,40	25600
3	0,50	34	0,45	16200

Вычислите средние затраты времени на продукцию по трем заводам в базисном и отчетном периодах. Сравните полученные результаты и сделайте выводы. Укажите, какие виды средних необходимо применить.

32. Выработка тканей по цехам фабрики характеризуется следующими показателями:

Цех	Март		Апрель	
	численность рабочих	средняя выработка ткани за смену одним рабочим, м	средняя выработка ткани за смену одним рабочим, м	выработано ткани всего, м
1	50	80	83	4565
2	70	82	83	5810
3	80	85	86	7740

Вычислите выработку ткани на одного рабочего в среднем по фабрике за март и за апрель. В каком месяце и на сколько средняя выработка выше? Укажите, какие виды средних применяли.

- 33.** Имеются следующие данные о товарообороте продовольственных магазинов розничной торговли:

Мага- зин	Торг №1		Мага- зин	Торг №2	
	фактический товарооборот, млн. руб.	выполнение договорных обязательств, %		план товарооборо- та, млн. руб.	выполнение договорных обязательств, %
1	800	100	4	250	110
2	159	106	5	500	90
3	309	103	6	580	130

Определите средний процент выполнения договорных обязательств по торгу №1 и по торгу №2. Сравните полученные результаты. Укажите, какие виды средних необходимо применить.

- 34.** Имеются следующие данные по предприятиям:

№ предприя- тия	I квартал		II квартал	
	себестоимость единицы продукции, тыс. руб.	количество изделий, тыс. шт.	себестоимость всей продукции (затраты на продукцию), млн. руб.	себестоимость единицы продукции, тыс. руб.
1	10	11	108	9
2	12	16	200	10
3	9	18	162	9

Вычислите среднюю себестоимость продукции: а) за I квартал; б) за II квартал. Сравните полученные результаты. Укажите, какие виды средних необходимо применить.

- 35.** По трем коммерческим фирмам области имеются следующие данные о товарообороте и уровне издержек обращения:

Фирма	Май		Июнь	
	товарооборот, млн. руб.	удельный вес издержек обращения, %	удельный вес издержек обращения, %	издержки обращения, млн. руб.
1	650	6,4	6,2	52,0
2	720	7,7	8,1	74,6
3	610	5,9	6,3	43,8

Определите средний удельный вес издержек обращения по трем коммерческим фирмам: а) за май; б) за июнь. В каком месяце и на сколько средний удельный вес издержек выше?

- 36.** По двум предприятиям фирмы имеются следующие данные о затратах на производство продукции:



№ предприятия	Прошлый год		Отчетный год	
	доля затрат на оплату труда в общих затратах на производство, %	общие затраты на производство, млн. руб.	затраты на оплату труда, млн. руб.	доля затрат на оплату труда в общих затратах на производство, %
1	18,0	200	40,7	18,5
2	19,5	180	38,0	20,2

Определить изменение в % доли затрат на оплату труда в общих затратах на производство в целом по фирме в отчетном году по сравнению с прошлым.

37. Основываясь на данных о степени урбанизации и концентрации населения в отдельных регионах страны, определите по стране в целом долю городского населения и среднюю плотность населения.

Регион	Общая численность населения, млн. чел.	Доля городского населения, %	Плотность населения, чел./км <sup>2</sup>
А	2,5	70	90
В	1,3	65	52
С	1,2	61	48

38. По трем районам города имеются следующие данные на конец отчетного года:

Район города	Число отделений Сбербанка	Среднее число вкладов в отделениях	Средний размер вклада, ден. ед.
1	8	1500	400
2	7	1000	450
3	6	2000	500

Определите на конец года в целом по городу:

- среднее число отделений Сбербанка;
- среднее число вкладов;
- средний размер вклада;
- среднюю сумму вкладов.

Что служит весами при расчете средних?

39. По трем районам города имеются следующие данные на конец отчетного года:

Район города	Сумма вкладов в отделениях Сбербанка, тыс. ден. ед.	Среднее число вкладов в отделениях	Средний размер вклада, ден. ед.
1	4800	1500	400
2	3150	1000	450
3	6000	2000	500

Определите на конец года в целом по городу:

- средний размер вклада;
- среднее число вкладов;
- среднее число отделений Сбербанка на один район города;

г) среднюю сумму вкладов.

- 40.** Распределение промышленных предприятий региона по показателю затрат на 1 тыс. руб. продукции в текущем месяце следующее:

Затраты на 1 тыс. руб. продукции, руб.	Число предприятий	Общая стоимость продукции
600 – 650	2	19 800
650 – 700	8	66 000
700 – 750	4	32 000
750 – 800	3	21 450

Определить: средний размер затрат на 1 тыс. руб. продукции по предприятиям региона и средний объем продукции на одно предприятие.

- 41.** Распределение промышленных предприятий региона по показателям затрат на 1 тыс. руб. товарной продукции за два месяца следующее:

Затраты на 1 тыс. руб. продукции, руб.	Март		Апрель	
	Число предприятий	Общая стоимость продукции	Число предприятий	Средний объем товарной продукции на одно предприятие, тыс. руб.
600 – 650	5	48 500	16	9 800
650 – 700	18	178 200	20	10 200
700 – 750	7	52 500	2	7 650

Определить: а) изменение в % среднего размера затрат на 1 тыс. руб. товарной продукции по предприятиям региона;

б) средний объем товарной продукции на одно предприятие региона в марте и апреле.

- 42.** Следующие данные показывают годовой прирост в % на 15 различных акций: 12,2; 13,0; 14,8; 11,0; 16,7; 9,0; 8,3; -1,2; 3,9; 15,5; 16,2; 18,0; 11,6; 10,0; 9,5. Определите квартили для этих данных, 55 и 85 перцентили.
- 43.** Следующие данные представляют число пассажиров компании «Аэрофлот-Дон» на рейсах Ростов – Москва за январь месяц: 133, 114, 119, 120, 127, 125, 123, 109, 116, 121, 123, 128, 131, 136, 132, 110, 118, 121, 128, 123, 130, 129, 128, 132, 136, 134, 129, 134, 128, 136, 134. Чему равно среднее число пассажиров на рейсах? Найдите квартили, 10, 15 и 65 перцентили.

## Тема 6. Меры вариации

### 6.1. Справочные материалы

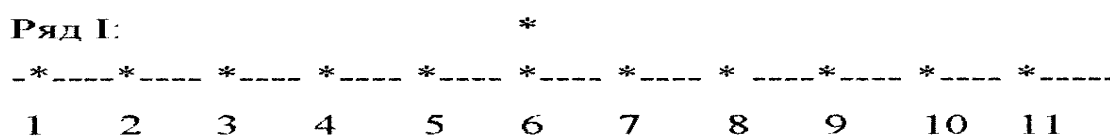
*Пример 6.1.* Рассмотрим два вариационных ряда:

Ряд I: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 9, 10, 11.

Ряд II: 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 8.

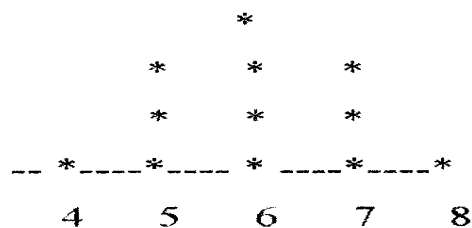
В чем отличие между рядами, если  $\bar{x}_I = Mo_I = Me_I = 6; n_I = 12$   
 $\bar{x}_{II} = Mo_{II} = Me_{II} = 6; n_{II} = 12$  ?

Рисунок 6.1 графически изображает ряд I и ряд II. Ряд I более *вариабелен*, чем ряд II.



Средняя = Медиане = Моде = 6

Ряд II:



Средняя = Медиане = Моде = 6

Рис. 6.1. Сравнение вариации рядов I и II

В статистике используется ряд мер вариабельности (колеблемости).

Определим *интерквартильный размах* как разницу между третьим и первым квартилями.

$$IQR = Q_3 - Q_1 \quad (6.1)$$

Другая подобная мера – размах вариации.

*Размах вариации в ряду* – разность между наибольшим и наименьшим значениями признака.

$$R = x_{\max} - x_{\min} \quad (6.2)$$

По данным примера 6.1 имеем  $IQR_I = 5,5; IQR_{II} = 2; R_I = 10; R_{II} = 4$ .

Существуют и другие более часто используемые меры вариации. Это *среднее линейное отклонение, дисперсия и стандартное отклонение (или среднее квадратическое отклонение)*.

Вариацию можно определить как меру отклонений значений признаков вариационного ряда от центра ряда распределения – средней арифметической.

*Среднее линейное отклонение* есть средняя арифметическая абсолютных значений отклонений значений признаков ряда от их средней арифметической.

$$L = \frac{\sum |x - \bar{x}|}{n} \text{ – простое} \quad (6.3)$$

$$L = \frac{\sum |x - \bar{x}| f}{\sum f} \text{ – взвешенное} \quad (6.4)$$

*Дисперсия вариационного ряда* есть средняя арифметическая квадрата отклонения (средний квадрат отклонения) значений признаков ряда от их средней арифметической.

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n} \text{ – простая} \quad (6.5)$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 f}{\sum f} \text{ – взвешенная} \quad (6.6)$$

*Стандартное отклонение вариационного* ряда есть арифметическое значение корня квадратного из дисперсии.

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \quad (6.7)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}} \text{ – простое} \quad (6.7a)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2 f}{\sum f}} \text{ – взвешенное} \quad (6.7b)$$

Для ручного счета лучше пользоваться формулой дисперсии следующего вида.

$$\sigma^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 \quad (6.8)$$

Для оценки интенсивности вариации и сравнения ее в разных совокупностях и различных признаков применяются относительные показатели вариации, которые вычисляются как отношение абсолютных показателей силы вариации к средней арифметической. Существуют следующие показатели, выраженные в процентах: *относительный размах*

**вариации, относительное линейное отклонение и коэффициент вариации.**

**Относительный размах вариации (коэффициент осцилляции)** отражает относительную меру колеблемости крайних значений признака вокруг средней.

$$K_p = \frac{R}{\bar{x}} \cdot 100 \quad (6.9)$$

**Относительное линейное отклонение** отражает долю усредненного значения абсолютных отклонений от средней величины.

$$K_L = \frac{L}{\bar{x}} \cdot 100 \quad (6.10)$$

**Коэффициент вариации** позволяет представить дисперсию как долю от средней величины.

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100, \quad (6.11)$$

Чем меньше значение коэффициента вариации, тем однороднее совокупность по изучаемому признаку и типичнее средняя.<sup>1</sup>

Для более ясного представления и использования в экономико-статистическом анализе показатели вариации представлены на схеме 6.1.

### **Меры вариации для сгруппированных данных. Правило сложения дисперсий**

При изучении вариации для сгруппированных данных выделяют три вида дисперсий: **общую дисперсию, внутригрупповую (частную) дисперсию, межгрупповую дисперсию.**

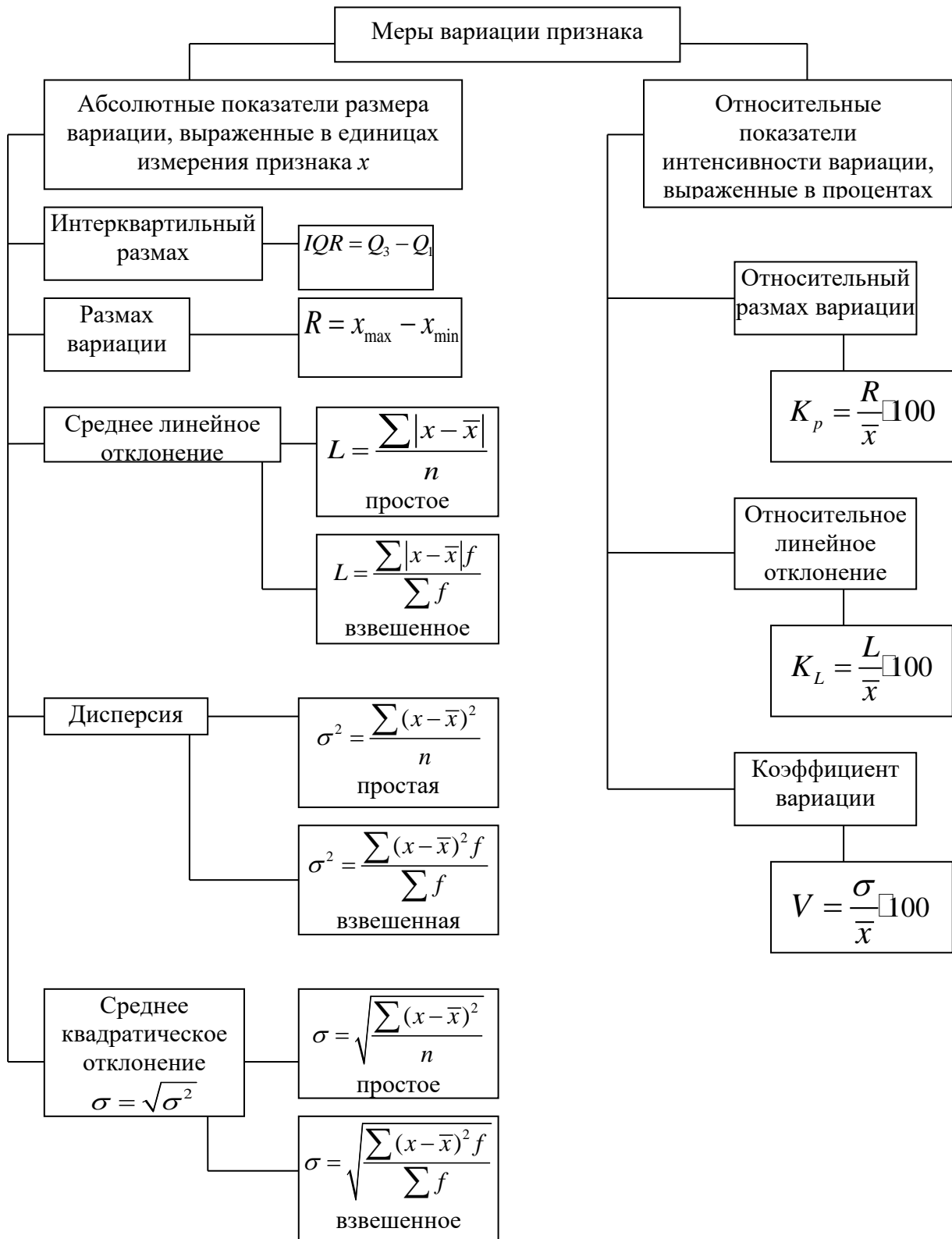
**Общая дисперсия** измеряет вариацию признака во всей совокупности под влиянием всех факторов.

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 f_i}{\sum_{i=1}^k f_i}. \quad (6.12)$$

---

<sup>1</sup> Использование коэффициента вариации имеет смысл при изучении вариации признака, принимающего только положительные значения. Совершенно неправильно пользоваться  $V$  в случае измерения колеблемости признака, принимающего как положительные, так и отрицательные значения. Не имеет смысла, например,  $V$ , вычисленный для изучения колеблемости среднегодовой температуры воздуха, что особенно ясно при среднегодовой температуре близкой к нулю.

## Статистическое изучение вариации



**Внутригрупповая (частная) дисперсия измеряет вариацию признака внутри группы.**

$$\sigma_j^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x}_j)^2 f_i}{\sum f_i}, \quad (6.13)$$

где  $x_i$  – значения признаков внутри  $j$ -й группы;  $\bar{x}_j$  – средняя арифметическая  $j$ -й группы;  $f_i$  – частоты вариантов в  $j$ -й группе;  $\sum f_i = N_j$  – объем  $j$ -й группы. Суммирование и в числителе, и в знаменателе осуществляется только по тем признакам, которые попали в  $j$ -ю группу.

**Средняя из внутригрупповых (частных) дисперсий.**

$$\overline{\sigma_j^2} = \frac{\sum_{j=1}^l \sigma_j^2 N_j}{\sum_{j=1}^l N_j}, \quad (6.14)$$

где  $N_j$  – объем  $j$ -й группы,  $j=1,2,\dots,l$  ( $l$  – число групп),  $\sum_{j=1}^l N_j = n$  – общее число признаков ряда.

**Межгрупповая дисперсия** измеряет колеблемость групповых средних вокруг общей средней и отражает вариацию, обусловленную признаком, положенным в основу группировки.

$$\delta^2 = \frac{\sum_{j=1}^l (\bar{x}_j - \bar{x})^2 N_j}{\sum_{j=1}^l N_j}, \quad (6.15)$$

где  $\bar{x}$  – общая средняя вариационного ряда.

Существует закон, связывающий три вида дисперсии.

**Общая дисперсия равна сумме средней из внутригрупповых и межгрупповой дисперсий.**

$$\sigma^2 = \overline{\sigma_j^2} + \delta^2 \quad (6.16)$$

Зная любые два вида дисперсий, всегда можно найти или проверить правильность расчета третьего вида.

$$\delta^2 = \sigma^2 - \overline{\sigma_j^2} \quad (6.16a)$$

$$\overline{\sigma_j^2} = \sigma^2 - \delta^2 \quad (6.16b)$$

Правило сложения дисперсий позволяет оценить степень влияния группировочного признака на результативный признак и количественно измерить степень этого влияния.

Для этого применяется *коэффициент детерминации*, который показывает степень колеблемости в процентах результативного признака в зависимости от степени колеблемости факторного и рассчитывается как отношение факторной дисперсии к общей дисперсии результативного признака.

$$\eta^2 = \frac{\delta^2}{\sigma^2} \quad (6.17)$$

Корень квадратный из коэффициента детерминации называют *эмпирическим корреляционным отношением (ЭКО)*, которое показывает степень тесноты связи.

$$\eta = \sqrt{\eta^2} = \sqrt{\frac{\delta^2}{\sigma^2}} \quad (6.18)$$

Это показатель принимает значения в интервале [0,1]. Если связь отсутствует, то  $\eta=0$ . В этом случае дисперсия групповых средних равна нулю ( $\delta^2=0$ ), то есть все групповые средние равны между собой и межгрупповой вариации нет. Если связь функциональная, то  $\eta=1$ . В этом случае дисперсия групповых средних равна общей дисперсии ( $\delta^2=\sigma^2$ ). Промежуточные значения  $\eta$  оцениваются по степени их близости к предельным.

*Пример 6.2.* Опрос 8 биржевых брокеров дал следующие результаты:

Брокер	Проходил ли переобучение В последние три года	Число контрактов, заключенных в день опроса
1	Да	9
2	Нет	8
3	Нет	6
4	Да	7
5	Нет	7
6	Да	8
7	Да	8
8	Нет	7



Среднее число контрактов, заключенных брокерами:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} = \frac{9+8 \cdot 3+6+7 \cdot 3}{1+3+1+3} = \frac{9+24+6+21}{8} = \frac{60}{8} = 7,5.$$

В данном примере переподготовка – факторный признак, а число заключаемых контрактов – результативный.

Сгруппируем эти данные по признаку переобучения и рассчитаем средние по каждой группе.

Группы брокеров	Число брокеров	Число контрактов	Групповые средние
Прошли переобучение	4	9, 8, 8, 7	8
Не прошли переобучение	4	8, 7, 7, 6	7

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} x_i}{n_1} = \frac{9+8+8+7}{4} = 8, \text{ где } n_1 \text{ – число признаков в первой группе.}$$

Или по формуле для взвешенных вариант

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{k_1} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{k_1} f_i} = \frac{9+8 \cdot 2+7}{1+2+1} = 8, \text{ где } f_i \text{ – частоты ряда.}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_2} x_i}{n_2} = \frac{8+7+7+6}{4} = 7, \text{ где } n_2 \text{ – число признаков во второй группе.}$$

Или по формуле для взвешенных вариант

$$\bar{x}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{k_2} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{k_2} f_i} = \frac{8+7 \cdot 2+6}{1+2+1} = 7, \text{ где } f_i \text{ – частоты ряда.}$$

Рассчитаем дисперсии в каждой группе.

Дисперсия числа заключенных контрактов у брокеров, прошедших переобучение:

Число контрактов X	Частота f	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 f$
9	1	1	1	1
8	2	0	0	0
7	1	-1	1	1
Итого	4	-	-	2

$$\sigma_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k1} (x_i - \bar{x})^2 f_i}{\sum_{i=1}^{k1} f_i} = \frac{2}{4} = 0,5$$

Дисперсия числа заключенных контрактов у брокеров, не прошедших переобучение:

Число контрактов X	Частота $f$	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 f$
8	1	1	1	1
7	2	0	0	0
6	1	-1	1	1
Итого	4	-	-	2

$$\sigma_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k2} (x_i - \bar{x})^2 f_i}{\sum_{i=1}^{k2} f_i} = \frac{2}{4} = 0,5$$

Рассчитаем среднюю из внутригрупповых дисперсий:

$$\overline{\sigma_j^2} = \frac{\sum_{j=1}^l \sigma_j^2 N_j}{\sum_{j=1}^l N_j} = \frac{0,5 \cdot 4 + 0,5 \cdot 4}{8} = 0,5$$

Этот показатель характеризует влияние на результативный признак всех прочих факторных признаков за исключением признака, положенного в основу группировки. Очевидно, что различие в числе заключенных контрактов в двух группах вызвано тем, что брокеры первой группы прошли переобучение, а брокеры второй группы не прошли.

Найдем дисперсию между группами (межгрупповую дисперсию).

$$\delta^2 = \frac{\sum_{j=1}^l (\bar{x}_j - \bar{x})^2 N_j}{\sum_{j=1}^l N_j} = \frac{(8 - 7,5)^2 \cdot 4 + (7 - 7,5)^2 \cdot 4}{8} = 0,25$$

Этот показатель характеризует влияние на результативный признак факторного признака, положенного в основу группировки.

Рассчитаем общую дисперсию числа заключенных контрактов.

Число контрактов X	Частота $f$	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 f$
9	1	1,5	2,25	2,25
8	3	0,5	0,25	0,75
7	3	-0,5	0,25	0,75
6	1	-1,5	2,25	2,25
Итого	8	-	-	6,0

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 f_i}{\sum_{i=1}^k f_i} = \frac{6}{8} = 0,75$$

Итак, по данным примера имеем  $\sigma^2 = 0,75$ ,  $\overline{\sigma_j^2} = 0,5$ ,  $\delta^2 = 0,25$ . Тогда по правилу сложения дисперсий получаем  $0,75 = 0,5 + 0,25$ .

Рассчитаем коэффициент детерминации:  $\eta^2 = \frac{\delta^2}{\sigma^2} = \frac{0,25}{0,75} = 0,33$ , или 33%. То есть вариация числа заключенных контрактов на 33% объясняется фактором переобучения, 67% – то влияние прочих факторов.

Эмпирическое корреляционное отношение:  
 $\eta = \sqrt{\frac{\delta^2}{\sigma^2}} = \sqrt{\frac{0,25}{0,75}} = \sqrt{0,33} = 0,57$ . Следовательно, фактор, положенный в основу группировки, существенно влияет на число заключаемых брокерами контрактов, но существуют и другие факторы, влияние которых тоже значительно.

### ***Вариация альтернативного (качественного) признака.***

#### ***Правило сложения дисперсий для доли признака***

При статистическом выражении колеблемости альтернативных признаков наличие изучаемого признака обозначается  $1$ , а его отсутствие –  $0$ . Доля вариантов, обладающих изучаемым признаком, обозначается  $p$ , а доля вариантов, не обладающих признаком,  $q$ . Следовательно,  $p+q=1$ .

Найдем их среднее значение и дисперсию:

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{1 \cdot p + 0 \cdot q}{p + q} = p \quad (6.19)$$

$$\sigma_p^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 f}{\sum f} = \frac{(1-p)^2 \cdot p + (0-p)^2 \cdot q}{p+q} = q^2 p + p^2 q = pq(p+q) = pq \quad (6.20)$$

Дисперсия альтернативного признака равна произведению доли единиц, обладающих признаком, и доли единиц, не обладающих им.

*Пример 6.3.* На 10000 населения приходится 4000 мужчин и 6000 женщин. Определить среднее квадратическое отклонение по полу.

*Решение:* Доля мужчин в населении  $p=4000/10000=0,4$ ; доля женщин  $q=6000/10000=0,6$ . Тогда дисперсия  $\sigma_p^2 = pq = 0,4 \cdot 0,6 = 0,24$ , а среднее квадратическое отклонение  $\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2} = \sqrt{0,24} = 0,49$ .

*Пример 6.4.* Налоговой инспекцией одного из районов города проведено 86 проверок коммерческих фирм и в 37 обнаружены финансовые нарушения. Определить среднее квадратическое отклонение числа нарушений.

*Решение:* По условию  $n=86$ ,  $m=37$ , тогда доля фирм, в которых обнаружены нарушения, составит  $p=37/86=0,43$ ;  $q=1-0,43=0,57$ . Дисперсия -  $\sigma_p^2 = pq = 0,43 \cdot 0,57 = 0,245$ , а среднее квадратическое отклонение  $\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2} = \sqrt{0,245} = 0,495$ .

Правило сложения дисперсий распространяется и на дисперсии доли признака, то есть доли единиц с определенным признаком в совокупности, разбитой на части (группы).

***Внутригрупповая дисперсия доли*** определяется по формуле:

$$\sigma_i^2 = p_i(1 - p_i) \quad (6.21)$$

***Средняя из внутригрупповых дисперсий*** рассчитывается так:

$$\overline{\sigma_{pi}^2} = \overline{p_i(1 - p_i)} = \frac{\sum p_i(1 - p_i)n_i}{\sum n_i}, \quad (6.22)$$

где  $n_i$  – численность единиц в отдельных группах.

***Формула межгрупповой дисперсии*** имеет следующий вид:

$$\delta_{pi}^2 = \frac{\sum (p_i - \bar{p})^2 n_i}{\sum n_i}, \quad (6.23)$$

$\bar{p}$  – доля изучаемого признака во всей совокупности, которая определяется по формуле:

$$\bar{p} = \frac{\sum p_i n_i}{\sum n_i}. \quad (6.24)$$

***Общая дисперсия*** определяется по формуле:

$$\sigma_{\bar{p}}^2 = \bar{p}(1 - \bar{p}). \quad (6.25)$$

Три вида дисперсий объединены между собой следующим образом:

$$\sigma_{\bar{p}}^2 = \overline{\sigma_{pi}^2} + \delta_{pi}^2. \quad (6.26)$$

***Это правило сложения дисперсии доли признака.***

*Пример 6.5.* Имеются следующие данные об удельном весе основных рабочих в трех цехах фирмы:

Цех	Удельный вес основных рабочих в % ( $p_i$ )	Численность всех рабочих в %
1	80	100
2	75	200
3	90	150
Итого	-	450

Определить общую дисперсию доли основных рабочих по всей фирме, используя правило сложения дисперсий.

*Решение:* 1) Определим долю рабочих в целом по фирме (формула 6.24).

$$\bar{p} = \frac{0,8 \cdot 100 + 0,75 \cdot 200 + 0,9 \cdot 150}{100 + 200 + 150} = \frac{365}{450} = 0,81.$$

2) Общая дисперсия доли основных рабочих по фирме в целом будет равна (формула 6.25):

$$\sigma_{\bar{p}}^2 = 0,81 \cdot (1 - 0,81) = 0,154.$$

3) Внутрицеховые дисперсии рассчитаем, применив формулу 6.21.

$$\sigma_{p_1}^2 = 0,8 \cdot 0,2 = 0,16; \quad \sigma_{p_2}^2 = 0,75 \cdot 0,25 = 0,19; \quad \sigma_{p_3}^2 = 0,9 \cdot 0,1 = 0,09.$$

4) Средняя из внутригрупповых дисперсий будет равна (формула 6.22.)

$$\overline{\sigma_{p_i}^2} = \frac{0,16 \cdot 100 + 0,19 \cdot 200 + 0,09 \cdot 150}{100 + 200 + 150} = \frac{675}{450} = 0,15.$$

5) Межгрупповую дисперсию определим по формуле 6.23.

$$\delta_{p_i}^2 = \frac{(0,8 - 0,81)^2 \cdot 100 + (0,75 - 0,81)^2 \cdot 200 + (0,9 - 0,81)^2 \cdot 150}{100 + 200 + 150} = \frac{365}{450} = 0,004.$$

Проверка вычислений показывает:  $0,154 = 0,15 + 0,004$ .

### ***Показатели дифференциации и концентрации***

Анализ вариации в рядах распределения целесообразно дополнить ***показателями дифференциации.***

Для оценки дифференциации значений признака ряда используются ***децильный коэффициент дифференциации и коэффициент фондов.***

***Децильный коэффициент*** равен отношению девятой децили к первой децили. Децильный коэффициент широко применяют при измерении соотношения уровней дохода 10% наиболее обеспеченного и 10% наименее обеспеченного населения (в разгах).

***Коэффициент фондов*** равен отношению среднего уровня 10-й децили к среднему уровню 1-й децили. Он дает более точный уровень дифференциации.

Государственная статистика регулярно публикует коэффициент фондов для характеристики дифференциации доходов. Однако в

исследовательской работе чаще используется децильный коэффициент дифференциации. Его применение особенно эффективно в случае, если, например, в распределении доходов в начале первого дециля присутствуют крайне низкие доходы, а десятый дециль завершается аномально высокими доходами, которые существенно влияют на сумму доходов в этих децилях. В такой ситуации правильнее применять децильный коэффициент дифференциации, а не коэффициент фондов.

К показателям дифференциации близки по значению **показатели концентрации: коэффициент Джини и коэффициент Герфиндаля.**

**Коэффициент концентрации Джини** рассчитывается по формуле:

$$G = \sum_{i=1}^{n-1} p_i q_{i+1} - \sum_{i=1}^{n-1} p_{i+1} q_i, \quad (6.27)$$

где  $p_i$  – накопленная доля (частость) численности единиц ряда

$q_i$  – накопленная доля значений признака, приходящаяся на все единицы ряда со значениями признака не более  $x_i$ .<sup>2</sup>

Коэффициент Джини может принимать значения от 0 до 1, поэтому результат следует разделить либо на 100, если  $p_i$  или  $q_i$  выражен в процентах, либо на 10000, если оба показателя выражены в процентах. Чем больше концентрация признака, тем ближе коэффициент Джини к 1. Коэффициент Джини используют для характеристики степени неравномерности распределения совокупности (например, населения) по уровню признака (например, доходов).

**Коэффициент Герфиндаля** вычисляется на основе данных о доле изучаемого признака в  $i$ -той группе в совокупном объеме признака:

$$H = \sum_i \left( \frac{x_i f_i}{\sum_i x_i f_i} \right)^2 \quad \text{или} \quad H = \sum_i \left( \frac{Q_i}{\sum_i Q_i} \right)^2, \quad (6.28)$$

где  $\frac{x_i f_i}{\sum_i x_i f_i}$  – доля выручки  $i$ -той группы в общем объеме всех значений признака;

$Q_i$  – объём значений признака в  $i$ -той группе.

Показатель  $H$  зависит от числа единиц в группах.

<sup>2</sup> Существует много других аналитических выражений коэффициента Джини, но в целях экономии места мы остановимся на одном.

Пример 6.6. Имеются данные о полученной балансовой прибыли 50 крупнейших банков России (по состоянию на 01.01.1998 г.) (в млн. руб.):

1	-	974,2	11	-	188,8	21	-	143,9	31	-	85,4	41	-	69,3
2	-	609,2	12	-	187,3	22	-	134,6	32	-	84,5	42	-	66,4
3	-	588,3	13	-	186,8	23	-	120,9	33	-	82,4	43	-	66,2
4	-	562,9	14	-	171,1	24	-	112,2	34	-	79,6	44	-	59,7
5	-	436,3	15	-	167,9	25	-	108,5	35	-	74,3	45	-	59,1
6	-	432,5	16	-	164,3	26	-	101,6	36	-	74,0	46	-	58,3
7	-	283,6	17	-	160,3	27	-	101,3	37	-	73,5	47	-	57,4
8	-	265,8	18	-	159,9	28	-	97,4	38	-	73,2	48	-	53,8
9	-	231,5	19	-	157,5	29	-	97,4	39	-	73,0	49	-	51,4
10	-	211,7	20	-	147,6	30	-	92,0	40	-	71,5	50	-	51,2

Величина балансовой прибыли Сбербанка России на 01.07.97 – 4353,283 млн. руб.

1. Постройте вариационный ряд, образовав 7-8 интервалов произвольно.
2. Рассчитайте средний размер балансовой прибыли на один банк на основе средней арифметической, моды и медианы.
3. Рассчитайте показатели вариации.
4. Измерьте дифференциацию банков на основе децильного коэффициента и коэффициента фондов.
5. Рассчитайте коэффициент концентрации Джини и Герфиндаля.

Решение:

1. Распределение 50 банков РФ по размеру балансовой прибыли (БП) на 01.01.1998 г.

БП, млн. руб. $x_{k-1}-x_k$	Количество банков		Сере- дина интер- вала $x_i$	$x_i f_i$	На- копл. час- тоты $V_i$ , %	На- копл. час- тоты $p_i$	Доля БП групп банков в общем объеме БП		$\left(\frac{x_i f_i}{\sum_i x_i f_i}\right)^2$	$(x_i - \bar{x})^2 f_i$
	$f_i$	в % к ито- гу					$\frac{x_i f_i}{\sum_i x_i f_i}$	на- раст. ито- гом, $q_i$		
<b>A</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>
50-60	7	14	55	385	7	14	0,042	0,042	0,02	116487
60-80	10	20	70	700	17	34	0,076	0,118	0,006	129960
80-100	6	12	90	540	23	46	0,059	0,177	0,003	53016
100-150	8	16	125	1000	31	62	0,109	0,286	0,012	27848
150-300	13	26	225	2925	44	88	0,318	0,604	0,101	21853
300-500	2	4	400	800	46	92	0,087	0,691	0,008	93312
500-800	3	6	650	1950	49	98	0,212	0,902	0,045	651468
800-1000	1	2	900	900	50	100	0,098	1,0	0,010	512656
<b>Итого</b>	<b>50</b>	<b>100</b>	<b>-</b>	<b>9200</b>	<b>-</b>	<b>-</b>	<b>1</b>	<b>-</b>	<b>0,187</b>	<b>1606600</b>

## 2. Средние показатели:

а) средний размер балансовой прибыли на один банк рассчитаем по средней арифметической взвешенной:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} = \frac{9200}{50} = 184 \text{ млн. руб.};$$

б) моду рассчитаем по формуле (5.6):

$$M_o = x_{M_o \min} + k \frac{f_{M_o} - f_{M_o-1}}{(f_{M_o} - f_{M_o-1}) + (f_{M_o} - f_{M_o+1})}.$$

Модальный интервал – 150-300, т.к. частота этого интервала, равная 13, является максимальной.

$$M_o = 150 + 150 \cdot \frac{13 - 8}{(13 - 8) + (13 - 2)} = 196,875 \text{ млн. руб.};$$

в) медиану рассчитаем по формуле (5.5):

$$M_e = x_{M_e \min} + k \frac{0,5 \sum f_i - v_{M_e-1}}{f_{M_e}}.$$

Медианный интервал – 100-150, т.к. накопленная частота этого интервала, равная 31, - первая накопленная частота, превышающая половину суммы частот ряда.

$$M_e = 100 + 50 \cdot \frac{0,5 \cdot 50 - 23}{8} = 112,5 \text{ млн. руб.}$$

## 3. Показатели вариации:

а) дисперсия (по формуле 6.6):

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 f}{\sum f} = \frac{1606600}{50} = 32132 \text{ кв. ед.};$$

б) среднее квадратическое отклонение (по формуле 6.7):

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{32132} = 179,254 \text{ млн. руб.};$$

в) коэффициент вариации (по формуле 6.11):

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100 = \frac{179,254}{184} \cdot 100 = 97,4\%$$



$V > 35\%$ , что свидетельствует о неоднородности совокупности.

#### 4. Показатели дифференциации:

а) для нахождения децильного коэффициента определим вначале первый и девятый децили по формуле 5.4:

$$Q_p = x_{Q_p(\min)} + k \frac{P \sum f_i - V_{Q_{p-1}}}{f_{Q_p}}.$$

Интервал, соответствующий первому децилю, – 50-60, т.к. накопленная частота этого интервала, равная 7, первая накопленная частота, превышающая 0,1 суммы частот.

$$D_1 = 50 + 10 \cdot \frac{0,1 \cdot 50 - 0}{7} = 57,1$$

Интервал, соответствующий девятому децилю, – 300-500, т.к. накопленная частота этого интервала, равная 14, первая накопленная частота, превышающая 0,9 суммы частот.

$$D_9 = 300 + 200 \cdot \frac{0,9 \cdot 50 - 44}{2} = 400$$

Тогда децильный коэффициент составит:  $Kd = \frac{D_9}{D_1} = \frac{400}{57,1} = 7 \text{ раз};$

б) т.к. 10% самых крупных и 10% самых мелких банков составляют одну и ту же величину (в нашем примере  $\frac{1}{10} \cdot 50 = 5 \text{ ед.}$ ), то фондовый коэффициент составит (по данным исходной таблицы):

$$Kf = \frac{(974,2 + 609,2 + 588,3 + 562,9 + 436,3) / 5}{(51,2 + 51,4 + 53,8 + 57,4 + 58,3) / 5} = \frac{634,19}{54,42} = 11,7 \text{ раз}.$$

#### 5. Показатели концентрации:

а) коэффициент Джини рассчитаем по формуле 6.27, произведя предварительные расчеты

$P_i \cdot Q_{i+1}$	$P_{i+1} \cdot Q_i$
1,652	1,428
6,018	5,428
13,156	10,974
37,448	25,168
60,808	55,568
82,984	67,718
98	90,02
$\Sigma = 300,066$	$\Sigma = 256,484$

$$G = \sum_{i=1}^{n-1} p_i q_{i+1} - \sum_{i=1}^{n-1} p_{i+1} q_i = \frac{300,066 - 256,484}{100} = 0,436;$$

б) коэффициент Герфиндаля определим по формуле 6.28 (см. итог гр 9):

$$H = \sum_i \left( \frac{x_i f_i}{\sum_i x_i f_i} \right)^2 = 0,187.$$

*Пример 6.7.* Для иллюстрации принципа расчета коэффициентов Джини и Герфиндаля воспользуемся данными выборочного обследования дневной выручки 20 продуктовых магазинов (тыс. руб.):

Номера магазинов $i$	Значения признака (выручка магазина) $x_i$	Накопленные значения признака	Накопленная доля значений признака $q_i$	Накопленная доля численности единиц ряда: $p_i$	$p_i q_{i+1}$	$p_{i+1} q_i$	$\left( \frac{q_i}{\sum_i q_i} \right)^2$
1	9	9	0,022	0,05	0,002	-	0,0005
2	9	18	0,044	0,1	0,007	0,002	0,0005
3	11	29	0,071	0,15	0,014	0,007	0,0007
4	12	41	0,1	0,2	0,025	0,015	0,0009
5	15	56	0,137	0,25	0,041	0,027	0,0013
6	16	72	0,176	0,3	0,062	0,044	0,0015
7	17	89	0,218	0,35	0,087	0,065	0,0017
8	18	107	0,262	0,4	0,118	0,092	0,0019
9	19	126	0,308	0,45	0,154	0,123	0,0021
10	21	147	0,359	0,5	0,198	0,162	0,0026
11	21	168	0,411	0,55	0,246	0,205	0,0026
12	25	193	0,472	0,6	0,307	0,296	0,0037
13	25	218	0,533	0,65	0,373	0,320	0,0037
14	26	244	0,597	0,7	0,447	0,388	0,0040
15	26	270	0,66	0,75	0,528	0,462	0,0040
16	26	296	0,724	0,8	0,615	0,543	0,0040
17	26	322	0,787	0,85	0,709	0,630	0,0040
18	27	349	0,853	0,9	0,811	0,725	0,0044
19	30	379	0,927	0,95	0,927	0,834	0,0054
20	30	409	1,0	1,0	-	0,95	0,0054
$\Sigma$					<b>5,670</b>	<b>5,584</b>	<b>0,05528</b>

Коэффициент Джини равен 0,086, что свидетельствует о невысоком уровне концентрации выручки магазинов. Значение коэффициента Герфиндаля, равное 0,05528, подтверждает этот вывод.

Следует отметить, что приведенные расчеты носят исключительно иллюстративный характер, поскольку экономический смысл

коэффициентов Джини и Герфиндаля наиболее полно проявляется лишь при проведении сравнений исследуемых явлений во времени и в пространстве. Например, коэффициента Джини для характеристики дифференциации доходов населения в различных регионах РФ или странах, коэффициента Герфиндаля для характеристики концентрации производства, капитала. Основное достоинство коэффициента Герфиндаля – его высокая чувствительность к изменению в суммарном обороте долей крупнейших участников, что позволяет отслеживать концентрацию рыночного оборота и реагирует на число участников рынка. Коэффициент Герфиндаля может быть использован в качестве меры диверсификации кредитного портфеля банка. Чем меньше значение коэффициента Герфиндаля, т.е. чем больше диверсифицирован кредитный портфель, тем ниже могут быть требования по капиталу к кредитному портфелю.

### ***6.2. Контрольные вопросы к теме 6***

1. Чем вызвана необходимость изучения вариации признака?
2. Укажите основные показатели вариации.
3. Какие вам известны способы расчета дисперсии и среднего квадратического отклонения?
4. Как определяется дисперсия альтернативного признака?
5. Что такое коэффициент вариации?
6. Правило сложения дисперсий. Что показывают частная (внутригрупповая), средняя из частных, межгрупповая и общая дисперсии?
7. Как рассчитываются и что характеризуют коэффициент детерминации и эмпирическое корреляционное отношение?
8. Как рассчитывают и что характеризуют коэффициент дифференциации и коэффициент фондов?
9. Показатели концентрации: коэффициенты Джини и Герфиндаля.

### ***6.3. Контрольные задания к теме 6***

1. Дисперсия признака равна 600. Объем совокупности равен 10. Сумма квадратов индивидуальных значений признака равна 6250. Найти среднюю величину.
2. Средняя величина в совокупности равна 15, среднее квадратическое отклонение равно 10. Чему равен средний квадрат индивидуальных значений этого признака?
3. Средняя величина в совокупности равна 13, а средний квадрат индивидуальных значений этого признака равен 174. Определить коэффициент вариации.

4. Дисперсия признака равна 360000, коэффициент вариации равен 50%. Чему равна средняя величина признака?
5. Дисперсия признака равна 360, средний квадрат индивидуальных значений равен 585. Чему равна средняя?
6. Определить дисперсию признака, если средняя величина признака равна 2600, а коэффициент вариации признака равен 30%.
7. Общая дисперсия равна 8,4. Средняя величина признака для всей совокупности равна 13. Средние по группам равны соответственно 10, 15 и 12. Численность единиц в каждой группе составляет 32, 53 и 45. Определить среднюю внутригрупповую дисперсию.
8. По совокупности, состоящей из 100 единиц, известны: средняя арифметическая – 47,0; сумма квадратов индивидуальных значений признака – 231592. Определить, однородна ли изучаемая совокупность.
9. Определить величину эмпирического корреляционного отношения, если общая дисперсия равна 15,2; групповые средние  $\bar{x}_1 = 8$ ;  $\bar{x}_2 = 13$ ;  $\bar{x}_3 = 16$ , а численность групп соответственно равна 75, 60 и 65.
10. Для изучения уровня заработной платы рабочих на предприятии обследовано 500 мужчин и 300 женщин. Результаты исследования показали, что у мужчин средняя заработная плата составила 1200 у.е. при среднеквадратическом отклонении 200 у.е., у женщин соответственно 800 у.е. и 150 у.е.  
Определить: 1) среднюю заработную плату работников;  
2) дисперсии заработной платы и коэффициент вариации;  
3) коэффициент детерминации и эмпирическое корреляционное отношение.
11. Имеются данные о чистой прибыли (балансовой за вычетом налогов) предприятий двух районов:

Район	Число предприятий	Чистая прибыль, млн. руб.
1	6	4, 6, 9, 4, 7, 6
2	10	8, 12, 8, 9, 6, 5, 7, 7, 8, 10

Определите дисперсии чистой прибыли: групповые (по каждому району), среднюю из групповых, межгрупповую и общую.

12. Имеются данные о заработной плате по двум группам работников:

Группы работников	Число работников	Заработная плата, у.е
Работающие в 1-й фирме	4	200
	2	300
	1	400
Работающие в 2-х фирмах	3	500
	2	600

Найти все виды дисперсий заработной платы, коэффициент детерминации и эмпирическое корреляционное отношение.

- 13.** Имеются следующие данные о среднем ежедневном времени занятости семейных женщин в домашнем хозяйстве:

Возрастные группы семейных женщин в домашнем хозяйстве	Численность женщин в группе	Частные средние (часов в день)	Частные дисперсии
до 25	250	2,0	4,0
25-45	420	3,5	6,8
свыше 45	330	3,2	5,0

Найти общую дисперсию занятости, коэффициент детерминации и эмпирическое корреляционное отношение.

- 14.** Есть две группы людей с разным месячным доходом (тыс. руб.):

Группа А: 3, 3, 3, 4.

Группа Б: 6, 6, 7.

В какую группу нужно отнести человека с доходом 5 тыс. руб. в месяц?

- 15.** По результатам маркетингового исследования туристических фирм, организующих недельные туры в Турцию в различные курортные города, получены следующие данные о вариации стоимости туров (цены приведены для гостиниц одного класса):

Месторасположение курорта	Число туристических фирм	Средняя цена недельного тура, у.е.	Дисперсия цен тура в группе
Анталия	7	530	2720
Бодрум	6	590	8855
Итого	13	550	5550

Найти общую дисперсию, коэффициент детерминации и эмпирическое корреляционное отношение.

- 16.** По данным выборочного обследования заработной платы работников бюджетной сферы получены следующие показатели:

Отрасль	Средняя заработная плата, руб.	Численность работников, чел.	Дисперсия заработной платы
здравоохранение	600	80	4900
образование	800	120	16900

Определить: 1) среднюю заработную плату работников по двум отраслям;

2) дисперсии заработной платы;

3) коэффициент детерминации и эмпирическое корреляционное отношение.

- 17.** Имеются следующие данные (условные) по трем группам рабочих:

Стаж работы (лет)	Число рабочих	Средняя заработная плата, руб.	Среднеквадратическое отклонение заработной платы
до 3	10	500	12
3 –10	15	600	10
более 10	25	700	20

Рассчитать: 1) среднюю заработную плату всей совокупности рабочих;  
2) дисперсии заработной платы;  
3) коэффициент детерминации и эмпирическое корреляционное отношение.

- 18.** При изучении бюджета времени студентов было проведено обследование учащихся вузов. При обследовании вузы были разбиты на 7 групп по специализации. Были получены следующие результаты среднего количества времени, затрачиваемого студентами ежедневно на самостоятельную работу:

вузы по группам специальностей	Число обследованных студентов, тыс.чел.	Среднее число часов на самостоятельную работу	Средний квадрат отклонений
Промышленность и строительство	42	2,0	0,6
Транспорт	5	1,4	0,5
Право	13	1,7	0,3
Экономика	22	1,5	0,7
Здравоохранение	10	1,0	0,8
Искусство	5	1,6	1,0
Просвещение	36	1,8	0,6

Используя правило сложения дисперсий, определить зависимость между средним числом часов на самостоятельную работу от специализации студента.

- 19.** Для определения средней величины расходов на полугодовую подписку на газеты и журналы обследуемая совокупность семей разбита на группы по уровням дохода на три группы. По группам получены следующие результаты:

Номер группы	Число семей в группе	Средние расходы на подписку, руб.	Групповые дисперсии
1	300	200	14
2	500	400	30
3	200	600	60

Определите все виды дисперсий расходов, коэффициент детерминации и эмпирическое корреляционное отношение.

- 20.** В районе 20 тыс. семей, проживающих в городах, поселках городского типа и сельской местности. В результате были получены следующие данные о среднем числе детей в семьях:

Семьи, проживающие	Удельный вес семей в генеральной совокупности, %	Среднее число детей в семьях	Среднее квадратическое отклонение
В городах	50	2,3	1,2
В пос. гор. типа	10	1,8	0,5
В сельской местности	40	2,8	2,5

Используя правило сложения дисперсий, определите коэффициент детерминации и эмпирическое корреляционное отношение.

- 21.** Имеются следующие выборочные данные о вкладах населения района:

Группы населения	Число вкладов	Средний размер вклада, тыс. руб.	Коэффициент вариации вклада, %
Городское	7	4	20
Сельское	3	6	30

Определите тесноту связи между средним размером вклада и типом населения, исчислив коэффициент детерминации и эмпирическое корреляционное отношение.

- 22.** Капитал коммерческих банков характеризуется следующими данными:

№ п/п	Собственный капитал банков, млн. руб.	Число банков	Средний размер привлеченных средств (капитала), млрд. руб.	Дисперсия привлеченных средств
1	30-40	8	100	400
2	40-50	10	180	2500
3	50-60	2	200	3600

Определите показатели тесноты связи между размером собственного капитала банков и привлеченными средствами, исчислив коэффициент детерминации и эмпирическое корреляционное отношение.

- 23.** По данным обследования коммерческих банков города 70% общего числа клиентов составили юридические лица со средним размером кредита 120 тыс. руб. и коэффициентом вариации 25%, а 30% – физические лица со средним размером ссуды 20 тыс. руб. при среднем квадратическом отклонении 6 тыс. руб.

Используя правило сложения дисперсий, определите тесноту связи между размером кредита и типом клиента, исчислив коэффициент детерминации и эмпирическое корреляционное отношение.

- 24.** Товарооборот по предприятиям общественного питания на одного работника за квартал характеризуется следующими данными:

Предприятие	Доля предприятий в общей численности работников, %	Товарооборот в расчете на одного работника, тыс. руб.	Дисперсия товарооборота в группе
Столовые	35	13	3,29
Кафе, закусочные	50	20	36,00
Рестораны	15	26	9,00

Определите все виды дисперсий товарооборота предприятий общественного питания, коэффициент детерминации и эмпирическое корреляционное отношение.

- 25.** Имеются данные о распределении семей сотрудников финансовой корпорации по количеству детей:

Число детей в семье	Число семей сотрудников по подразделениям		
	первое	второе	третье
0	4	7	5
1	6	10	13
2	3	3	3
3	2	1	-

Вычислите все виды дисперсий, используя правило сложения дисперсий.

- 26.** Распределение основных фондов по малым предприятиям отрасли характеризуется следующими данными:

Группы предприятий по стоимости основных фондов, тыс. руб.	Число предприятий	Основные фонды в среднем на предприятии, тыс. руб.	Групповые дисперсии
12-27	18	18	1,14
27-42	40	32	1,09
42-57	26	48	1,69
57-72	12	69	1,84

Рассчитайте коэффициент детерминации и эмпирическое корреляционное отношение. Сделайте выводы.

- 27.** По переписи населения 1926 года в России доля грамотных среди женщин составляла 46%, а среди мужчин – 77%. Определить общий (средний) процент грамотности всего населения и дисперсию этого показателя, если женщины составляли 53% в общей численности населения.
- 28.** Определить дисперсию и среднее квадратическое отклонение, если при проверке партии изделий из 1000 шт. 30 шт. оказались бракованными.



- 29.** Для определения удельного веса женщин в численности работающих в отрасли все предприятия были разбиты по среднесписочному числу работающих на 3 группы:

1-я гр. – с числом работающих до 1000 человек;

2-я гр. – с числом работающих от 1001 до 5000 человек;

3-я гр. – с числом работающих свыше 5000 человек.

Общая численность работающих в 1 группе – 120 тыс. человек, во 2-й группе – 89 тыс., в 3-й группе – 50 тыс. Доля женщин в первой группе оказалась равной 47%, во 2-й – 36%, в 3-й – 29%. С помощью правила сложения дисперсий определите дисперсию удельного веса женщин в отрасли.

- 30.** Имеются следующие данные о числе домохозяйств, находящихся в условиях крайней бедности (среднедушевые доходы в два раза ниже прожиточного минимума):

Домохозяйство	Обследовано домохозяйств	Доля домохозяйств, находящихся в крайней бедности, %
Без детей	200	6
С детьми в возрасте до 16 лет	500	18
Пенсионеров	100	25

Определите все виды дисперсий, коэффициент детерминации и эмпирическое корреляционное отношение. Сделайте выводы.

- 31.** Имеются следующие данные о расходах домохозяйств района на товары культурно-бытового назначения:

Домохозяйство	Обследовано домохозяйств	Доля расходов на товары культурно-бытового назначения, %
Имеющие детей	400	9
Без детей	100	39

Определите все виды дисперсий, коэффициент детерминации и эмпирическое корреляционное отношение.

- 32.** Имеются следующие данные о расходах на платные услуги домохозяйствами района:

Домохозяйства	Обследовано домохозяйств	Доля расходов на платные услуги, %
городских поселений	400	30
сельской местности	100	10

Определите все виды дисперсий, коэффициент детерминации и эмпирическое корреляционное отношение.

- 33.** Имеются следующие выборочные данные о расходах на питание домохозяйствами города:

	Численность домохозяйств в выборке	Доля расходов на питание
Одинокие	30	42
Семейные	70	53

Определите все виды дисперсий, коэффициент детерминации и эмпирическое корреляционное отношение.

**34.** Имеются данные о совокупной выручке (млрд. руб.) за 1997г. 50 крупнейших аудиторско-консультационных фирм:

1	-	78,1	11	-	17,5	21	-	7,2	31	-	4,0	41	-	2,7
2	-	44,8	12	-	15,8	22	-	7,0	32	-	3,8	42	-	2,7
3	-	35,2	13	-	15,7	23	-	6,8	33	-	3,6	43	-	2,7
4	-	34,6	14	-	14,5	24	-	6,6	34	-	3,6	44	-	2,7
5	-	32,5	15	-	13,2	25	-	5,6	35	-	3,5	45	-	2,6
6	-	31,8	16	-	12,0	26	-	5,1	36	-	3,1	46	-	2,6
7	-	25,4	17	-	11,6	27	-	4,8	37	-	3,0	47	-	2,2
8	-	23,0	18	-	9,4	28	-	4,5	38	-	3,0	48	-	2,1
9	-	17,8	19	-	7,6	29	-	4,5	39	-	3,0	49	-	1,5
10	-	17,7	20	-	7,3	30	-	4,4	40	-	2,9	50	-	1,5

1) Постройте вариационный ряд, образовав 7-8 интервалов произвольно.

2) Рассчитайте средний размер выручки на одну фирму на основе средней арифметической, моды, медианы.

3) Рассчитайте показатели вариации.

4) Измерьте дифференциацию выручки на основе децильного коэффициента и коэффициента фондов.

5) Рассчитайте коэффициент концентрации Джини и Герфиндаля.

**35.** Имеются данные о распределении населения РФ по размеру среднедушевого денежного дохода в первом полугодии 2000 года:

Среднедушевой денежный доход, ден. ед.	Численность населения в % от общей численности
до 400	2,7
400,1-600,0	6,6
600,1-800,0	9,3
800,1-1000,0	10,1
1000,1-1200,0	9,9
1200,1-1600,0	16,9
1600,1-2000,0	12,6
свыше 2000,0	31,9
<b>ВСЕГО:</b>	<b>100</b>

Рассчитайте: 1) среднедушевой денежный доход на основе средней арифметической, моды и медианы;

2) показатели дифференциации концентрации.

## Тема 7. Статистическое изучение связи между явлениями

### 7.1 Справочные материалы

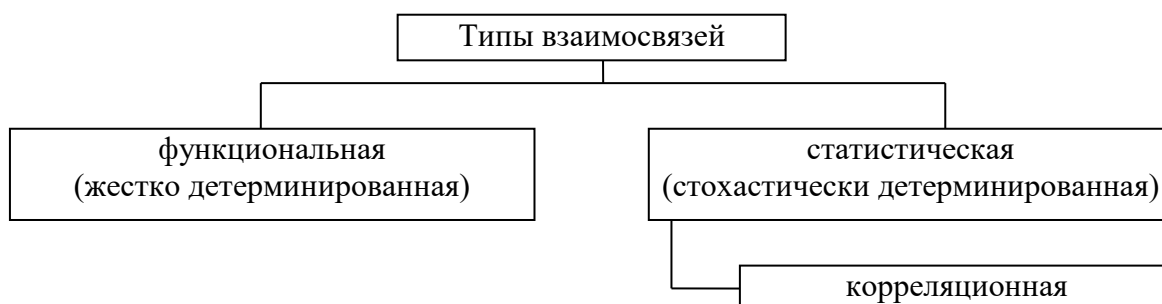
#### *Виды и формы связей, различаемые в статистике*

При исследовании социально-экономических явлений часто приходится иметь дело с взаимосвязанными показателями.

Типы взаимосвязей по характеру зависимости, различаемые в статистике, представлены на схеме 7.1.

Схема 7.1

#### Типы взаимосвязей по характеру зависимости



Взаимосвязи можно классифицировать также следующим образом (схема 7.2):

Схема 7.2

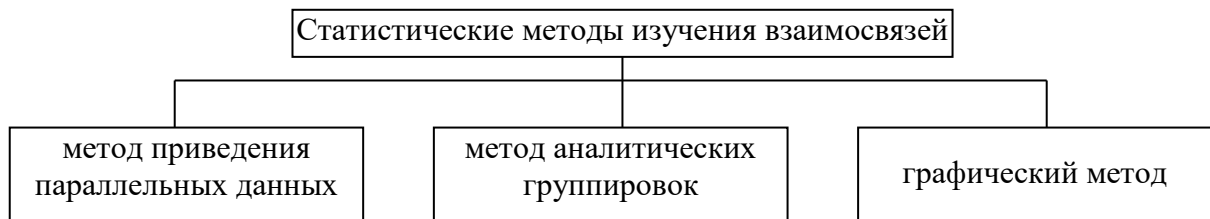
#### Классификация связей



Для анализа статистических зависимостей на начальной стадии применяются методы, представленные на схеме 7.3.

Схема 7.3

## Начальная стадия анализа статистических зависимостей



*Пример 7.1.* Имеются данные о выпуске продукции на 6 однотипных предприятиях ( $x$ ) и потреблении на них электричества ( $y$ ) (таблица 7.1):

Таблица 7.1.

Зависимость потребления электричества от объема выпуска продукции

Выпуск продукции	5	7	10	12	15	17
Потребление электричества	17	22	26	24	30	42

Сделать вывод о наличии, характере и форме связи.

*Решение:* Поле корреляции построено на рис. 7.1.

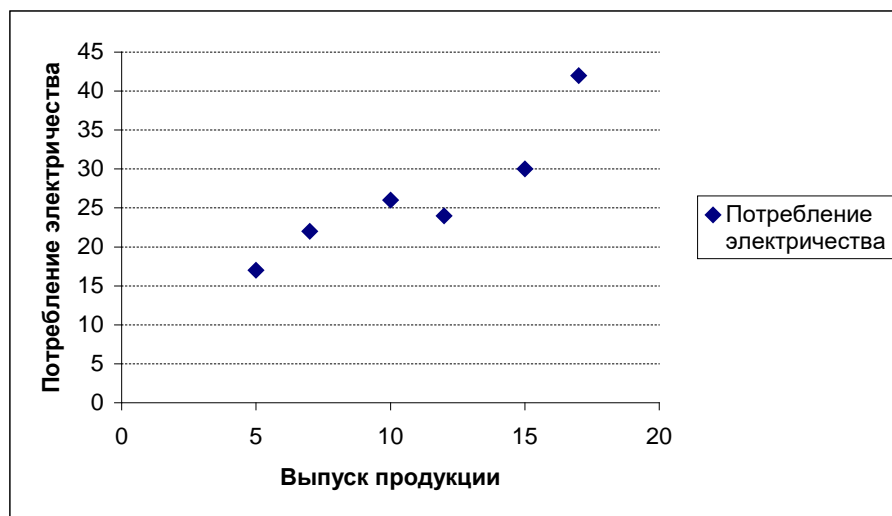


Рисунок 7.1. Зависимость потребления электричества от выпуска продукции

Таблица и рисунок демонстрируют, что с увеличением факторного признака  $x$  увеличивается результирующий признак  $y$ , следовательно связь между ними можно считать прямой.

*Пример 7.2.* Метод аналитических группировок продемонстрируем на примере таблицы 7.2:

Таблица 7.2.

**Характеристика зависимости прибыли малых предприятий  
от оборачиваемости оборотных средств за 2003 год**

Продолжительность оборота средств, дней ( $x$ )	Число малых предприятий	Средняя прибыль, у.е. ( $y$ )
40 – 50	6	14,57
51 – 70	8	12,95
71 – 100	6	7,40
Итого	20	11,77

Графический метод демонстрируется на рисунке 7.2. Построив график, можно судить о форме связи, ее направлении, а по разбросу точек – о тесноте связи (отсутствие связи будет характеризоваться разбросанностью точек по всему графику).



Рис. 7.2. Графики поля корреляции

***Измерение тесноты связи в случае корреляционной зависимости***

Оценка тесноты связи между признаками предполагает определение меры соответствия вариации результативного признака от одного (при изучении парных зависимостей) или нескольких (при изучении множественных зависимостей) факторных признаков.

Простейший показатель тесноты связи – **показатель Фехнера**.

$$i = \frac{\sum C - \sum H}{\sum C + \sum H}, \quad (7.1)$$

где  $C$  – совпадения знаков отклонений  $(x - \bar{x})$  и  $(y - \bar{y})$ ;

$H$  – несовпадения знаков отклонений  $(x - \bar{x})$  и  $(y - \bar{y})$ ;

$\sum C + \sum H$  – общее количество парных отклонений.

Мера совместной вариации признаков – **коэффициент ковариации**.

$$C = \frac{\sum (x - \bar{x}) \cdot (y - \bar{y})}{n} \quad (7.2)$$

Показатель интенсивности линейной связи – **линейный коэффициент парной корреляции Пирсона (коэффициент корреляции)**.

$$r = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{n \sigma_x \sigma_y} \quad (7.3)$$

Путем ряда преобразований можно получить следующие **аналитические выражения для расчета линейного коэффициента корреляции**.

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \sigma_y}, \quad (7.4)$$

где  $\overline{xy} = \frac{\sum xy}{n}$ .

$$r = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x - \bar{x})^2 \cdot \sum (y - \bar{y})^2}} \quad (7.5)$$

$$r = \frac{n \sum xy - \sum x \cdot \sum y}{\sqrt{[n \sum x^2 - (\sum x)^2] \cdot [n \sum y^2 - (\sum y)^2]}} \quad (7.6)$$

$$r = \frac{\sum xy - \frac{\sum x \cdot \sum y}{n}}{\sqrt{\left[ \sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n} \right] \cdot \left[ \sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n} \right]}} \quad (7.7)$$

Показатель Фехнера и коэффициент корреляции Пирсона изменяются в пределах  $[-1; +1]$ .

*Пример 7.3.* Измерим тесноту связи с использованием формул (7.1) - (7.3) по данным примера 7.1.

*Решение:* 1) Расчет показателя Фехнера  
Рассчитаем средние значения для  $x$  и  $y$ :

$$\bar{x} = \frac{5+7+10+12+15+17}{6} = 11; \quad \bar{y} = \frac{17+22+26+24+30+42}{6} \approx 26,83.$$

Выпуск продукции	5	7	10	12	15	17
------------------	---	---	----	----	----	----

Потребление электричества	17	22	26	24	30	42
$(x - \bar{x})$	-6	-5	-1	1	4	6
$(y - \bar{y})$	-9,83	-4,83	-0,83	-2,83	3,17	15,17
Совпадения/несовпадения	<i>C</i>	<i>C</i>	<i>C</i>	<i>H</i>	<i>C</i>	<i>C</i>

Показатель Фехнера  $i = \frac{(5) - (1)}{6} \approx 0,67$ .

2) Расчет коэффициента ковариации:

$$C = \frac{(-6) \cdot (-9,83) + (-5) \cdot (-4,83) + (-1) \cdot (-0,83) + 1 \cdot (-2,83) + 4 \cdot 3,17 + 6 \cdot 15,17}{6} = 30,96.$$

3) Расчет линейного коэффициента корреляции:

С учетом того, что  $\sigma_x = 4,2$ ;  $\sigma_y = 7,84$ ,  $r = \frac{30,96}{4,2 \cdot 7,84} = 0,94$ .

Полученные значения показателя Фехнера и коэффициента корреляции свидетельствуют о достаточно сильной прямой связи.

На прямую или обратную связь указывает знак коэффициента (“+” или “-”, соответственно). О тесноте связи свидетельствует абсолютная величина коэффициента. *Для качественной оценки тесноты связи используется таблица Чэддока* (табл. 7.3.)

Таблица 7.3

#### Критерии оценки тесноты связи

Значения коэффициента корреляции	до $ \pm 0,3 $	$ \pm 0,3  -  \pm 0,5 $	$ \pm 0,5  -  \pm 0,7 $	$ \pm 0,7  -  \pm 0,9 $	$ \pm 0,9  -  \pm 1,0 $
Характеристика тесноты связи	слабая	умеренная	заметная	высокая	достаточно высокая

#### *Оценка достоверности коэффициента корреляции*

Для более наглядного представления об оценке достоверности (значимости) коэффициента корреляции построена таблица 7.4.

Таблица 7.4

## Оценка достоверности (значимости) коэффициента корреляции

Характеристики коэффициента корреляции	Средняя квадратическая ошибка	Вывод о значимости коэффициента корреляции делается, если:
Большое число наблюдений, распределение приближенно нормальное, $r < 0,9$	$\sigma_r = \frac{1-r^2}{\sqrt{n-1}}$	$\frac{ r }{\sigma_r} \geq 3$
Малое число наблюдений ( $n < 30$ ), распределение далеко от нормального, $r < 0,9$	$\sigma_r = \frac{\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{n-2}}$	$t_{расч.} > t_{табл.}, \text{ где}$ $t_{расч.} = \frac{ r }{\sigma_r} = \frac{ r \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$ $t_{табл.}$ находится по таблице распределения Стьюдента с параметрами $\alpha; k = n - 2$
Малое число наблюдений ( $n < 30$ ), распределение далеко от нормального, $r > 0,9$	$\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{n-3}}$	$\frac{ z }{\sigma_z} \geq 3, \text{ где } z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}$ $z$ – преобразование Фишера

**Доверительные границы коэффициента корреляции** рассчитываются как:

$$r - t_r \sigma_r \leq \rho \leq r + t_r \sigma_r, \quad (7.8)$$

где  $\rho$  – генеральное значение коэффициента корреляции;

$t_r$  – заданный уровень вероятности.

*Пример 7.4.* Проверить значимость коэффициента корреляции, рассчитанного по данным примера 7.1.

*Решение:* 
$$z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+0,94}{1-0,94} = 1,74, \quad \sigma_z = \frac{1}{\sqrt{6-3}} = 0,58, \quad \text{тогда}$$

$$\frac{1,74}{0,58} \geq 3, \text{ что указывает на значимость коэффициента корреляции.}$$

**Ранговая корреляция**

В анализе социально-экономических явлений широко используются ранговые коэффициенты корреляции (коэффициенты корреляции рангов), когда коррелируют не непосредственные значения  $X$  и  $Y$ , а их **ранги**, т.е. номера их мест, занимаемых в каждом ряду значений по возрастанию или



убыванию. К таким непараметрическим коэффициентам относятся **коэффициенты рангов Спирмена и Кендэлла.**

**Коэффициент ранговой корреляции Спирмена:**

$$\rho = 1 - \frac{6 \sum D^2}{n(n^2 - 1)}. \quad (7.9)$$

**Значимость коэффициента ранговой корреляции Спирмена:**

$$t_{расч.} = \rho \sqrt{\frac{n-1}{1-\rho^2}}. \quad (7.10)$$

Коэффициент корреляции Спирмена считается статистически значимым, если  $t_{расч.} > t_{табл.}$ , где  $t_{табл.}$  находится по таблице распределения Стьюдента с параметрами  $\alpha; k = n - 2$ .

*Пример 7.5.* Имеются данные о затратах на рекламу продукции и объеме выручки от реализации продукции (табл. 7.5.; графы А и Б)

Таблица 7.5

Зависимость затрат на рекламу продукции и объема выручки от реализации продукции

Затраты на рекламу продукции, тыс. руб., X	Объем выручки от реализации продукции, млн. руб., Y	$R_x$	$R_y$	$d = R_x - R_y$	$d^2$
<b>А</b>	<b>Б</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>
1,5	26	2	1	1	1
2,4	71	3	3	0	0
8,6	45	10	2	8	64
1,3	95	1	4	-3	9
3,3	112	4	5	-1	1
4,0	130	6	6	0	0
5,1	145	7	7	0	0
6,1	190	8	8	0	0
3,5	220	5	9	-4	16
7,1	231	9	10	-1	1
Итого	-	-	-	-	92

Вычислить коэффициент Спирмена.

*Решение:* Определив ранги значений X и Y и их разность (табл. 7.5.;

графы 1, 2, 3, 4), получаем  $\rho = 1 - \frac{6 \cdot 92}{10(10^2 - 1)} = 0,44$ .

При условии, что ранги не повторяются, *коэффициент ранговой корреляции Кендэлла* рассчитывается как:

$$\tau = \frac{2S}{n(n-1)}, \quad (7.11)$$

где  $S$  – фактическая сумма рангов

При этом соблюдаем следующую последовательность действий:

1. Значения  $X$  ранжируются в порядке возрастания или убывания.
2. Значения  $Y$  располагаются в порядке, соответствующем значениям  $X$ .
3. Для каждого ранга  $Y$  определяется число следующих за ним значений рангов, превышающих его величину. Результат записывается в столбец «+», суммируется и обозначается  $P$ .
4. Для каждого ранга  $Y$  определяется число следующих за ним меньших значений рангов. Результат записывается в столбец «-», суммируется и обозначается  $Q$ .
5. Определяется общая сумма  $S=P+Q$ .

Интерпретация коэффициентов Спирмена и Кендэлла аналогична интерпретации коэффициента корреляции Пирсона.

*Пример 7.6.* Рассчитаем значение коэффициента Кендэлла на основании данных примера 7.5

*Решение:*

X	Y	1-й шаг	2-й шаг	3-й шаг «+»	4-й шаг «-»
1,5	26	1,3	95	6	3
2,4	71	1,5	26	8	0
8,6	45	2,4	71	6	1
1,3	95	3,3	112	5	1
3,3	112	3,5	220	1	4
4,0	130	4,0	130	3	1
5,1	145	5,1	145	2	1
6,1	190	6,1	190	1	1
3,5	220	7,1	231	0	1
7,1	231	8,6	45	-	-
Итого	-	-	-	P=32	Q=-13

5-й шаг:  $S=P+Q=32+(-13)=19$ , тогда  $\tau = \frac{2S}{n(n-1)} = \frac{2(32-13)}{10(10-1)} = 0,42$ .

Существенность коэффициента корреляции рангов Кендэлла проверяется по формуле:

$$\tau > t_{\alpha} \sqrt{\frac{2(n-5)}{9n(n-1)}}, \quad (7.12)$$

где  $t_\alpha$  – коэффициент, определяемый по таблице нормального распределения для выбранного уровня значимости  $\alpha$  при больших  $n$ .

Коэффициент Кендэлла всегда меньше по значению, чем коэффициент Спирмена, точнее  $\tau \approx \frac{2}{3} \rho$ . Это соотношение выполняется при большом числе наблюдений, т.е.  $n > 30$ , и слабых либо умеренно тесных связях.

Если отдельные значения признака имеют одинаковую количественную оценку, то ранг всех этих значений принимается равным средней арифметической от соответствующих номеров мест, которые определяются. Данные ранги называются связанными (или повторяющимися). Для случая *связанных рангов* есть особые скорректированные формулы для коэффициентов Спирмена и Кендэлла, однако на практике часто пользуются формулами, приведенными выше.

### ***Корреляция альтернативных признаков***

Для исследования степени тесноты связи между качественными признаками могут быть использованы ***коэффициенты контингенции Пирсона, ассоциации Юла и взаимной сопряженности Пирсона***.

В том случае, когда качественные признаки представлены в виде альтернативных (дихотомических), рассчитываются коэффициенты контингенции и ассоциации на основе четырехклеточных таблиц следующего вида:

a	b
c	d

***Коэффициент контингенции:***

$$K_c = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+c)(b+d)(a+b)(c+d)}}. \quad (7.13)$$

***Коэффициент ассоциации:***

$$Q = \frac{ad - bc}{ad + bc}. \quad (7.14)$$

***Значимость коэффициента ассоциации*** проверяется следующим образом:

$$t_{расч} = \frac{|Q|}{\sigma_Q}, \text{ где} \quad (7.15)$$

$$\sigma_Q = \sqrt{\frac{1-Q^2}{4} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right)} \quad (7.16)$$

Коэффициент ассоциации считается статистически значимым, если  $t_{расч.} > t_{табл.}$ , где  $t_{табл.}$  находится по таблице функции Лапласа при уровне значимости  $\alpha$  (обычно берется на уровне 5%).

*Пример 7.7.* В результате обследования работников предприятия получены следующие данные (чел.):

Образование	Удовлетворены работой	Не удовлетворены работой	Итого
Высшее и среднее	300	50	350
Незаконченное среднее	200	250	450
Итого	500	300	800

Требуется оценить тесноту взаимосвязи между уровнем образования и удовлетворенностью работой с помощью коэффициентов контингенции и ассоциации.

*Решение:*  $K_c = \frac{300 \cdot 250 - 50 \cdot 200}{\sqrt{350 \cdot 300 \cdot 500 \cdot 450}} = \frac{65000}{153707} = 0,423;$

$$Q = \frac{ad - bc}{ad + bc} = \frac{300 \cdot 250 - 50 \cdot 200}{300 \cdot 250 + 50 \cdot 200} = \frac{65000}{85000} = 0,756.$$

Коэффициенты контингенции и ассоциации изменяются в пределах  $[-1; +1]$ , но величина коэффициента контингенции для тех же данных по абсолютной величине меньше величины коэффициента ассоциации, т.е.  $|K_c| < |Q|$ .

В случае если каждый из качественных признаков состоит более чем из двух групп, то для определения тесноты связи используют **коэффициент взаимной сопряженности Пирсона**.

Информация для оценки этой связи группируется в виде таблицы ( $m_{ij}$  – частоты взаимного сочетания двух качественных признаков).

Признаки	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	Итого
<b>D</b>	$m_{11}$	$m_{12}$	$m_{13}$	$\Sigma m_{1j}$
<b>E</b>	$m_{21}$	$m_{22}$	$m_{23}$	$\Sigma m_{2j}$
<b>F</b>	$m_{31}$	$m_{32}$	$m_{33}$	$\Sigma m_{3j}$
Итого	$\Sigma m_{i1}$	$\Sigma m_{i2}$	$\Sigma m_{i3}$	$\Sigma m_{ij}$

Коэффициент взаимной сопряженности Пирсона определяется по формуле:

$$C = \sqrt{\frac{\varphi^2}{1 + \varphi^2}}, \quad (7.17)$$

где  $\varphi^2$  – показатель средней квадратической сопряженности, рассчитываемый как

$$\varphi^2 = \left( \frac{m_{11}^2}{\sum m_{1j} \cdot \sum m_{i1}} + \frac{m_{21}^2}{\sum m_{2j} \cdot \sum m_{i1}} + \dots + \frac{m_{33}^2}{\sum m_{3j} \cdot \sum m_{i3}} \right) - 1 \quad (7.18)$$

Интерпретация коэффициентов контингенции, ассоциации и взаимной сопряженности Пирсона аналогична интерпретации коэффициента корреляции Пирсона.

*Пример 7.8.* Для изучения влияния условий труда на взаимоотношения в коллективе было проведено выборочное обследование 250 работников предприятия, ответы которых распределились следующим образом:

Условия труда	Взаимоотношения в коллективе			Итого
	Хорошие	Удовлетворительные	Неудовлетворительные	
Соответствуют требованиям	30	20	10	60
Не полностью соответствуют	25	50	15	90
Не соответствуют	10	40	50	100
Итого	65	110	75	250

Рассчитать коэффициент взаимной сопряженности Пирсона.

*Решение:*

$$\varphi^2 = \left( \frac{30^2}{60 \cdot 65} + \frac{25^2}{90 \cdot 65} + \frac{10^2}{100 \cdot 65} + \frac{20^2}{60 \cdot 110} + \frac{50^2}{90 \cdot 110} + \frac{40^2}{100 \cdot 110} + \frac{10^2}{60 \cdot 75} + \frac{15^2}{90 \cdot 75} + \frac{50^2}{100 \cdot 75} \right) - 1 =$$

$$= 1,2003 - 1 = 0,2003$$

$$C = \sqrt{\frac{0,2003}{1 + 0,2003}} = \sqrt{0,1669} = 0,408.$$

### **Множественная корреляция**

Изменение экономических явлений происходит под влиянием не одного, а большого числа различных факторов. Для измерения тесноты корреляционной связи между результативным признаком и несколькими факторными признаками при линейной форме связи рассчитывается **коэффициент множественной корреляции**.

**Коэффициент множественной корреляции для случая двух факторных признаков  $x_1$  и  $x_2$**  рассчитывается по формуле:

$$R_{y/x_1x_2} = \sqrt{\frac{r_{yx_1}^2 + r_{yx_2}^2 - 2 \cdot r_{yx_1} \cdot r_{yx_2} \cdot r_{x_1x_2}}{1 - r_{x_1x_2}^2}} \quad (7.19)$$

Множественный коэффициент корреляции изменяется в пределах  $[0;1]$  и численно не может быть меньше, чем любой из образующих его парных коэффициентов. Приближение  $R$  к единице свидетельствует о сильной зависимости между признаками.

Средняя квадратическая ошибка коэффициента множественной корреляции определяется по формуле:

$$\sigma_R = \frac{1}{\sqrt{n-1}} \quad (7.20)$$

Тогда, если  $\frac{R}{\sigma_R} > 3$ , то с вероятностью, близкой к 0,99, можно считать коэффициент множественной корреляции значимым.

Проверка значимости коэффициента множественной корреляции осуществляется также по F-критерию Фишера. Для случая двух факторных признаков  $x_1$  и  $x_2$  он имеет вид:

$$F_{расч} = \frac{R_{y/x_1x_2}^2}{1 - R_{y/x_1x_2}^2} \cdot \frac{n-3}{2}. \quad (7.21)$$

Коэффициент множественной корреляции считается статистически значимым, если  $F_{расч.} > F_{табл.}$ , где  $F_{табл.}$  находится по таблице распределения Фишера с параметрами  $(\alpha; 2; n-3)$ .

В ходе изучения множественной корреляции рассчитывают также **частные коэффициенты корреляции**. Частные коэффициенты корреляции характеризуют степень тесноты связи между двумя признаками при фиксированном значении всех остальных. Для случая двух факторных признаков  $x_1$  и  $x_2$  формулы будут иметь вид:

$$r_{yx_1/x_2} = \frac{r_{yx_1} - r_{x_1x_2} r_{yx_2}}{\sqrt{(1 - r_{yx_2}^2)(1 - r_{x_1x_2}^2)}}, \quad (7.22)$$

$$r_{yx_2/x_1} = \frac{r_{yx_2} - r_{x_1x_2} r_{yx_1}}{\sqrt{(1 - r_{yx_1}^2)(1 - r_{x_1x_2}^2)}}. \quad (7.23)$$

В первом случае исключено влияние факторного признака  $x_2$ , а во втором –  $x_1$ . Значения парного и частного коэффициентов корреляции отличаются друг от друга, т.к. парный коэффициент характеризует связь между двумя признаками без учета влияния других признаков, а частный учитывает наличие и влияние других факторов.

Проверка значимости и расчет доверительных интервалов для частных коэффициентов корреляции аналогичны, как и для парных коэффициентов корреляции, с тем лишь отличием, что число степеней свободы  $\nu$  определяется так:  $\nu = n - k$ , где  $k$  – порядок коэффициента частной корреляции.

### 7.2. Контрольные вопросы к теме 7

1. Какие типы взаимосвязей между явлениями вы знаете?
2. В чем сущность корреляционной связи между явлениями
3. Что такое «ложная» корреляция?
4. Охарактеризуйте корреляционные связи по направлению и по аналитическому выражению.
5. Какие методы применяют в начальной стадии анализа статистических зависимостей?
6. Какие существуют показатели измерения тесноты связи?
7. Как оценивается значимость коэффициента корреляции, рассчитанного по выборочным данным?
8. Что представляют собой коэффициенты рангов Спирмена и Кендэлла?
9. С помощью каких показателей изучается и измеряется корреляционная зависимость между качественными показателями на основе таблиц взаимной сопряженности?
10. Определите понятие множественной корреляции.
11. Что такое совокупный и частные коэффициенты корреляции? В чем их отличие?

### 7.3. Контрольные задания к теме 7

1. По следующим данным рассчитайте коэффициент корреляции Пирсона и сделайте выводы:  
 $\sum x = 70$ ;  $\sum y = 50$ ;  $\sum xy = 320$ ;  $\sum x^2 = 500$ ;  $\sum y^2 = 500$ ;  $n = 10$ .
2. Следующая таблица представляет значения премий, выплаченных десятью страховыми обществами (X), и их резервы для выплаты непредъявленных премий (Y).

X	197	353	451	464	648	659	762	997	1658	1810
Y	42	108	95	30	109	112	199	33	251	480

Оценить тесноту связи между выплачиваемыми премиями и резервами страховых обществ.

3. По группе акционерных коммерческих банков региона имеются следующие данные:

№ банка	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Активы банка, млн. руб.	866	328	207	185	109	104	327	113	91	849
Прибыль, млн. руб.	39,6	17,8	12,7	14,9	4,0	15,5	6,4	10,1	3,4	13,4

Оценить тесноту связи между прибылью и активами банков.

4. По данным аудиторского отчета о деятельности 12 коммерческих банков построена следующая таблица:

№ банка	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Кредитная ставка, %	59	61	64	66	68	61	64	64	66	67	66	62
Доходность от кредитных операций, %	18	24	35	31	29	25	36	32	30	31	30	28

Оценить степень тесноты связи между размером кредитной ставки и доходностью кредитных операций.

5. На основе выборочных данных о деловой активности однотипных коммерческих структур оценить тесноту связи между прибылью (Y, млн. руб.) и затратами на 1 руб. произведенной продукции (X)

X	96	77	77	89	82	81
Y	221	1070	1001	606	779	789

6. Имеются данные о количестве копий (тыс. шт.), сделанных копировальными машинами различных марок в издательских центрах города и стоимости технического обслуживания копировальных машин (тыс. у. е.):

Количество копий	12	14,5	16,8	10,1	18,4	17,3	20,1	16,3	11,6	12,9
Стоимость техобслуживания	1,4	2,3	2,5	1,5	2,8	2,05	2,7	2,1	1,7	1,95

Рассчитайте линейный коэффициент корреляции и проверьте его значимость.

7. Имеются данные по 10 группам населения о среднегодовом доходе и уровне потребления мяса жителями штата Канзас (США):

Среднегодовой доход в среднем по группе, тыс. дол.	35,8	48,3	67,3	120,7	21,4	90,4	85,1	63,8	39,7	58,5
Годовое потребление мяса на душу населения в среднем по группе, кг	22,1	29,5	41,1	47,3	20,3	46,0	45,3	40,1	30,1	38,2



Рассчитайте линейный коэффициент корреляции и проверьте его значимость.

8. По однородным предприятиям имеются данные о количестве рабочих с профессиональной подготовкой и количестве бракованной продукции:

№ предприятия	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Количество рабочих с проф. подготовкой, %	19,0	25,3	33,6	65,8	50,9	29,3	41,6	33,9	54,0	26,6
Количество бракованной продукции, %	17,0	15,6	13,5	7,0	7,9	15	9,2	12	8,0	14,8

Рассчитайте линейный коэффициент корреляции и проверьте его значимость.

9. Периодически в средствах массовой информации обсуждаются высокие должностные оклады президентов благотворительных организаций. Дана информация о десяти крупнейших филиалах общества United Way.

Город	Должностной оклад президента, тыс. дол.	Собранная сумма пожертвований в расчете на душу населения, дол.
Атланта	161	18
Чикаго	190	25,6
Кливленд	172	21,3
Денвер	108	15,2
Детройт	201	29,3
Хьюстон	147	15,89
Канзас-Сити	126	22,3
Лос-Анджелес	155	19,32
Миннеаполис	170	31,21
Сиэтл	143	24,18

Рассчитайте линейный коэффициент корреляции и проверьте его значимость.

10. Имеются следующие данные о росте пар братьев и сестер:

Рост брата, см	170	165	177	180	181	175	172	180
Рост сестры, см	163	162	168	170	164	162	165	168

Оценить степень тесноты связи между ростом братьев и сестер.

11. У 8 учащихся колледжа зафиксировано следующее количество баллов, полученных за самостоятельные работы по математике (x) и по гуманитарным предметам (y):

Студент	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З
X	90	60	46	68	82	71	66	78
Y	75	69	45	49	58	54	59	70

Оценить степень тесноты связи между успеваемостью по математике и гуманитарным предметам.

12. Имеются данные о спросе на книжную продукцию и структуре оборота издательства «Прогресс».

Стратегическая единица	Спрос на продукцию, тыс. экз.	Доля стратегической единицы в общем обороте издательства
Классика	20	0
Детская литература	100	1,0
Зарубежный детектив	60	49,5
Российский детектив	120	20,5
Женский роман	90	6,8
Фантастика	50	0
Приключения	30	1,0
Специальная литература	110	14,3
Рекламная продукция	60	4,9
Прочая литература	80	2,0

Оценить степень тесноты связи между спросом и структурой оборота.

13. Представлены данные о тираже бесплатной рекламной газеты «Реклама для вас», распространяемой в различных регионах РФ, и стоимости размещения в ней рекламы стандартного размера (1/4 газетной полосы):

Регион	Тираж, тыс. экз.	Стоимость рекламы, тыс.у.е.
Ростовская область	350	1,4
Курская область	125	0,9
Воронежская область	400	1,3
Московская область	875	1,8
Ставропольский край	500	1,6
Хабаровский край	200	1,2
Вологодская область	100	1,0
Волгоградская область	300	1,2
Краснодарский край	500	1,0
Ленинградская область	800	1,6

Рассчитайте линейный коэффициент корреляции и проверьте его значимость.

14. Компания «Вест» продает кухонные принадлежности, рассылая каталоги по почте. Данные, иллюстрирующие количество рассылок (тыс. адресов) и объем выручки компании (млн. у. е.):

Количество адресов рассылки, тыс.	128	139	25	39	97	180	82	296	201	186
Выручка, млн.у.е.	97	106	29	40	101	136	77	181	140	141

Рассчитайте линейный коэффициент корреляции и проверьте его значимость.

- 15.** Администрация страховой компании приняла решение о введении нового вида услуг – страхования на случай пожара. С целью определения тарифов по выборке анализируется зависимость стоимости ущерба, нанесенного пожаром, от расстояния до ближайшей пожарной станции:

Общая сумма ущерба, млн. руб.	26,2	20,3	31,3	25,9	27,5	45,1	14,5	22,3	19,6	31,3
Расстояние до ближайшей пожарной станции, км	3,4	1,8	4,6	2,3	3,1	5,5	0,7	3,0	2,6	4,0

Рассчитайте линейный коэффициент корреляции и проверьте его значимость.

- 16.** Компанию по прокату автомобилей интересует зависимость между пробегом автомобилей и стоимостью ежемесячного обслуживания:

Пробег, тыс. км	6,5	7	9	10	12	11	14	13,5	18,5	20
Стоимость обслуживания, у.е.	12	15	20	19	18	23	25	25	29	35

Рассчитайте линейный коэффициент корреляции и проверьте его значимость.

- 17.** При исследовании годового дохода и сбережений населения получены следующие данные:

Доход, тыс. у.е.	30	28	24	25	29	20	25	21	20	18
Сбережения, тыс. у.е.	3,5	4,0	2,0	1,5	1,8	1,3	2,5	1,5	1,0	0,5

Рассчитайте линейный коэффициент корреляции и проверьте его значимость.

- 18.** Имеются следующие данные о динамике безработицы и преступности.

Год	Лица в трудоспособном возрасте, не занятые в экономике, тыс. чел.	Число зарегистрированных преступлений
1991	117,1	54 929
1992	134,7	77 915
1993	191,9	86 615
1994	215,0	72 404

Определите наличие связи между числом преступлений и численностью лиц, не занятых в экономике.

- 19.** По ряду районов определены среднесуточное количество йода в воде и в пище и пораженность населения заболеванием щитовидной железы.

№ района	Количество йода в воде и пище, у.е.	Пораженность населения заболеваниями щитовидной железы, %
1	201	0,2
2	178	0,6
3	155	1,1
4	154	0,8
5	126	2,5
6	81	4,4
7	71	16,9

Оцените тесноту связи между данными признаками.

- 20.** Имеются данные о динамике удельного веса работающих женщин и коэффициенте разводов в Англии за 1890-1950 гг. Измерьте тесноту связи между данными признаками.

Годы	Процент работающих женщин	Коэффициент разводов
1890	4,6	5,8
1900	5,6	7,9
1910	10,7	8,8
1920	9,0	13,4
1930	11,7	17,4
1940	16,7	16,5
1945	25,6	30,8
1950	24,6	23,1

- 21.** По результатам ранжирования стран по уровню эффективности экономики и степени политического риска определите коэффициенты ранговой корреляции и сделайте выводы

Показатель	Ранг стран						
	A	B	C	D	K	M	P
Эффективность экономики	6	7	4	3	5	1	2
Степень политического риска	1	2	3	5	4	7	6

- 22.** Экзаменаторам по курсам “Экономическая теория” и “Высшая математика” было предложено проранжировать 10 студентов по уровню знаний ими соответствующих предметов. Оцените тесноту связи между уровнями знаний по экономической теории и высшей математике, используя коэффициенты корреляции Спирмена и Кендэлла .

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ранг по ВМ	5	6	3	2	10	7	4	1	8	9
Ранг по ЭТ	1	4	3	7	5	8	6	2	9	10

- 23.** С помощью ранговых коэффициентов определите, в какой степени связаны жизненные планы молодежи разного пола.

Перечень жизненных планов	Доля ответов	
	юноши	девушки
1. Получение высшего образования	57,5	51,0
2. Получение интересной работы	57,3	59,0
3. Возможность путешествовать	53,8	52,0
4. Улучшение жилищных условий	49,7	51,0
5. Достижение высокого материального положения	48,5	50,0
6. Повышение квалификации	42,0	45,0
7. Получение среднего образования	22,6	32,0
8. Организация дополнительного заработка	19,4	25,0

**24.** С помощью ранговых коэффициентов определите, существует ли связь между намерениями учащихся после окончания учебного года в зависимости от пола и от места проживания.

Намерения учащихся	Распределение учащихся			
	по полу		по месту жительства	
	девушки	юноши	крупные города	малые города
1. Продолжить обучение на дневном	79,4	71,8	75,5	80,7
2. Учиться и работать	10,4	13,0	11,6	8,8
3. Работать	3,9	7,6	6,0	3,8
4. Другое	0,8	1,3	1,1	0,3
5. Затрудняюсь ответить	5,5	6,3	5,8	6,4

**25.** Рассчитайте коэффициенты ранговой корреляции для данных, представленных в таблице. Сделайте выводы.

Какие программы новостей вы смотрели более или менее регулярно в течение последнего месяца	Среднедушевой доход	
	низкий	высокий
1. «Утро», ОРТ	27,6	21,9
2. Новости, ОРТ	22,4	16,7
3. Время, ОРТ	45,7	44,8
4. Вести, РТР	41,2	51,5
5. Новости, REN-TV	7,4	9,9
6. Сегодня, НТВ	10,9	25,9
7. Намедни, НТВ	11,8	28,9
8. Времечко, ТВ-Центр	8,5	16,9
9. Новости, РБК	3,8	6,4
10. Информ – TV, С.-Петербург	3,2	4,9
11. Областные, городские каналы	20,5	17,1
12. Зарубежные программы новостей	0,8	2,9

**26.** По данным 10 предприятий с помощью коэффициентов ранговой корреляции Спирмена и Кендэлла измерить тесноту зависимости между объемом выпускаемой продукции ( $y$ ), млн. руб., и стоимостью основных производственных средств ( $x$ ), млн. руб.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	1,5	1,8	2,0	2,2	2,3	2,6	3,0	3,1	3,5	3,8
Y	3,9	4,4	3,8	3,5	4,8	4,3	7,0	6,5	6,1	8,2

**27.** С помощью коэффициентов ранговой корреляции оцените тесноту связи между высказываниями респондентов в 1994 и 1996 годах.

Доверие к действующим в Российской Федерации общественным структурам и институтам власти (% к числу опрошенных)		
Варианты	1994 год	1996 год
Президент РФ	20,1	20,0
Правительство РФ	14,0	14,0
Совет Федерации	11,1	11,0
Государственная Дума	16,4	15,0
Руководители регионов	13,3	17,0
Милиция	13,2	13,0
Суд	14,0	15,0
Прокуратура	14,0	14,0
Армия	38,2	31,0
Профсоюзы	16,1	17,0
Политические партии	5,4	9,0
СМИ	18,5	13,0
Руководители предприятий	15,1	11,0
Банковские, предпринимательские круги	9,5	8,0

**28.** Экспертами оценивались вкусовые качества разных вин. Суммарные оценки получены следующие:

Марка вина	Оценка в баллах	Цена, у. е.
1	11	1,57
2	14	1,60
3	17	2,00
4	15	2,10
5	13	1,70
6	13	1,85
7	18	1,80
8	10	1,15
9	19	2,30
10	25	2,40

Согласуется оценка вина с его ценой. Проверьте эту гипотезу методами ранговой корреляции.

**29.** Имеются следующие данные о числе полученных неудовлетворительных оценок в летнюю сессию по одному из факультетов:

Пол студента	Пол экзаменатора		Итого
	мужской	женский	
мужской	26	10	36
женский	43	37	80
Итого	69	47	116

Можно ли считать, что пол экзаменатора и студента как-то влияет на результаты экзамена? С какой вероятностью здесь можно говорить об отсутствии связи между полом и результатами экзамена?

- 30.** Экзаменационная сессия студентов-заочников по специальным дисциплинам характеризуется следующими данными:

	Положительные оценки	Неудовлетворительные оценки	Итого
Работают по специальности	138	12	150
Не работают по специальности	102	48	150
Итого	240	60	300

Рассчитать коэффициенты контингенции и ассоциации. Сделайте выводы.

- 31.** По материалам одного из обследований домашних хозяйств получены следующие данные:

Доход	В составе совокупных доходов семьи		Всего
	есть доход от предпринимательской деятельности	нет дохода от предпринимательской деятельности	
Выше прожиточного минимума	140	120	260
Ниже прожиточного минимума	90	340	430
Итого	230	460	690

Рассчитать коэффициенты контингенции и ассоциации. Сделайте выводы.

- 32.** Оцените тесноту связи между заболеваемостью и наследственностью:

Родители больны гипертонией	Обследовано на предприятии		
	всего	больные гипертонией	здоровые
Да	17	15	2
Нет	73	30	43
Итого	90	45	45

- 33.** По данным социологического опроса получено следующее распределение ответов на два вопроса: 1) Считаете ли Вы, что Ваши доходы достаточны для удовлетворения основных потребностей (да, нет)? 2) Вы работаете: в бюджетной организации или коммерческой структуре?

Ответ на второй вопрос	Ответ на первый вопрос		Итого
	да	нет	
бюджетная организация	170	756	926
коммерческая структура	230	520	750
Итого	400	1276	1676

Определите, есть ли связь между ответами на эти вопросы. Сделайте выводы.

- 34.** На основе опроса 400 работников коммерческих структур и 400 работников бюджетных организаций получено следующее их распределение по ответам на вопрос, довольны ли они своей заработной платой:

Работающие	Довольны зарплатой	Недовольны зарплатой	Итого
в коммерческих структурах	360	40	400
в бюджетных организациях	140	260	400
Итого	500	300	800

Рассчитать коэффициенты контингенции и ассоциации. Сделайте выводы.

- 35.** Исследовалась социально-демографическая характеристика случайных потребителей наркотиков в зависимости от их семейного положения в одном из регионов РФ (тыс. чел.). Результаты обследования характеризуются следующими данными:

Группы потребителей наркотиков	Семейное положение		Итого
	замужем (женат)	не замужем	
потреблял	10,0	14,5	24,5
не потреблял	2,5	4,5	7,0
Итого	12,5	19,0	31,5

Рассчитать коэффициенты контингенции и ассоциации. Сделайте выводы.

- 36.** В ходе проведенного обследования оценки уровня жизни работающих на предприятиях различной формы собственности было опрошено 100 респондентов. Результаты представлены в следующей таблице:

Форма собственности предприятия	Удовлетворенность уровнем жизни		Итого
	вполне удовлетворен	неудовлетворен	
государственное	30	55	85
частное	10	5	15
Итого	40	60	100

Рассчитать коэффициенты контингенции и ассоциации. Сделайте выводы.

- 37.** Распределение предприятий по источникам средств для их покупки характеризуется следующими данными:



Источник средств	Зарождающийся бизнес	Зрелый бизнес	Итого
Банковский кредит	31	32	63
Собственные средства	38	15	53
Итого	69	47	116

Рассчитать коэффициенты контингенции и ассоциации. Сделайте выводы.

- 38.** По данным таблицы определить, имеется ли связь между успеваемостью и прослушиванием лекций студентов одного из факультетов.

Посещаемость	Успеваемость		Итого
	успевают	не успевают	
посещают лекции	60	40	100
не посещают лекции	30	70	100
Итого	90	110	200

Рассчитать коэффициенты контингенции и ассоциации. Сделайте выводы.

- 39.** Определите тесноту связи между рассматриваемыми в таблице признаками.

	Отношение к введению налога на домашних животных		Итого
	положительное	отрицательное	
Владельцы домашних животных	13	48	61
Не имеющие домашних животных	35	11	46
Итого	48	59	107

- 40.** Определите зависимость между типом поселений и отношением к реформам.

Отношение к реформам	Тип поселений		Итого
	Большие города	Села	
Реформы:- продолжать	34	23	57
- прекратить	27	34	61
Итого	61	57	118

- 41.** Оцените наличие связи между банковскими работниками, распределенными по полу и содержанию работы.

Работа	Мужчины	Женщины	Итого
Интересная	300	201	501
Неинтересная	130	252	381
Итого	430	453	883

- 42.** По данным следующей таблицы оцените тесноту связи между восприятием рекламы и приобретением рекламируемого товара:

Восприятие рекламы	Количество респондентов		Итого
	приобрели товар	не приобрели товар	
Запомнили рекламу	9	31	40
Не запомнили рекламу	2	38	40
Итого	11	69	80

**43.** С помощью коэффициента взаимной сопряженности определите является ли работа на компьютере фактором ухудшения зрения.

Работа за компьютером	Динамика состояния зрения за 3 года		Всего
	не ухудшилось	ухудшилось	
Не работает	70	5	75
Недавно работает	60	20	80
Давно работает	10	45	55
Итого	140	70	210

**44.** Оценка студентами профессиональных качеств преподавателей представлена в следующей таблице:

Критерии оценки качества преподавателей	Оценка				Итого
	высокая	средняя	низкая	затрудняюсь ответить	
Знание предмета	62	26	1	11	100
Умение обучать	21	61	8	10	100
Восприимчивость к новому	20	51	10	19	100
Способность к саморазвитию	25	51	10	14	100
Итого	128	189	29	54	400

Рассчитайте коэффициент взаимной сопряженности К. Пирсона.

**45.** На основании изучения материалов о пользовании средствами массовой информации была построена следующая таблица:

Группы опрошенных по регулярности просмотра телепередач	Всего опрошенных	с уровнем образования		
		начальное	среднее	высшее
Ежедневно	114	24	56	34
Несколько раз в неделю	56	10	25	21
Один раз в неделю	49	20	16	13
Реже одного раза в неделю	42	25	5	12
Практически не смотрю	39	28	1	10
Итого	300	107	103	90

Оцените связь между уровнем образования опрошенных и регулярностью просмотра ими телепередач.

**46.** По нижеприведенным данным оцените степень тесноты связи между средним баллом успеваемости студентов в зимнюю сессию и характером источников, используемых для подготовки к экзаменам:

Группы студентов по характеру используемых для подготовки к экзаменам источников	Всего студентов	из них со средним баллом успеваемости		
		до 3,5	3,6 – 4,2	4,3 – 5,0
Только конспект лекций	76	28	43	5
Только учебник	17	6	5	6
Конспект и дополнительная литература	21	5	7	9
Учебник и дополнительная литература	11	-	5	6
Учебник и конспект	5	-	-	5
Итого	130	39	60	31

**47.** По результатам анкетного обследования работников отдельных отраслей промышленности оцените связь между удовлетворенностью качеством работы организаций, обслуживающих население, и видами предоставляемых услуг.

Виды услуг	Всего опрошенных, пользующихся услугами	из них обслуживанием		
		удовлетворены	не-удовлетворены	затруднились ответить
Общественное питание	200	48	146	6
Медицинские услуги	300	147	141	12
Услуги учреждений культуры	50	22	23	5
Торговое обслуживание	400	104	284	12
Транспортное обслуживание	280	98	276	6
Бытовое обслуживание	520	208	275	37
Итого	1850	627	1145	78

**48.** Анализ 100 публикаций и выступлений в средствах массовой информации политиков разной направленности свидетельствует о наличии определенной связи между их политической позицией и отношением к политическим соперникам.

Политическая позиция	Отношение к политическим соперникам			Итого
	сотрудничество	диалог	конфронтация	
Консервативная	5	10	25	40
Либеральная	12	14	4	30
Демократическая	18	9	3	30
Итого	35	33	32	100

Используя коэффициент взаимной сопряженности, оцените тесноту связи между указанными признаками.

**49.** Оцените взаимосвязь между оценками опрошенных респондентов экономического положения России.

Как бы Вы оценили экономическое положение России	Всего опрошенных	из них со среднедушевым доходом		
		низким	средним	высоким
Очень хорошее	1,0	0,4	0,1	0,5
Хорошее	3,0	1,1	1,1	0,8
Среднее	66,5	17,7	19,9	28,9
Плохое	154,3	52,5	52,0	49,8
Очень плохое	50,1	20,9	18,2	11,0
Затрудняюсь ответить	25,1	7,4	8,7	9,0
Итого	300,0	100,0	100,0	100,0

**50.** Данные исследования зависимости между удовлетворенностью жизнью респондентов города и типом предприятия, на котором они работают, приведены в таблице (тыс. чел.):

Типы предприятия	Удовлетворенность жизнью				Итого
	вполне	скорее удовлетворен	скорее не удовлетворен	совсем не удовлетворен	
Государственное	31	35	35	35	136
Акционерное общество	17	13	14	9	53
Совместное	4	2	1	1	8
Частное	8	5	4	3	20
Итого	60	55	54	48	217

Определите коэффициент взаимной сопряженности Пирсона. Проанализируйте полученные результаты.

**51.** В следующей таблице приведено комбинационное распределение респондентов как потенциальных инвесторов по возрасту и склонности к риску. К группе рискующих отнесены респонденты, имеющие намерение приобрести ценные бумаги, несмотря на риск, осторожные не рискуют без гарантий, нерискующие избегают риска вообще.

Возраст, лет	Тип инвестора			Итого
	рискующий	осторожный	нерискующий	
До 30	24	12	4	40
30 – 50	20	50	30	100
50 и старше	6	18	36	60
Итого	50	80	70	200

Определите коэффициент взаимной сопряженности Пирсона. Проанализируйте полученные результаты.

**52.** Линейные коэффициенты корреляции между величиной заработной платы ( $y$ ), квалификацией ( $x_1$ ) и стажем работы работников фирмы ( $x_2$ ) оказались равными:  $r_{yx_1} = 0,587$ ;  $r_{yx_2} = 0,348$ ;  $r_{x_1x_2} = 0,108$ .  
Определите: 1) совокупный коэффициент корреляции между

величиной заработной платы и двумя определяющими ее факторами;  
2) частные коэффициенты корреляции. Сделайте выводы из проведенных расчетов.

- 53.** Взаимосвязь между основными показателями деятельности коммерческих банков характеризуется следующими показателями:

№ п/п	Сумма активов, млрд. у.е. (Y)	Кредитные вложения, млрд. у.е. (X <sub>1</sub> )	Собственный капитал, млрд. у.е. (X <sub>2</sub> )
1	3176	2496	209
2	3066	1962	201
3	291	783	177
4	1997	1319	136
5	1865	1142	175
6	1194	658	88
7	518	311	60

Определите парные, частные и множественный коэффициенты корреляции; ранговые коэффициенты корреляции Спирмена и Кендэлла (между Y и X<sub>1</sub>); проверьте их значимость.

- 54.** Компания, производящая моющие средства, предприняла рекламную акцию в магазинах с демонстрацией антисептических свойств нового моющего средства. В этот же период компания использовала обычную теле- и радиорекламу. Через некоторое время было решено проанализировать сравнительную эффективность различных видов рекламы по данным об объеме продаж моющего средства (Y), расходах на теле и радиорекламу (X<sub>1</sub>), расходах на демонстрацию товара в магазинах (X<sub>2</sub>). Расходы приведены в условных денежных единицах.

№ п.п.	Y	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>
1	72	12	5
2	76	11	7
3	78	15	6
4	70	10	5
5	68	11	3
6	80	16	7
7	82	14	3
8	65	8	4
9	62	8	3
10	90	18	5

Определите парные и частные коэффициенты корреляции. Рассчитайте множественный коэффициент корреляции и проверьте его значимость.

- 55.** Перед сдачей экзаменов в 20 группах был проведен опрос о том, какую среднюю оценку по сдаваемым в сессию дисциплинам они

ожидают получить. После сессии полученные оценки были сопоставлены с ожидаемыми и числом студентов в группах.

Средняя оценка по предмету в $i$ -й группе студентов ( $Y$ )	Ожидаемая оценка ( $X_1$ )	Число студентов в группе ( $X_2$ )
4,1	3,4	45
3,4	3,1	52
3,3	3,0	47
3,0	2,8	63
4,7	3,7	20
4,6	3,5	32
3,0	2,9	51
4,6	3,7	32
4,6	3,5	21
3,6	3,2	33
3,5	3,0	40
4,0	3,5	29
3,6	3,3	38
3,1	3,1	67
3,3	3,3	61
4,5	3,9	50
2,8	2,9	63
3,7	3,2	47
3,8	3,4	51
3,9	3,4	31

Определите парные и частные коэффициенты корреляции. Рассчитайте множественный коэффициент корреляции и проверьте его значимость.

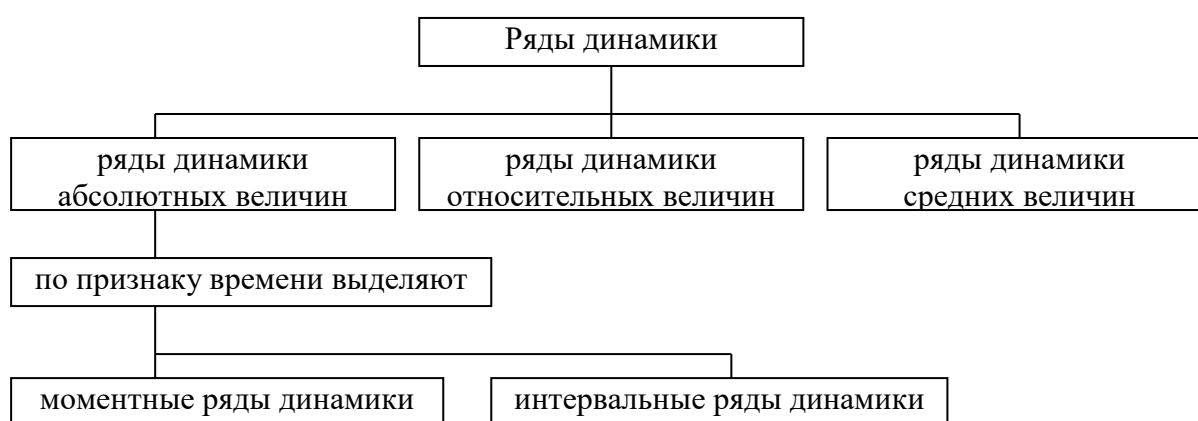
## Тема 8. Анализ динамики социально-экономических процессов

### 1.1. Справочные материалы

Ряд расположенных во времени статистических данных, изменение которых отражает закономерность развития изучаемого явления, называется *рядом динамики* или *временным рядом*. Виды рядов динамики указаны на схеме 8.1.

Схема 8.1

#### Классификация рядов динамики



Ряды динамики можно изобразить в виде таблицы (табл. 8.1) и графически.

Таблица 8.1

#### Фермерские хозяйства в России (на 1 января)

Год	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
Число фермерских хозяйств, тыс.	4,4	49,0	182,8	270,0	279,2	280,1	278,6	274,3
Средний размер земельного участка, га.	41	42	43	42	43	43	44	48

Моментный ряд динамики представлен в таблице 8.2.

Таблица 8.2

Численность безработных, зарегистрированных в органах государственной службы занятости, тыс. чел. (на конец года)

1996	1997	1998	1999	2000
2506	1999	1929	1263	1037

Интервальный ряд динамики представлен в таблице 8.3.

Таблица 8.3

Среднегодовая численность занятых в экономике, млн. чел.

1996	1997	1998	1999	2000
66,0	64,7	63,8	64,0	64,3

Средний уровень ряда динамики определяется в соответствии со следующими формулами:

	Интервальный ряд	Моментный ряд
Средний уровень ряда	$\bar{y} = \frac{\sum y}{n}$ средняя арифметическая	$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n}{n-1}$ средняя хронологическая
Расчет среднего уровня ряда по данным таблиц 8.2 и 8.3.	$\bar{y} = \frac{66,0 + 64,7 + 63,8 + 64,0 + 64,3}{5} = 64,56$	$\bar{y} = \frac{\frac{2506}{2} + 1999 + 1929 + 1263 + \frac{1037}{2}}{5-1} = 1740,625$

Для характеристики изменения уровней ряда динамики рассчитывается ряд показателей:

Показатель	Цепной	Базисный
Абсолютный прирост	$\Delta y_{ц} = y_i - y_{i-1}$	$\Delta y_{б} = y_i - y_1$
Коэффициент роста	$K_{р.ц.} = \frac{y_i}{y_{i-1}}$	$K_{р.б.} = \frac{y_i}{y_1}$
Темп роста	$T_{р.ц.} = \frac{y_i}{y_{i-1}} \cdot 100$	$T_{р.б.} = \frac{y_i}{y_1} \cdot 100$
Коэффициент прироста	$K_{пр.ц.} = K_{р.ц.} - 1$	$K_{пр.б.} = K_{р.б.} - 1$
Темп прироста	$T_{пр.ц.} = T_{р.ц.} - 100$	$T_{пр.б.} = T_{р.б.} - 100$
Абсолютное значение (содержание) одного процента прироста	$A\% = \frac{y_i - y_{i-1}}{\frac{y_i - y_{i-1}}{y_{i-1}} \cdot 100} = \frac{y_{i-1}}{100} = 0,01y_{i-1}$	
Пункты роста	$П_p = T_{пр.б.i} - T_{пр.б.i-1}$	



Средний коэффициент роста	$\bar{K} = \sqrt[n]{K_{P.Ц1} \cdot K_{P.Ц2} \cdot \dots \cdot K_{P.Цn}} = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}}$ <p style="text-align: center;">или</p> $\bar{K} = \prod (K_i^{w_i}),$ <p style="text-align: center;">где <math>K_i</math> – цепной коэффициент роста в <math>i</math>-ом периоде; <math>w_i</math> – вес <math>i</math>-ого периода, исчисляемый как <math>w_i = \frac{m_i}{\sum m_i}</math>; (<math>\sum m_i = 1</math>)</p>
Средний коэффициент прироста	$\bar{K}_{ПР} = \bar{K} - 1$
Средний темп роста	$\bar{T}_P = \bar{K} \cdot 100$
Средний темп прироста	$\bar{T}_{ПР} = \bar{T}_P - 100$

**Период удвоения явления.** Расчет периода удвоения можно сделать следующим образом:

$$x = \frac{\lg 2}{\lg K},$$

где  $x$  – период удвоения,

$K$  – заданный коэффициент роста.

Менее точно, но более просто расчет периода удвоения можно сделать и так:

$$x = \frac{70}{d},$$

где  $d$  – средний прирост в процентах.

**Пример 8.2.** Если население страны ежегодно увеличивается на 1%, то надо ожидать, что его численность удвоится за период длительностью:

$$x = \frac{\lg 2}{\lg 1,01} = \frac{0,30103}{0,004321} = 69,7 \text{ года.}$$

Менее точно этот же результат может быть получен и так:

$$x = \frac{70}{1\%} = 70 \text{ лет.}$$

**Пример 8.3.** Если банковский вклад приносит 5% годовых, то он удвоится за период длительностью:

$$x = \frac{\lg 2}{\lg 1,05} = \frac{0,30103}{0,021189} = 14,2 \text{ года.}$$

Или, если применить более простой способ, через:  $x = \frac{70}{5\%} = 14$  лет.

Пример 8.1. Рассчитать показатели роста и прироста для анализа динамики производства электроэнергии в РФ (источник: Регионы России, 2002 год). (1995 – базисный год)

Таблица 8.4

## Динамика производства электроэнергии в РФ

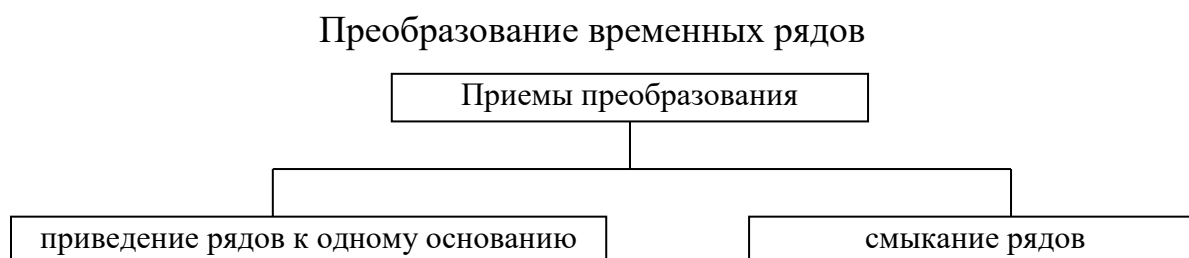
Год	Производство электроэнергии	Абсолютный прирост		Темпы роста		Темпы прироста, %		А%	Пункты роста, %
		$\Delta y_{ц.} = y_i - y_{i-1}$	$\Delta y_{б.} = y_i - y_1$	$T_{р.ц.} = (y_i/y_{i-1}) \cdot 100$	$T_{р.б.} = (y_i/y_1) \cdot 100$	$T_{пр.ц.} = T_{р.ц.} - 100\%$	$T_{пр.б.} = T_{р.б.} - 100\%$		
1995	14,9	-	-	-	-	-	-	-	-
1996	14,6	14,6-14,9=-0,3	14,6-14,9=-0,3	(14,6/14,9)*100=97,99	(14,6/14,9)*100=97,99	97,99-100=-2,01%	97,99-100=-2,01%	0,149	-2,01
1997	13,0	13,0-14,6=-1,6	13,0-14,9=-1,9	(13,0/14,6)*100=89,04	(13,0/14,9)*100=87,25	89,04-100=-10,96%	87,25-100=-12,75%	0,146	-10,74
1998	10,9	10,9-13,0=-2,1	10,9-14,9=-4,0	(10,9/13,0)*100=83,85	(10,9/14,9)*100=73,15	83,85-100=-15,15%	73,15-100=-26,85%	0,130	-14,1
1999	11,5	11,5-10,9=0,6	11,5-14,9=-3,4	(11,5/10,9)*100=105,50	(11,5/14,9)*100=77,18	105,5-100=5,5%	77,18-100=-22,82%	0,109	4,03
2000	10,7	10,7-11,5=-0,8	10,7-14,9=-4,2	(10,7/11,5)*100=93,04	(10,7/14,9)*100=71,81	93,04-100=-6,96%	71,81-100=-28,19%	0,115	-5,37
2001	15,7	15,7-10,7=5,0	15,7-14,9=0,8	(15,7/10,7)*100=146,73	(15,7/14,9)*100=105,37	146,73-100=46,73%	105,37-100=5,37%	0,107	33,56
		$\Sigma = 0,8$		$\Pi = 1,05369$					$\Sigma = 5,37$

Средний коэффициент роста составит  $\bar{K} = \sqrt[6]{0,9799 \cdot 0,8904 \cdot 0,8385 \cdot 1,055 \cdot 0,9304 \cdot 1,4673} = \sqrt[6]{\frac{15,7}{14,9}} = \sqrt[6]{1,05369} = 1,00875$ .

Следовательно, средний темп роста здесь составил 100,875%, а средний темп прироста равен 0,875%.

**Преобразование временных рядов** представлено на схеме 8.2

Схема 8.2



Для **приведения рядов к одному основанию** выбирается один, общий для всех рядов начальный период, который берется за 100%.

*Пример 8.4.* Имеются следующие данные о численности населения Ростовской области за ряд лет:

Таблица 8.5

Численность населения Ростовской области  
( тыс. чел. на начало года)

	1970	1988	1991	1993	1994
Городское	2420,4	3101,6	3097,8	3016,8	2994,5
Сельское	1410,9	1211,5	1250,0	1366,1	1407,0

Если взять за базу 1970 г., то более быстро растет городское население:

Таблица 8.6

Динамика численности населения Ростовской области  
в процентах к 1970 г.

	1970	1988	1991	1993	1994
Городское	100	128,1	127,9	124,6	123,7
Сельское	100	85,9	88,6	96,8	99,7

Если взять за базу 1988 г., то более быстро растет сельское население:

Таблица 8.7

Динамика численности населения Ростовской области  
в процентах к 1988 г.

	1988	1991	1993	1994
Городское	100	99,9	97,3	96,5
Сельское	100	103,2	112,8	116,1

**Смыкание рядов** возможно, если ряды имеют хотя бы один общий период.

*Пример 8.5.* По одному из районов области имеются данные о численности населения с 1970 г. по 1990 г. в одних границах, а с 1990 г. по 1998 г. - в других.

Таблица 8.8

Численность населения района на начало года, тыс. чел.

	1970	1985	1990	1995	1998
В старых границах	200	230	240		
В новых границах			300	330	340

Т.к. у двух рядов имеется один общий год, то их смыкание возможно. По данным этого общего года исчисляем коэффициент пересчета данных для старых границ в данные для новых границ:

$$K_{\text{нов./стар.}} = \frac{300}{240} = 1,25$$

С помощью этого коэффициента проведем пересчет численности населения:

для 1970 г.  $200 \times 1,25 = 250$ ; для 1985 г.  $230 \times 1,25 = 287,5$

Можно сделать и обратный пересчет - из новых границ в старые:  
для 1995 г.  $330 : 1,25 = 264$ ; для 1998 г.  $340 : 1,25 = 272$

В результате этих пересчетов получаем такую таблицу:

Таблица 8.9

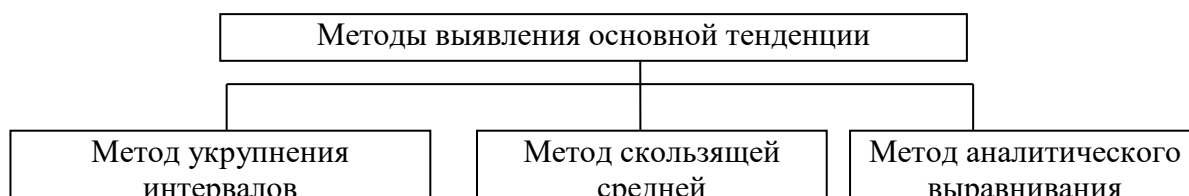
Численность населения района на начало года, тыс. чел.

	1980	1985	1990	1995	1998
В старых границах	200	230	240	264	272
В новых границах	250	287,5	300	330	340

Одной из важнейших задач статистики является выявление в рядах динамики *основной тенденции развития явления* (схема 8.3.):

Схема 8.3

Анализ основной тенденции развития в рядах динамики



*Метод укрупнения интервалов* основан на укрупнении периодов времени, к которым относятся уровни ряда динамики.

*Пример 8.6.* Имеются данные об объеме производства продукции предприятия (по месяцам) в сопоставимых ценах, млн. руб.

Таблица 8.10

Месяц	Объем производства	Месяц	Объем производства
Январь	5,1	Июль	5,6
Февраль	5,4	Август	5,9
Март	5,2	Сентябрь	6,1
Апрель	5,3	Октябрь	6,0
Май	5,6	Ноябрь	5,9
Июнь	5,8	Декабрь	6,2

Вычислим среднемесячный выпуск продукции по кварталам, т.е. укрупним интервалы:

Таблица 8.11

Объем производства продукции предприятия (по кварталам) в сопоставимых ценах, млн. руб.

Квартал	Объем производства за квартал	В среднем за месяц
I	15,7	5,23
II	16,7	5,57
III	17,6	5,87
IV	18,1	6,03

После укрупнения интервалов основная тенденция роста производства стала очевидной:  $5,23 < 5,57 < 5,87 < 6,03$

*Пример 8.7.* Имеются ежемесячные данные об уровне доходов КБ «Восток» от проведения валютных операций, млн. руб.

Таблица 8.12

Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь
5,4	6,2	5,9	6,0	5,8	6,8
Июль	Август	Сентябрь	Октябрь	Ноябрь	Декабрь
6,1	6,3	6,2	6,9	7,0	6,7

Различные направления изменений уровней ряда по отдельным месяцам затрудняют выводы об основной тенденции доходности валютных операций. Укрупним интервалы:

Таблица 8.13

Уровень доходов (по кварталам), млн. руб.

Квартал	Уровень доходов за квартал	В среднем за месяц
I	17,5	5,83
II	18,6	6,20
III	18,7	6,23
IV	20,6	6,87

Неравенство  $5,83 < 6,20 < 6,23 < 6,87$  свидетельствует об увеличении доходности валютных операций.

**Метод скользящей средней** основан на том, что исчисляется средний уровень из определенного числа первых уровней ряда, а затем из того же числа уровней ряда, но уже начиная со второго по счету и т.д.

*Пример 8.8.* Рассчитаем скользящую среднюю по данным об урожайности зерновых культур.

Таблица 8.14

Исходные данные и результаты расчета скользящей средней, ц/га

Год	Фактический уровень урожайности	Скользящая средняя	
		Трехлетняя	Пятилетняя
1986	15,4	-	-
1987	14,0	$(15,4+14,0+17,6)/3=15,7$	-
1988	17,6	$(14,0+17,6+15,4)/3=15,7$	$(15,4+14,0+17,6+15,4+10,9)/5=14,7$
1989	15,4	$(17,6+15,4+10,9)/3=14,6$	$(14,0+17,6+15,4+10,9+17,5)/5=15,1$
1990	10,9	14,6	15,2
1991	17,5	14,5	17,1
1992	15,0	17,0	16,8
1993	18,5	15,9	17,6
1994	14,2	15,9	-
1995	14,9	-	-
	$\Sigma y=153,4$		

*Пример 8.9.* Имеются данные о количестве пластиковых карт VISA, эмитированных коммерческим банком «Дельта», тыс. шт.

Таблица 8.15

Год	Количество эмитированных карт, тыс. шт.	Скользящая средняя	
		Трехлетняя	Пятилетняя
1995	1,2	-	-
1996	2,3	$\frac{1,2 + 2,3 + 2,2}{3} = 1,9$	-
1997	2,2	$\frac{2,3 + 2,2 + 4,5}{3} = 3,0$	$\frac{1,2 + 2,3 + 2,2 + 4,5 + 5,9}{5} = 3,22$
1998	4,5	$\frac{2,2 + 4,5 + 5,9}{3} = 4,2$	$\frac{2,3 + 2,2 + 4,5 + 5,9 + 2,5}{5} = 3,48$
1999	5,9	$\frac{4,5 + 5,9 + 2,5}{3} = 4,3$	$\frac{2,2 + 4,5 + 5,9 + 2,5 + 3,6}{5} = 3,74$
2000	2,5	$\frac{5,9 + 2,5 + 3,6}{3} = 4,0$	$\frac{4,5 + 5,9 + 2,5 + 3,6 + 6,2}{5} = 4,54$
2001	3,6	$\frac{2,5 + 3,6 + 6,2}{3} = 4,1$	$\frac{5,9 + 2,5 + 3,6 + 6,2 + 7,6}{5} = 5,16$
2002	6,2	$\frac{3,6 + 6,2 + 7,6}{3} = 5,8$	-
2003	7,6	-	-

**Метод аналитического выравнивания** основывается на том, что общая тенденция рассчитывается как функция времени:  $\hat{y}_t = f(t)$ . Определение теоретических уровней  $\hat{y}_t$  производится на основе адекватной математической модели, в качестве которой могут выступать линейная, показательная, экспоненциальная и другие функции, представленные в таблице 8.16.

Таблица 8.16

Вид уравнения	Отражаемая уравнением тенденция развития
Уравнение прямой $\hat{y}_t = a_0 + a_1 \cdot t$	Равномерный рост при $a_1 > 0$ или равномерное падение при $a_1 < 0$
Показательная функция $\hat{y}_t = a_0 \cdot a_1^t$	Ускоряющийся рост при $a_1 > 0$ или ускоряющееся падение при $a_1 < 0$
Гипербола $\hat{y}_t = a_0 + a_1 \cdot \frac{1}{t}$	Замедляющееся падение при $a_1 > 0$ или замедляющийся рост при $a_1 < 0$
Парабола $\hat{y}_t = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2$	Рост, переходящий в падение, или падение, переходящее в рост в точке $t = -\frac{a_1}{2a_2}$

Рассмотрим технику выравнивания ряда динамики по прямой  $\hat{y}_t = a_0 + a_1 \cdot t$ .

Параметры уравнения тренда могут быть найдены по следующим формулам:

$$a_0 = \bar{y} - a_1 \cdot \bar{t}; \quad a_1 = \frac{\sum yt - \frac{\sum y \cdot \sum t}{n}}{\sum t^2 - \frac{(\sum t)^2}{n}}.$$

Если периоды или моменты времени пронумеровать так, чтобы  $\sum_{i=1}^n t_i = 0$ , то

$$a_0 = \frac{\sum y}{n} = \bar{y}; \quad a_1 = \frac{\sum y \cdot t}{\sum t^2}.$$

Методика нумерации моментов времени в этом случае различна для рядов имеющих четное и нечетное число наблюдений. Так, если число наблюдений нечетное, то нумерация проводится так:

Год	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
$t$	-3	-2	-1	0	1	2	3

Если же число наблюдений четное, то нумерация соответственно:

Год	1997	1998	1999	2000	2001	2002
$t$	-5	-3	-1	1	3	5

Пример 8.10. Имеются данные о расходах населения на медицинские услуги:

Таблица 8.17

Год	Уровень расходов на медицинские услуги, тыс.у.е.	$t$	$t^2$	$yt$	$\hat{y} = a_0 + a_1t$	$y - \hat{y}_t$	$(y - \hat{y}_t)^2$	$\hat{y}_t - \bar{y}$	$(\hat{y}_t - \bar{y})^2$
<i>A</i>	<i>B</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>
1995	2,1	-4	16	-8,4	1,93	0,17	0,0289	-2,07	4,2849
1996	2,3	-3	9	-6,9	2,45	-0,15	0,0225	-1,55	2,4025
1997	2,9	-2	4	-5,8	2,96	-0,06	0,0036	-1,04	1,0816
1998	3,6	-1	1	-3,6	3,48	0,12	0,0144	-0,52	0,2704
1999	3,9	0	0	0	4	-0,10	0,0100	0	0
2000	4,5	1	1	4,5	4,52	-0,02	0,0004	0,52	0,2704
2001	5	2	4	10	5,04	-0,04	0,0016	1,04	1,0816
2002	5,5	3	9	16,5	5,56	-0,06	0,0036	1,56	2,4336
2003	6,2	4	16	24,8	6,07	0,13	0,0169	2,07	4,2849
Итого	36	0	60	31,1	36	-	0,1019	-	16,1099

$$a_0 = \frac{\sum 36}{9} = 4; \quad a_1 = \frac{31,1}{60} = 0,5183$$

Таким образом, уравнение тренда может быть записано как  $\hat{y}_t = 4 + 0,5183 \cdot t$ , т.е. с каждым годом расходы на медицинские услуги возрастали на 0,5183 тыс. у.е.

Рассчитаем среднюю (стандартную) ошибку уравнения:

$$S_{\hat{y}_t} = \sqrt{\frac{\sum (y - \hat{y}_t)^2}{n - m}} = \sqrt{\frac{0,1019}{9 - 2}} = 0,1207$$

Здесь  $n$  – число наблюдений;  $m$  – число параметров в уравнении ( $a_0$  и  $a_1$ ).

Для оценки качества модели применяют F - критерий Фишера:

$$F = \frac{\text{дисперсия от регрессии}}{\text{остаточная дисперсия}} = \frac{\sum (\hat{y}_t - \bar{y})^2}{m - 1} : \frac{\sum (y - \hat{y}_t)^2}{n - m},$$

где  $y$  – фактические уровни ряда;

$\hat{y}_t$  - выровненные уровни ряда;

$\bar{y}$  - средний уровень ряда.

$$\text{В нашем примере } F = \frac{16,1099}{2 - 1} : \frac{0,1019}{9 - 2} = 1106,7$$



Модель считается удовлетворительной, если  $F_{расч} > F_{крит}$ , где  $F_{крит} = F_{табл} = F_{\alpha, \nu_1, \nu_2} = F_{\alpha, m-1, n-m}$ .

Распределение  $F$  - критерия подчиняется закону распределения Фишера, фрагмент которого приводится ниже.

Таблица 8.18

Процентные точки  $F$  - распределения ( $\alpha = 0,05$ )

$\nu_1/\nu_2$	1	2	3	4	5	7	10	20	30	$\infty$
1	161,4	18,5	10,13	7,71	6,61	5,59	4,96	4,35	4,17	7,88
2	199,5	19,0	9,55	6,94	5,79	4,74	4,10	3,49	3,32	5,30

В нашем примере  $F_{крит.} = F_{0,05;1;7} = 5,59$ , т.е. полученное уравнение считается значимым.

### Анализ сезонных колебаний

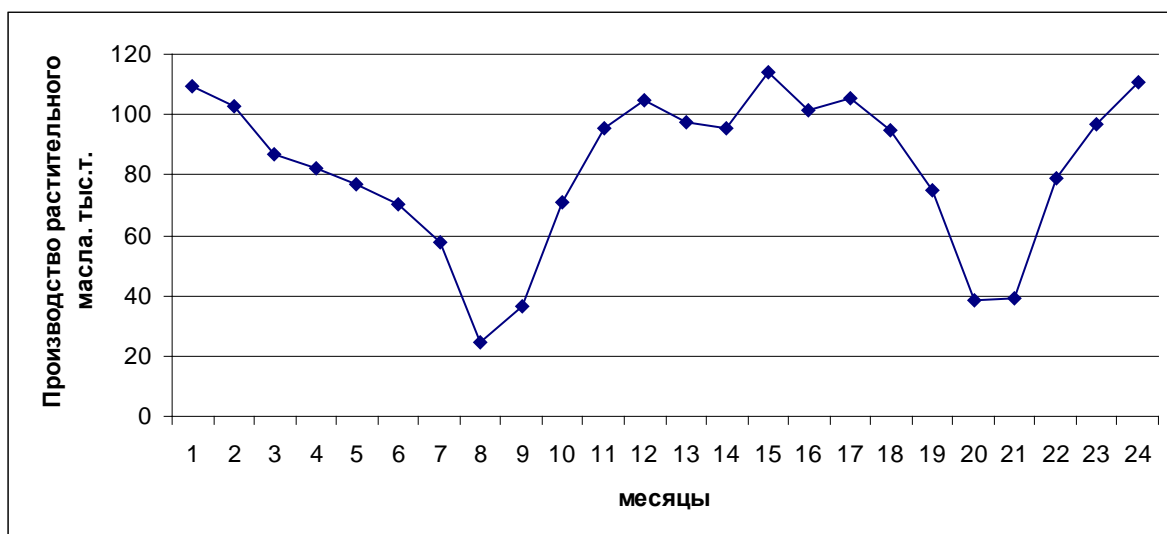
Под **сезонными колебаниями** понимается периодически повторяющееся из года в год повышение и снижение уровней в отдельные месяцы или кварталы.

*Пример 8.11.* Имеются следующие данные:

Таблица 8.19

Производство растительного масла в России в 1992-1993 гг.  
по месяцам, тыс. т.

Год	Месяц											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1992	109,5	102,7	86,6	82,3	76,6	70,0	57,6	24,5	36,3	70,7	95,2	104,5
1993	97,6	95,5	114,2	101,3	105,6	94,6	75,2	38,6	38,9	78,7	96,5	111,0

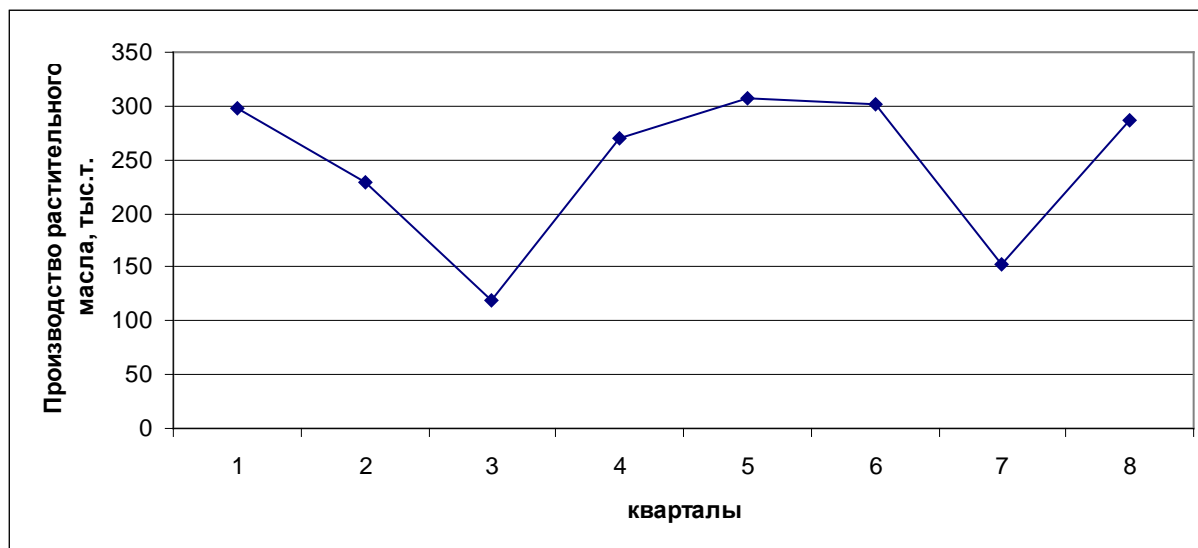


Если выявленные колебания не случайны, то они сохранятся и на укрупненных интервалах, например, квартальных.

Таблица 8.20

Производство растительного масла в России в 1992-1993 гг. по кварталам

Год	1992				1993			
Квартал	I	II	III	IV	I	II	III	IV
Произведено	298,8	228,9	118,4	270,4	307,4	301,5	152,7	286,2



При изучении рядов динамики, содержащих «сезонную волну», её выделяют из общей колеблемости уровней и измеряют. Существует ряд методов решения этой задачи. Для измерения «сезонной волны» рассчитывают либо абсолютные разности (отклонения) фактических уровней от среднего уровня, либо отношения месячных уровней к среднему уровню за год, так называемые индексы сезонности:

$$I_{сез} = \frac{y_i}{\bar{y}} 100\%.$$

*Пример 8.12.* Произведем расчет индексов сезонности и абсолютных отклонений уровней от среднего на примере данных о производстве растительного масла в России в 1992 году.

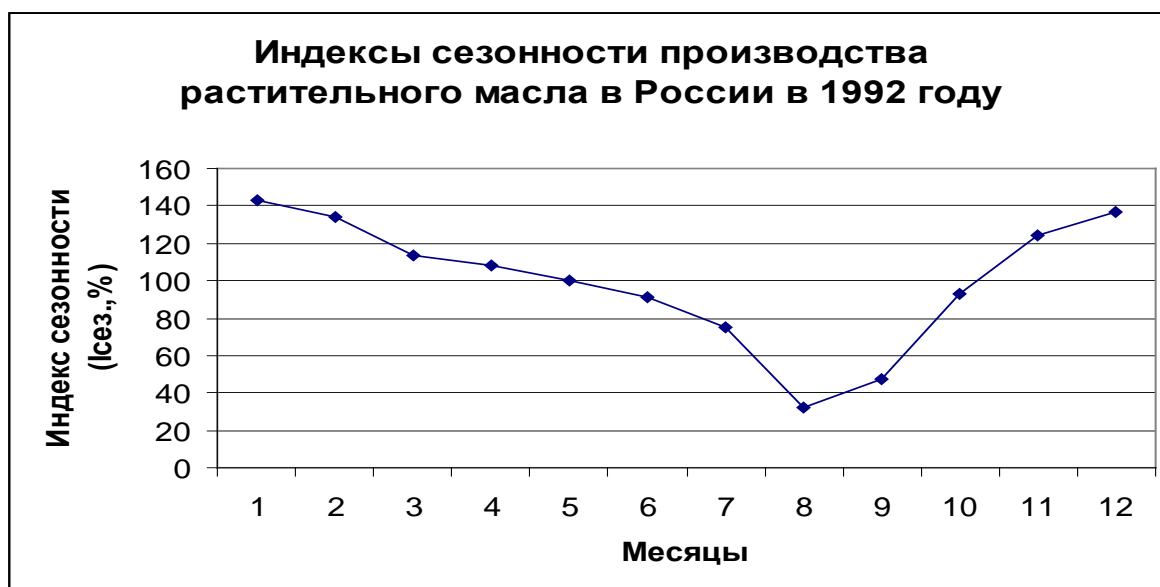
Таблица 8.21

Сезонные колебания производства растительного масла в России в 1992 г.

Месяц	Производство масла, тыс.т.	Индекс сезонности, % к среднемесячному уровню	Абсолютное отклонение от среднемесячного уровня	Абсолютное отклонение, % к среднемесячному уровню	$(I_{\text{сез}} - 100\%)^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
1	2	3	4	5	6	7
Январь	109,5	143,4	33,125	43,4	1883,56	1097,266
Февраль	102,7	134,5	26,325	34,5	1190,25	693,006
Март	86,6	113,4	10,225	13,4	179,56	104,551
Апрель	82,3	107,8	5,925	7,8	60,84	35,106
Май	76,6	100,3	0,225	0,3	0,09	0,051
Июнь	70,0	91,7	-6,375	-8,4	68,89	40,641
Июль	57,6	75,4	-18,775	-24,6	605,16	352,501
Август	24,5	32,1	-51,875	-67,9	4610,41	2691,017
Сентябрь	36,3	47,5	-40,075	-52,5	2756,25	1606,006
Октябрь	70,7	92,6	-5,675	-7,4	54,76	32,206
Ноябрь	95,2	124,6	18,825	24,6	605,16	354,381
Декабрь	104,5	136,8	28,125	36,8	1354,24	791,016
Итого	916,5	1200,1	0	0	12270,84	7797,747

Средний месячный уровень за год:  $\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{916,5}{12} = 76,375 \text{ тыс. т.}$

Графическое изображение индекса сезонности наглядно показывает форму, характер сезонной волны, относительно среднемесячного уровня за год, принимаемого за 100%.



Для характеристики силы колеблемости уровней ряда динамики из-за сезонной неравномерности используется **среднее квадратическое отклонение индексов сезонности** (в процентах) от 100%:

$$\sigma_{сез} = \sqrt{\frac{\sum (I_{сез} - 100\%)^2}{n}}.$$

Для примера 8.12:  $\sigma_{сез} = \sqrt{\frac{13369,17}{12}} = 33,38\%.$

Этот же результат можно получить и по-другому, как коэффициент вариации (колеблемости):

$V = \frac{\sigma}{\bar{y}} 100\%$ , где  $\sigma = \sqrt{\frac{(y_i - \bar{y})^2}{n}}$  – среднее квадратическое отклонение.

Для примера 8.12 сумма квадратов отклонений рассчитана в графе 7 таблицы 8.21, среднее значение уровня  $\bar{y} = 76,375$ , отсюда

$$\sigma = \sqrt{\frac{7797,747}{12}} = 25,5 \text{ тыс.т.} \quad V = \frac{25,5}{76,375} \cdot 100 = 33,38\%, \text{ т.е. результаты}$$

двух показателей –  $\sigma_{сез}$  и  $V$  – идентичны.

**Расчет индексов сезонности за ряд лет** можно осуществить двумя способами.

*Первый способ* состоит в определении простой средней за одни и те же месяцы изучаемого периода и сопоставлении их со средней за весь изучаемый период.

$$I_s = \frac{\bar{y}_i}{\bar{y}} \cdot 100\%$$

*Второй способ* заключается в том, что вначале вычисляют по каждому году индексы сезонности, а затем из индексов одноименных месяцев находится средняя арифметическая, которая и является индексом сезонности.

*Пример 8.13.* По данным о производстве растительного масла в 1992 и 1993 году рассчитаем индекс сезонности первым (табл. 8.22) и вторым (табл. 8.23) способами.

Таблица 8.22

Расчет индекса сезонности за ряд лет первым способом

Месяц	Производство масла, тыс.т. в 1992 г.	Производство масла, тыс.т. в 1993 г.	Среднее значение за два года $\bar{y}_i = \frac{y_{i1992} + y_{i1993}}{2}$	Индексы сезонности $I_{сез.i} = \frac{\bar{y}_i}{\bar{y}} 100\%$
Январь	109,5	97,6	103,55	126,5184
Февраль	102,7	95,5	99,1	121,0813
Март	86,6	114,2	100,4	122,6697
Апрель	82,3	101,3	91,8	112,1621
Май	76,6	105,6	91,1	111,3068
Июнь	70,0	94,6	82,3	100,5549
Июль	57,6	75,2	66,4	81,12814
Август	24,5	38,6	31,55	38,54808
Сентябрь	36,3	38,9	37,6	45,94003
Октябрь	70,7	78,7	74,7	91,26916
Ноябрь	95,2	96,5	95,85	117,1104
Декабрь	104,5	111,1	107,8	131,711
Итого	916,5	1047,8	982,15	

Средний уровень за два года  $\bar{y} = 982,15 / 12 = 81,85$  тыс. т.

Таблица 8.23

Расчет индекса сезонности за ряд лет вторым способом

Месяц	Производство масла, тыс.т. в 1992 году	Производство масла, тыс.т. в 1993 году	Индекс сезонности в 1992 году	Индекс сезонности в 1993 году	Общий индекс сезонности
Январь	109,5	97,6	143,4	111,7771	127,5743
Февраль	102,7	95,5	134,5	109,372	121,9201
Март	86,6	114,2	113,4	130,7883	122,0881
Апрель	82,3	101,3	107,8	116,0145	111,8861
Май	76,6	105,6	100,3	120,9391	110,6169
Июнь	70,0	94,6	91,6	108,3413	99,99716
Июль	57,6	75,2	75,4	86,12331	80,77033
Август	24,5	38,6	32,1	44,20691	38,14273
Сентябрь	36,3	38,9	47,5	44,55049	46,03956
Октябрь	70,7	78,7	92,6	90,1317	91,35063
Ноябрь	95,2	96,5	124,6	110,5173	117,5827
Декабрь	104,5	111,1	136,8	127,238	132,0314

### **Автокорреляция в рядах динамики**

Под **автокорреляцией** понимается зависимость последующих уровней ряда от предыдущих. Для определения, насколько вариация признаков динамического ряда обусловлена автокорреляцией, применяется **коэффициент автокорреляции**. Для его расчета параллельно исходным уровням ряда  $y_i$  записываются уровни, сдвинутые на один период, т.е.  $y_{i-1}$  или  $y_{i+1}$

1 ряд:  $y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4 \ y_5$

2 ряд:  $y_2 \ y_3 \ y_4 \ y_5 \ y_6$  - сдвинутый ряд

3 ряд:  $y_3 \ y_4 \ y_5 \ y_6 \ y_7$  - сдвинутый ряд

Между сдвинутыми рядами находят коэффициенты корреляции по формуле:

$$r_a = \frac{\sum (y_t - \bar{y}_t)(y_{t+1} - \bar{y}_{t+1})}{n \sigma_{y_t} \sigma_{y_{t+1}}}$$

Часто проводится одновременный анализ нескольких динамических рядов, колебания уровней которых взаимообусловлены. Проверка рядов на автокорреляцию осуществляется по **критерию Дарбина-Уотсона**:

$$K = \frac{\sum (\varepsilon_{t+1} - \varepsilon_t)^2}{\sum \varepsilon_t^2},$$

где  $\varepsilon_t = y_t - \hat{y}_t$  – отклонение фактического уровня ряда в точке  $t$  от теоретического (выровненного) значения.

При  $K=0$  имеется полная положительная автокорреляция, при  $K=2$  автокорреляция отсутствует, при  $K=4$  полная отрицательная автокорреляция.

### **8.2. Контрольные вопросы к теме 8**

1. Что такое ряды динамики и их роль в статистическом анализе?
2. Укажите виды рядов динамики.
3. Чем объясняется выбор формулы для нахождения среднего уровня динамического ряда?
4. Какие показатели рассчитываются для характеристики изменений уровней ряда динамики?
5. Как рассчитывается средний темп (коэффициент) роста и прироста?
6. В каких случаях применяют «период удвоения ряда»?
7. Укажите приемы, применяемые для преобразования временных рядов.
8. Каким образом временные ряды приводят к одному основанию?

9. Чем вызвана необходимость смыкания временных рядов?
10. Назовите методы анализа основной тенденции развития в рядах динамики.
11. На чем основан метод укрупнения интервалов?
12. Охарактеризуйте метод скользящей средней, его недостатки и достоинства.
13. Чем вызвана необходимость аналитического выравнивания рядов?
14. Какие уравнения регрессии наиболее часто используются для выравнивания динамических рядов?
15. Какой критерий применяется для оценки качества модели динамического ряда?
16. Как измеряются сезонные колебания в динамических рядах?
17. Как рассчитываются индексы сезонности?
18. Как измеряется автокорреляция в рядах динамики?
19. Дайте понятие экстраполяции рядов динамики.
20. Укажите простейшие приемы прогнозирования.

### **8.3. Контрольные задания к теме 8**

1. Имеются следующие данные об остатках сырья и материалов на складе предприятия, млн. руб.: на 1/01 – 400; на 1/02 – 455; на 1/03 – 465; на 1/04 – 460. Определить среднемесячный остаток сырья и материалов на складе предприятия за 1 квартал.
2. Имеются следующие данные об остатках дебиторской задолженности фирмы “Сатурн” на начало месяца (тыс. руб.):

1 января	- 394,0
1 февраля	- 312,8
1 марта	- 372,6
1 апреля	- 356,3
1 мая	- 390,4
1 июня	- 402,8
1 июля	- 413,0

Определите: 1) вид ряда динамики;

2) среднемесячные уровни остатка дебиторской задолженности за I, за II кварталы и за полугодие;

3) изменение остатка дебиторской задолженности во II квартале по сравнению с I кварталом.

3. Остатки вкладов населения в сбербанках города в 2002 году характеризуются следующими данными на 1-е число месяца, руб.:

январь	- 910,5	март	- 915,4	май	- 917,0
февраль	- 920,0	апрель	- 920,8	июнь	- 921,3

июль - 925,9

Определите: среднемесячные остатки вкладов за 1 и 2 кварталы; средние остатки вкладов за полугодие; абсолютный прирост изменения среднего остатка вклада во II квартале по сравнению с I.

4. Списочная численность работников фирмы в 2002 году составила на первое число месяца, чел.:

январь	- 347	август	- 359
февраль	- 350	сентябрь	- 351
март	- 349	октябрь	- 352
апрель	- 351	ноябрь	- 359
май	- 345	декабрь	- 353
июнь	- 349	январь 1999г.	- 360
июль	- 357		

Определите: среднемесячную численность работников в 1 и 2 полугодиях; среднегодовую численность работников фирмы; абсолютный прирост численности работников фирмы во 2 полугодии по сравнению с 1.

5. Имеются следующие данные о товарных запасах в розничной торговле за первый квартал, тыс. у.е.:

Товарные группы	На 1 января	На 1 февраля	На 1 марта	На 1 апреля
Продовольственные товары	306	324	260	290
Непродовольственные товары	528	508	530	520

Определите средние товарные запасы за первый квартал по каждой товарной группе.

6. Имеются следующие данные о товарных запасах на складах фирмы «Регата» за второе полугодие 2003 года, тыс. у.е.:

	На 1.07.03	На 1.08.03	На 1.09.03	На 1.10.03	На 1.11.03	На 1.12.03	На 1.01.04
Товарные запасы	28,2	30,1	32,5	34,2	29,6	31,8	33,4

Определите средние товарные запасы за третий квартал; за четвертый квартал и за второе полугодие 2003 года.

7. Имеются следующие данные о товарных запасах розничного торгового предприятия, млн. руб.: на 1.01.2002 г. – 61,1; на 1.05.2002 г. – 57,5; на 1.08.2002 г. – 51,3; на 1.01.2003г. – 74,7. Вычислить среднегодовой товарный запас розничного торгового предприятия за 2002 год.
8. Остаток средств на расчетном счете предприятия составил на 1.01.2003 г. 180 тыс. руб., 15.01 поступило на расчетный счет 900 тыс. руб., 22.01 списано со счета 530 тыс. руб., 27.01 поступило 380 тыс. руб. С 28.01 до конца месяца остаток средств на расчетном счете не



изменился. Определить среднесуточный остаток средств на расчетном счете предприятия в январе.

9. Имеются данные о движении материальных средств на складе за январь – февраль, в т:

Остаток на:		Остаток на:	
1.01	50	6.02	Отгружено 70
5.01	Поступило 120	10.02	Поступило 60
8.01	Отгружено 90	12.02	Отгружено 50
15.01	Поступило 80	20.02	Отгружено 30

Определить средний остаток за январь, февраль и изменение запаса в феврале по сравнению с январем.

10. Имеются следующие данные о движении денежных средств на счете вкладчика в Сбербанке в IV квартале, руб.:

Остаток денежных средств на 1 октября	12 600
10 октября поступило	500
10 ноября выдано	500
21 ноября поступило	600
10 декабря поступило	1 500
25 декабря выдано	1 000

Определить средний остаток вклада за октябрь, ноябрь, декабрь и за IV квартал.

11. Определить, на сколько рублей и на сколько процентов различаются средние остатки по вкладам за I квартал, если на 1.01.2003 г. остаток по первому вкладу составлял 500 у.е., по второму вкладу – 700 у.е. В течение I квартала имели место следующие изменения величины остатков вкладов (у.е.):

Вклады	Даты изменения размера вклада, у. е.						
	5.01	17.01	2.02	21.02	13.03	20.03	28.03
I	+150	-200	-	+500	-	-	+100
II	-	-	+300	+150	-550	-200	+400

12. Имеются данные о динамике производства продукции предприятием (млн. руб.):

1993	1994	1995	1996	1997	1998
2040	2130	2220	2265	2360	2410

Определить среднегодовое производство продукции за 1993 – 1998 гг.

13. Имеются следующие данные о стоимости имущества предприятия (млн. руб.):

Год	Отчетные данные на:			
	1.01	1.04	1.07	1.10
1998	62	65	70	68
1999	68	70	75	78
2000	80	84	88	90
2001	95	-	-	-

Определить абсолютное и относительное изменение среднегодовой стоимости имущества предприятия в 2000 году по сравнению с 1999 и 1998 годами.

- 14.** На 1 октября в списке предприятия «Альфа» числилось 25 человек, с 10 октября были приняты на работу 6 чел., с 12 октября были уволены по собственному желанию 4 чел., с 25 октября на предприятие были приняты 6 чел. На предприятии «Ромео» на 1 октября числилось 32 чел., с 15 октября были приняты на работу 5 чел., а с 28 октября уволилось 6 чел. Определить, на каком предприятии и насколько среднесписочная численность в октябре была больше (в абсолютном и относительном выражении).
- 15.** Численность специалистов с высшим и специальным средним образованием двух регионов составляла (чел.):

Дата	1 регион	2 регион
1.01.2003	1850	1720
1.04.2003	1866	1810
1.12.2003	1910	1860
1.01.2004	1960	1900

Сопоставить среднегодовую численность специалистов по двум регионам. Определить, в каком регионе и насколько средняя численность специалистов больше (в абсолютном и относительном выражении).

- 16.** По нижеследующим данным о кредитных вложениях Российских банков в 2003 году рассчитайте средний уровень каждого ряда, среднегодовой темп роста вложений всего и в том числе по видам. Сопоставьте коэффициенты опережения и замедления.

	1.01.2003	1.04.2003	1.07.2003	1.10.2003	1.01.2004
Кредитные вложения	1216,5	1331,9	1360,5	1532,2	1397,5
в т.ч. краткосрочные	1194,7	1268,4	1324,3	1493,0	1359,1
долгосрочные	21,8	63,5	36,3	39,2	38,4

- 17.** Имеются следующие данные Госкомстата РФ о количестве россиян, отдыхающих за рубежом в период 1999-2003 годы (тыс. чел.):

1999	2000	2001	2002	2003
1577	2522	2555	3422	3540

Для анализа ряда динамики исчислите:

- абсолютные приросты, темпы роста, темпы прироста – базисные и цепные, абсолютное содержание 1% прироста, пункты роста. Полученные данные представьте в таблице;
- среднегодовое количество россиян, отдыхающих за рубежом;
- среднегодовой абсолютный прирост;
- среднегодовые темпы роста и прироста;
- изобразите динамику россиян, отдыхающих за рубежом, на графике. Сделайте выводы.

- 18.** Ввод в действие жилых домов предприятиями всех форм собственности в одном из регионов в 1997-2001 годах характеризуется следующими данными, млн. кв. м общей площади:

1997	1998	1999	2000	2001
20	21	20	22	23

Для анализа ряда динамики исчислите:

- абсолютные приросты, темпы роста, темпы прироста – базисные и цепные, абсолютное содержание 1% прироста, пункты роста. Полученные данные представьте в таблице;
- средний уровень ряда;
- среднегодовой абсолютный прирост;
- среднегодовые темпы роста и прироста

- 19.** Производство продукции предприятия характеризуется следующими данными:

1997	1998	1999	2000	2001	2002
600	630	660	380	390	720

Для анализа ряда динамики исчислите:

- абсолютные приросты, темпы роста, темпы прироста – базисные и цепные, абсолютное содержание 1% прироста, пункты роста. Полученные данные представьте в таблице;
- средний уровень ряда;
- среднегодовой абсолютный прирост;
- среднегодовой темп роста и прироста.

- 20.** Имеются следующие данные о производстве продукции предприятия за 1998-2003 гг. (в сопоставимых ценах), млн. руб.

1998	1999	2000	2001	2002	2003
80	84	89	95	101	108

Определить аналитические показатели ряда динамики производства продукции предприятия за 1998-2003 гг.

- абсолютные приросты, темпы роста, темпы прироста – базисные и цепные, абсолютное содержание 1% прироста, пункты роста. Полученные данные представьте в таблице;

- средний уровень ряда;
- среднегодовой абсолютный прирост;
- среднегодовой темп роста и прироста.

**21.** Имеются следующие данные о продаже легковых автомобилей в РФ:

Год	2000	2001	2002	2003
Продано легковых автомобилей, тыс. шт.	788	810	867	1054

Для анализа ряда динамики исчислите:

- абсолютные приросты, темпы роста, темпы прироста – базисные и цепные, абсолютное содержание 1% прироста, пункты роста.

Полученные данные представьте в таблице;

- средний уровень ряда;
- среднегодовой абсолютный прирост;
- среднегодовой темп роста и прироста.

**22.** Имеются данные о бюджетных расходах РФ на исследования и разработки в постоянных ценах 1996 г. за 1996 – 2004 гг.

Годы	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Млрд. руб.	10,9	10,9	7,3	3,2	3,1	2,9	2,4	2,6	2,8

Рассчитайте показатели динамики затрат на исследования и разработки за период 1996 – 2004 гг. Сделайте выводы.

**23.** По данным о числе казненных и помилованных заключенных в 1985 – 1996 гг. рассчитайте по каждому ряду в отдельности абсолютные (цепные и базисные) и средние показатели динамики. Результаты представьте в таблице. Нанесите на график динамику рядов.

Год	Количество казней	Помиловано	Год	Количество казней	Помиловано
1985	404	5	1991	15	37
1986	277	12	1992	1	55
1987	130	10	1993	4	149
1988	88	9	1994	19	134
1989	76	4	1995	86	5
1990	72	12	1996	53	0

**24.** Количество дорожно-транспортных происшествий (ДТП), совершенных водителями в регионе, увеличилось в 1995 по сравнению с 1990 годом на 2 тыс., или на 4%; в 2000 году по сравнению с 1995 годом их число возросло на 30%, а в 2002 году по сравнению с 2000 годом – на 2%. Определить количество ДТП в 1990, 1995, 2000 и 2002 годах.

**25.** Численность населения региона возросла за период с 1.01.1999 по 1.01.2002 г. на 4,2%, при этом удельный вес мужского населения за этот период увеличился с 42,1 до 44,3%. Определить показатели динамики численности мужского и женского населения региона.

26. Удельный вес городского населения региона увеличился с 1.01 1993 г. по 1.01.2000 г. с 36,2 до 42,8%. Определить показатели динамики численности городского и сельского населения региона, если общая численность населения данного региона за этот период возросла на 8,4%.
27. Динамика объема реализации услуг коммунальных предприятий города в процентах к 1999г. составила: в 2000г. – 108,0; в 2001 г. – 110,5; в 2002 г. – 125,0; в 2003 г. – 153,2. Определить среднегодовой темп прироста за период 1999 – 2003 гг.
28. Среднегодовые темпы роста продукции за период 1999 – 2003 гг. в тяжелой промышленности составили 102,6%, а в легкой промышленности – 105,3%. Величина продукции в 2003 г. (в у.е.) составила в тяжелой промышленности – 7820, а в легкой – 8590. Определите среднегодовой темп роста продукции в целом за период 1999 – 2003 гг.
29. У одного предприятия объем продукции за 10 лет вырос на 40%, а у второго за 5 лет – на 20%. Можно ли считать, что темпы роста продукции у двух предприятий одинаковы?
30. Численность населения города в 1989 году составила 934,1 тыс чел., а в 1999 году – 1020,3 тыс. чел. Чему равен среднегодовой темп роста населения в этот период? Чему будет равно население города в 2010 и 2015 годах, если темпы его роста не изменятся? За сколько лет население города может удвоиться, если темпы его роста сохранятся?
31. Розничный товароборот в области увеличился в 2001 г. по сравнению с 2000 г. на 20%, а в 2002 г. по сравнению с 2001 г. – еще на 10%. Определите розничный товароборот в области в 2000, 2001 и 2002 гг., если абсолютный прирост розничного товароборота в 2001 г. по сравнению с 2000 г. составил 3600 млн. руб.
32. Заполнить таблицу:

Годы	Производство продукции, млн. руб.	По сравнению с предыдущим годом			
		абсол. приросты	темпы роста	темпы прироста	A %
1998	92,5				
1999		4,8			
2000			104,0		
2001				5,8	
2002					
2003		7,0			1,15

33. Заполнить таблицу:

Годы	Пассажирооборот, млрд. пасс.-км.	Цепные показатели динамики			
		абсол. приросты	коэффициенты роста	темпы прироста	А %
1998	127,0				
1999			1,102		
2000				7,1	
2001	164,6				
2002					
2003				9,9	1,75

**34.** Заполнить таблицу:

Годы	Перевезено грузов, млн. т	Цепные показатели динамики			
		абсол. приросты	темпы роста	темпы прироста	А %
2000	300				
2001		20			
2002				5	
2003					
2004			110		3,6

**35.** Заполнить таблицу:

Годы	Производство продукции, тыс. т	Базисные показатели динамики		
		абсол. приросты	темпы роста	темпы прироста
2000	600			
2001				-2
2002		-28		
2003			97	
2004				-6

**36.** Заполнить таблицу:

Годы	Производство продукции, млн. шт.	Базисные показатели динамики			
		абсол. приросты	темпы роста	темпы прироста	пункты роста
1995	55,1				
1996		2,8			
1997			110,3		
1998				14,9	
1999				17,1	
2000			121,1		
2001		13,5			
2002				25,4	
2003		14,0			

**37.** Имеются данные о динамике объемов строительно-монтажных работ в России (в сметных ценах 1991 г.):

Годы	Строительно-монтажные работы, млрд. руб.	Темп роста к 1989 г., %	Темп роста к предыдущему году, %	Темп прироста к предыдущему году, %	Коэффициент роста к 1989 г.
1998					
1999			92,5		
2000				-14,6	
2001					0,5
2002					
2003	51,8	41,7	92,8		
2004				-6,6	

Заполните таблицу и сделайте выводы о динамике объемов строительно-монтажных работ в России.

- 38.** Имеются данные о капитальных вложениях за счет всех источников финансирования в экономику России (в сметных ценах 1991 г.):

Годы	Капитальные вложения, млрд. руб.	Темп роста к 1989 г., %	Темп прироста к предыдущему году, %	Темп прироста к 1989 г., %	Темп роста к предыдущему году, %
1989	248,9				
1990			0,1		
1991		84,5			
1992				- 49	
1993			-11,6		
1994		34,1			
1995				-70,4	
1996			-18		
1997					95
1998		22,2			

Заполните таблицу и сделайте выводы о динамике капитальных вложений

- 39.** Объем продукции фирмы в 1999 г. по сравнению с 1998 г. возрос на 2%; в 2000 г. он составил 105% по отношению к объему 1999 г., а в 2001 г. был в 1,2 раза больше объема 1998 г. В 2002 г. фирма выпустила продукции на сумму 25 млн. руб., что на 10% больше, чем в 2001 г.; в 2003 г. – 30 млн. руб. и 2004 г. – 37 млн. руб. Определите абсолютные уровни производства за все годы, цепные темпы роста и базисные темпы прироста, а также среднегодовые темпы роста и прироста за 1998 – 2004 гг.
- 40.** Имеются данные о среднемесячной заработной плате на одного работника и стоимости набора 25 основных продуктов питания в расчете на одного человека в РФ за первое полугодие 1999 года.

Месяц	Среднемесячная заработная плата, руб.	Стоимость продуктов питания из 25 основных продуктов питания
Январь	654,8	209,4
Февраль	684,4	216,6
Март	745,0	220,9
Апрель	746,5	224,1
Май	779,3	227,5
Июнь	837,2	232,5

Привести ряды динамики к сопоставимому виду, вычислить коэффициенты опережения, сделать краткие выводы.

- 41.** Имеются данные о динамике кредитов коммерческих банков по видам (по состоянию на 1 января), млн. руб.:

Год	Кредиты	В том числе	
		краткосрочные	долгосрочные
2000	5	4	1
2001	25	23	2
2002	64	61	3
2003	98	93	5

Приведите ряды к одному основанию. Определите коэффициенты опережения темпов роста краткосрочных кредитов по сравнению с долгосрочными кредитами.

- 42.** Имеются следующие данные о розничном товарообороте по одному из районов города (млн. руб.). Осуществить смыкание рядов.

Объем розничного товарооборота	1998	1999	2000	2001	2002	2003
без мелкого опта	360	380	410			
с мелким оптом			460	490	520	570

- 43.** Приведите уровни следующего ряда динамики, характеризующие численность работников фирмы, к сопоставимому виду, чел.:

	На 1 января	Среднегодовая численность работников
1992	420	
1993	429	
1994	427	
1995	431	435
1996		442
1997		450
1998		460
1999		465
2000		475

- 44.** Имеются данные об объеме продукции (млн. руб.), вычисленные по старой и новой методике. Приведите уровни ряда к сопоставимому виду.



	Объем продукции по старой методике расчета	Объем продукции по новой методике расчета
Январь	260	
Февраль	265	
Март	270	
Апрель	280	
Май	282	285
Июнь		288
Июль		285
Август		282
Сентябрь		290
Октябрь		293
Ноябрь		297
Декабрь		305

**45.** Имеются следующие данные о розничном товарообороте области в старых и новых границах, млн. руб.:

	1992	1993	1994	1995	1996	1997
Старые границы	350	370	400	450		
Новые границы				540	600	650

Приведите уровни ряда к сопоставимому виду. Сделайте выводы.

**46.** До 1995 года в состав производственного объединения входили 20 предприятий. В 1995 году в него влилось еще 4 предприятия, и оно стало объединять 24 предприятия. Произведите смыкание ряда динамики, используя следующие данные:

	Реализованная продукция по 20 предприятиям, млн. руб.	Реализованная продукция по 24 предприятиям, млн. руб.
1992	448,7	
1993	462,8	
1994	465,8	
1995	491,6	559,5
1996		578,7
1997		580,5
1998		610,0
1999		612,9
2000		615,5

**47.** Имеются данные о численности работников крупного холдинга:

№ п/п	Численность работников	Годы						
		1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
1	В прежних границах	45,0	48,0	50,0				
2	В новых границах			70,0	71,3	73,2	73,1	75,0

Привести ряды динамики к сопоставимому виду.

- 48.** Имеются данные об объемах товарооборота торговой фирмы (в сопоставимых ценах), млн. у.е.:

Год	Товарооборот	Год	Товарооборот
1985	9,5	1993	17,6
1986	13,7	1994	15,4
1987	12,1	1995	10,9
1988	14,0	1996	17,5
1989	13,2	1997	15,0
1990	15,6	1998	18,5
1991	15,4	1999	14,2
1992	14,0	2000	14,9

Произведите сглаживание динамического ряда методом трехлетней и пятилетней скользящей средней.

- 49.** Произведите сглаживание следующего ряда динамики методом трехчленной скользящей средней и методом аналитического выравнивания.

Месяц	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Производство продукции, т	36	42	44	54	43	55	41	43	39	37	40	42

- 50.** Имеются данные о потреблении овощей по области за 1995 – 2003 гг. на одного члена домохозяйства в месяц, кг.

1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
10,0	10,7	12,0	10,3	12,9	16,3	15,6	17,8	18,0

Выявить основную тенденцию потребления овощей за 1995 – 2003 гг. методами скользящей средней и аналитического выравнивания по прямой.

- 51.** Рыночная цена акции компании на биржевом рынке ценных бумаг характеризуется следующими данными:

Дни торгов	1	2	3	4	5	6	7
Рыночная цена акции, руб.	150	160	90	88	87	94	101

Для изучения тенденции изменения рыночной цены акции:

- произвести аналитическое выравнивание ряда по прямой и выразить тенденцию изменения математическим уравнением. Объяснить смысл полученных параметров;
- экстраполируя выявленную тенденцию, т.е. предполагая, что выявленная закономерность изменения цены акции сохранится, определить цену акции на 10-й день торгов;
- построить график по эмпирическим (исходным) и теоретическим (выровненным) уровням ряда. Сделать выводы.

**52.** Имеются данные о численности персонала, занятого исследованиями и разработками, в России.

Годы	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Млн. чел.	2,22	1,94	1,68	1,53	1,32	1,11	1,06	0,99	0,93

Рассчитать показатели динамики численности персонала, занятого исследованиями и разработками, за 1996 – 2004 гг. Сделайте выводы. Найти уравнение тренда и сделать прогноз численности персонала на 2007 г.

**53.** Динамика экспорта продукции характеризуется данными таблицы:

Год	1997	1998	1999	2000	2001
Экспорт продукции, тыс.т	37	39	43	48	52

Исходя из этих данных:

- на основе анализа приростов обоснуйте функциональный вид уравнения тренда;
- вычислите параметры уравнения тренда, объясните их содержание;
- допуская, что выявленная тенденция сохранится, определите ожидаемый объем экспорта в 2008 году.

**54.** Динамика производства вычислительных и управляющих комплексов характеризуется данными таблицы:

Порядковый номер года	1	2	3	4	5	6	7
Количество комплексов	36	44	51	62	70	79	85

Исходя из этих данных:

- на основе анализа приростов обоснуйте функциональный вид уравнения тренда;
- вычислите параметры уравнения тренда, объясните их содержание;
- допуская, что выявленная тенденция сохранится, определите ожидаемый уровень производства в следующем году.

**55.** В таблице представлены данные об остатках вкладов населения в банках за 15 месяцев на начало каждого месяца ( $y_i$ ), млрд. руб.:

Месяц	$y_i$	Месяц	$y_i$	Месяц	$y_i$
1	14717	6	23342	11	40524
2	16642	7	28317	12	45416
3	18504	8	30624	13	50857
4	20376	9	33408	14	56024
5	21321	10	36505	15	59381

В предположении об изменении тенденции ряда по линейной модели:

- оценить коэффициенты тренда;
- дать экономическую интерпретацию полученных коэффициентов;

- рассчитать прогноз остатков вкладов населения в банках на один месяц вперед, т.е. на начало 16-го месяца.

- 56.** Имеются следующие данные об остатках вкладов по одному из отделений сберегательного банка (млн. руб.)

На 1.01.2003	262,4	1.06.2003	396,7	1.11.2003	610,9
1.02.2003	275,8	1.07.2003	421,3	1.12.2003	645,8
1.03.2003	295,4	1.08.2003	476,8	1.01.2004	708,9
1.04.2003	292,5	1.09.2003	470,2		
1.05.2003	337,4	1.10.2003	586,0		

Определить средние квартальные и среднегодовые остатки вкладов по отделению банка. Произвести сглаживание ряда динамики методом скользящей средней и аналитического выравнивания по прямой. На основе исчисленных показателей определить ожидаемые уровни остатков вкладов населения на 1.04.2004 г. Изобразите динамику и ожидаемые уровни остатков вкладов по отделению банка на графике. Сделайте выводы.

- 57.** Имеются следующие данные о численности населения города за 5 лет (на начало года):

Год	2000	2001	2002	2003	2004
Численность населения, тыс. чел.	72	78	83	87	90

Найти линию тренда и, используя полученное уравнение, определить численность населения в 2007 г. Проверить полученную модель на автокорреляцию.

- 58.** Имеются следующие данные о вводе жилых домов (млн. кв. м общей площади) в городе:

Год	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Введено млн. кв. м общей площади	2,26	2,47	2,48	2,28	2,47	2,55

Найти линию тренда и, используя полученное уравнение, спрогнозировать ввод жилья в 2008 г. Проверить полученную модель на автокорреляцию.

- 59.** Произвести анализ сезонной волны на примере количества зарегистрированных браков:

Месяц	Зарегистрировано браков	Месяц	Зарегистрировано браков
I	776	VII	868
II	768	VIII	890
III	672	IX	979
IV	760	X	832
V	648	XI	819
VI	805	XII	763

- 60.** Произвести анализ сезонной волны на примере числа расторгнутых браков населением города:

Месяцы	Число расторгнутых браков			Месяцы	Число расторгнутых браков		
	2001	2002	2003		2001	2002	2003
Январь	195	158	144	Июль	126	128	124
Февраль	164	141	136	Август	121	122	119
Март	153	153	146	Сентябрь	118	118	118
Апрель	136	140	132	Октябрь	126	130	128
Май	136	136	136	Ноябрь	129	131	135
Июнь	123	129	125	Декабрь	138	141	139

- 61.** Рассчитать поквартальные индексы сезонности по данным о производстве продукции (тыс. т.) за 2002 и 2003 гг.

Кварталы года		Производство продукции, тыс. т.	Кварталы года		Производство продукции, тыс. т.
2002 г.	I	298,8	2003 г.	I	307,3
	II	228,9		II	301,1
	III	118,4		III	152,7
	IV	270,4		IV	286,2

- 62.** Реализация картофеля на рынках города за три года характеризуется следующими данными, т.:

Год	Месяц											
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
2000	70	71	82	190	280	472	295	108	605	610	184	103
2001	71	85	84	308	383	443	261	84	630	450	177	168
2002	63	60	59	261	348	483	305	129	670	515	185	104

Определить индексы сезонности.

- 63.** Отправление грузов железнодорожным транспортом общего пользования в РФ за три года характеризуется следующими данными, млн. т:

Год	Месяц											
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
2001	114,0	107,9	122,6	121,5	119,6	115,1	114,4	111,2	108,1	110,8	100,0	100,4
2002	91,5	83,1	92,8	91,7	88,7	86,8	84,7	87,9	85,3	89,6	85,6	86,3
2003	84,1	79,6	89,1	85,8	87,6	83,9	88,7	89,0	85,9	88,1	82,4	80,1

Определить данные о внутригодовой динамике заготовок сельскохозяйственной продукции индексы сезонности и построить график сезонной волны.

- 64.** Имеются следующие продукции области по кварталам за три года:

Квартал	Заготовлено продукции, тыс. руб.		
	Первый год	Второй год	Третий год
I	162	159	158
II	170	193	225
III	177	178	187
IV	151	168	172

Для анализа внутригодовой динамики заготовок сельхозпродукции определить индексы сезонности, учитывая наличие тенденции развития в данном ряде динамики.

- 65.** Имеются следующие данные о внутригодовой динамике ввода в действие жилых домов предприятиями всех форм собственности по кварталам в 2000 – 2003 гг., млн. кв. м общей площади:

Квартал	2000	2001	2002	2003
I	2,2	2,4	2,1	2,0
II	5,1	5,0	4,2	5,7
III	3,9	4,8	4,1	6,0
IV	8,4	9,0	6,4	15,0

Определить индексы сезонности, учитывая наличие тенденции развития. Построить график сезонной волны.

- 66.** Имеются данные об изменении объемов промышленного производства РФ:

Месяц	Темп роста общего объема промышленного производства в % к декабрю 2002 г.		Месяц	Темп роста общего объема промышленного производства в % к декабрю 2002 г.	
	2003	2004		2003	2004
I	92,0	86,0	VII	89,3	83,9
II	90,5	86,2	VIII	93,0	84,2
III	95,0	91,0	IX	92,6	85,0
IV	88,2	88,2	X	94,9	89,8
V	89,0	84,0	XI	91,8	86,3
VI	90,7	83,8	XII	92,2	87,1

Проанализируйте сезонные изменения промышленного производства.

- 67.** По таксомоторному предприятию имеются следующие данные о величине платного пробега за три года (тыс. км.):

Месяц	2000	2001	2002	Месяц	2000	2001	2002
I	60,0	70,0	102,0	VII	80,3	90,3	116,4
II	62,0	77,4	105,0	VIII	86,5	94,6	120,0
III	66,4	78,2	107,0	IX	79,0	94,0	118,7
IV	70,0	80,0	110,5	X	76,4	92,0	115,0
V	78,4	88,4	113,7	XI	75,0	90,0	107,5
VI	80,0	89,5	115,0	XII	70,4	85,5	98,2

На основе приведенных данных выявить наличие и измерить степень сезонной неравномерности.

**68.** Имеются следующие данные по некоторому региону РФ:

Год	Число клубных учреждений, тыс.	Зарегистрировано преступлений на 1000 чел.
1999	52	17,2
2000	46	16,3
2001	24	14,4
2002	16	11,6
2003	17	12,9

Измерить корреляцию между уровнями двух рядов динамики.

**69.** Ежеквартальная динамика процентной ставки банка в течение семи кварталов представлена в таблице:

$t$	1	2	3	4	5	6	7
$\hat{y}_t$	17,0	16,5	15,9	15,5	14,9	14,5	13,8

Требуется обосновать правомерность использования среднего прироста для получения прогнозного значения процентной ставки в 8 квартале и рассчитать прогноз процентной ставки банка в 8 квартале.

**70.** Изменение ежеквартальной динамики процентной ставки банка происходило примерно с постоянным темпом роста в течение семи кварталов. Процентная ставка банка в I квартале равнялась 8,3%, а в 7 квартале – 14%. Рассчитать прогноз процентной ставки банка в 8 квартале, используя средний темп роста.

## Тема 9. Индексы

### 9.1. Справочные материалы

**Индекс** (лат. *INDEX* – указатель, показатель) – относительная величина, показывающая, во сколько раз уровень изучаемого явления в данных условиях отличается от уровня того же явления в других условиях. Различие условий может проявляться во времени, в пространстве или в сравнении с любым эталоном (нормативом, планом, прогнозом и т.д.).

Основным элементом индексного отношения является **индексируемая величина**, т.е. значение признака статистической совокупности, изменение которой является предметом изучения. Индексируемая величина содержится в названии индекса, например, индекс цен, индекс себестоимости, индекс товарооборота и др.

Приняты следующие обозначения индексируемой величины:

- $q$  – количество (объем) какого-либо продукта в натуральном выражении (от латинского слова *quantitas*);
- $p$  – цена единицы товара (от латинского слова *pretium*);
- $z$  – себестоимость единицы продукции;
- $t$  – затраты времени на производство единицы продукции (трудоемкость);
- $w$  – выработка продукции в стоимостном выражении на одного работника или единицу времени;
- $v$  – выработка продукции в натуральном выражении на одного работника или единицу времени;
- $T$  – общие затраты времени ( $T = tq$ ) или численность работников;
- $pq$  – общая стоимость произведенной продукции данного вида или общая стоимость проданных товаров данного вида (товарооборот, выручка);
- $zq$  – затраты на производство продукции;

Схема построения индексов может быть представлена в виде следующей классификации (схема 9.1).



## Классификация индексов



**Индивидуальные индексы** служат для характеристики изменения отдельных элементов сложного явления, обозначаются буквой “ $i$ ”.

$$\text{Индивидуальный индекс цен} \quad i_p = \frac{P_1}{P_0} \quad (9.1)$$

$$\text{Индивидуальный индекс физического объема продукции:} \quad i_q = \frac{q_1}{q_0} \quad (9.2)$$

$$\text{Индивидуальный индекс товарооборота:} \quad i_{pq} = \frac{P_1 q_1}{P_0 q_0} \quad (9.3)$$

$$\text{Взаимосвязь индексов:} \quad i_{pq} = i_p \cdot i_q \quad (9.4)$$

Знак внизу справа означает период: 0 – базисный; 1 – отчетный

Особенность *сводных (общих)* индексов состоит в том, что они выражают относительное изменение сложных (разнотоварных) явлений, отдельные части или элементы которых непосредственно несоизмеримы. Они отражают изменение обобщенных величин во всей совокупности и обозначаются символом “I”.

*Агрегатные индексы* наряду с *индексируемым признаком* содержат и *признак-вес*, позволяющий обобщить (соизмерить) разнородные элементы совокупности.

Индексируемый признак при построении агрегатного индекса меняется: отчетный период сравнивается с базисным, признак-вес берется на неизменном фиксированном уровне либо базисного периода (формула Ласпейреса), либо отчетного периода (формула Пааше).

В следующей таблице представлены основные формулы агрегатных индексов:

Формулы индексов	Название индексов	
	Индекс физического объема (количественный)	Индекс цен (качественный)
Формула Ласпейреса (с базисными весами)	$I_q^L = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} \quad (9.5)$	$I_p^L = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \quad (9.8)$
Формула Пааше (с отчетными весами)	$I_q^P = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1} \quad (9.6)$	$I_p^P = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} \quad (9.9)$
Индекс Фишера	$I_q^\Phi = \sqrt{\frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} \times \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1}} \quad (9.7)$	$I_p^\Phi = \sqrt{\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}} \quad (9.10)$

Сводный индекс товарооборота рассчитывается по формуле:

$$I_{pq} = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_0} \quad (9.11)$$

Мультипликативная модель индексов:

$$\begin{aligned} I_{pq} &= I_q^L \cdot I_p^P \\ I_{pq} &= I_q^P \cdot I_p^L \end{aligned} \quad (9.12)$$

Прирост в абсолютном выражении может быть представлен в виде разности числителя и знаменателя соответствующих индексов.

Прирост продукции в ценах соответствующих лет:

$$\sum q_1 p_1 - \sum q_0 p_0 . \quad (9.13)$$

Прирост стоимости продукции в неизменных ценах:

$$\sum q_1 p_0 - \sum q_0 p_0 . \quad (9.14)$$

Прирост стоимости продукции вследствие изменения цен:

$$\sum q_1 p_1 - \sum q_1 p_0 . \quad (9.15)$$

*Пример 9.1.* Рассчитать индивидуальные и общие индексы физического объема продаж, цен, товарооборота по нижеследующим данным о продаже товаров магазином оптовой торговли:

Товар	Базисный период		Отчетный период	
	Цена за единицу, руб.	Объем продаж, тыс. шт.	Цена за единицу, руб.	Объем продаж, тыс. шт.
	$p_0$	$q_0$	$p_1$	$q_1$
А	986,5	80,316	998,0	31,008
Б	895,0	193,151	899,0	154,525
В	341,6	5,420	343,5	3,306

*Решение:* 1. Индивидуальные индексы цен исчислим по каждому товару:

$$i_p = \frac{p_1}{p_0}; \quad i_{pA} = \frac{998,0}{986,5} = 1,012 \text{ или } 101,2\%;$$

$$i_{pB} = \frac{899,0}{895,0} = 1,005 \text{ или } 100,5\%;$$

$$i_{pB} = \frac{343,5}{341,6} = 1,006 \text{ или } 100,6\%.$$

В отчетном периоде по сравнению с базисным цена товара А возросла в 1,012 раза, т.е. на 1,2%, или на 11,5 руб.; товара Б – в 1,005 раза, на 0,5%, или на 4 руб.; товара В – в 1,006 раза, на 0,6%, или на 1,9 руб.

Общий индекс цен Пааше:

$$I_p^{\Pi} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} = \frac{998,8 \cdot 31,008 + 899,0 \cdot 154,525 + 343,5 \cdot 3,306}{986,5 \cdot 31,008 + 895,0 \cdot 154,525 + 341,6 \cdot 3,306} =$$

$$= \frac{171024,3764}{170018,5966} = 1,006, \text{ или } 100,6\%.$$

В отчетном периоде по сравнению с базисным цена трех товаров возросла в среднем в 1,006 раз, или на 0,6%. В результате роста цен стоимость товаров, проданных в отчетном периоде, увеличилась на 1005,7798 тыс. руб. ( $\sum p_1q_1 - \sum p_0q_1 = 171024,3764 - 170018,5966$ ).

Общий индекс цен Ласпейреса:

$$I_p^L = \frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} = \frac{998,8 \cdot 80,316 + 899,0 \cdot 193,151 + 343,5 \cdot 5,420}{986,5 \cdot 80,316 + 895,0 \cdot 193,151 + 341,6 \cdot 5,420} =$$

$$= \frac{255724,1398}{253775,781} = 1,00768, \text{ или } 100,77\%$$

Если бы объем товаров А, Б и В остался на уровне базисного периода, то увеличение цен привело к росту стоимости продаж на 1948,3588 тыс. руб. ( $\sum p_1q_0 - \sum p_0q_0 = 255724,1398 - 253775,781$ ).

Формула Фишера даст среднее значение из индексов Пааше и Ласпейреса:

$$I_p^{\Phi} = \sqrt{I_p^L \cdot I_p^P} = \sqrt{1,00768 \cdot 1,006} = 1,0068, \text{ или } 100,68\%$$

2. Индивидуальные индексы физического объема продаж:

$$i_q = \frac{q_1}{q_0}; \quad i_{qA} = \frac{31,008}{80,316} = 0,386 \text{ или } 38,6\%;$$

$$i_{qB} = \frac{154,525}{193,151} = 0,8 \text{ или } 80\%;$$

$$i_{qB} = \frac{3,306}{5,420} = 0,61 \text{ или } 61\%.$$

В отчетном периоде по сравнению с базисным объем продаж товара А снизился на 61,4%, или на 49,308 тыс. шт.; товара Б – на 20%, или на 38,626 тыс. шт.; товара В – на 39%, или на 2,114 тыс. шт.

Общий индекс физического объема продаж Ласпейреса:

$$I_q^L = \frac{\sum q_1p_0}{\sum q_0p_0} = \frac{170018,5966}{253775,781} = 0,67, \text{ или } 67\%.$$

В отчетном периоде по сравнению с базисным объем продаж трех товаров снизился в среднем на 33%. В результате уменьшения количества проданных товаров стоимость товаров, проданных в отчетном периоде, увеличилась на 83757,1844 тыс. руб.

( $\sum q_1p_0 - \sum q_0p_0 = 170018,5966 - 253775,781$ ).

Общий индекс физического объема продаж Пааше:

$$I_q^{\Pi} = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1} = \frac{171024,3764}{255724,1398} = 0,669, \text{ или } 66,9\%.$$

Если при расчете индекса взять цены отчетного периода, то получится большее сокращение среднего объема продаж и стоимости товаров, на 84699,7634 тыс. руб. ( $\sum q_1 p_1 - \sum q_0 p_1 = 171024,3764 - 255724,1398$ ).

Среднее значение общего индекса физического объема по формуле Фишера:

$$I_q^{\Phi} = \sqrt{I_q^{\Pi} \cdot I_q^{\Pi}} = \sqrt{0,67 \cdot 0,669} = 0,6695, \text{ или } 66,95\%.$$

3. Индивидуальные индексы товарооборота в фактических ценах:

$$i_{pq} = \frac{p_1 q_1}{p_0 q_0}; \quad i_{pqA} = \frac{998,0 \cdot 31,008}{986,5 \cdot 80,316} = \frac{30945,984}{79231,734} = 0,391, \text{ или } 39,1\%.$$

В отчетном периоде по сравнению с базисным товарооборот в фактических ценах по товару А снизился на 60,9%, или на 48285,75 тыс. руб. Это снижение обусловлено сокращением объема продаж на 61,4% при росте цен на 1,2%.

$$i_{pqB} = \frac{899,0 \cdot 154,525}{895,0 \cdot 193,151} = \frac{138917,975}{172870,145} = 0,804, \text{ или } 80,4\%.$$

В отчетном периоде по сравнению с базисным товарооборот в фактических ценах по товару Б снизился на 19,6%, или на 33952,17 тыс. руб. Уменьшение вызвано сокращением объема продаж на 20% при росте цен на 0,5%.

$$i_{pqB} = \frac{343,5 \cdot 3,306}{341,6 \cdot 5,420} = \frac{1135,611}{1851,472} = 0,613, \text{ или } 61,3\%.$$

В отчетном периоде по сравнению с базисным товарооборот в фактических ценах по товару В снизился на 38,7%, или на 715,861 тыс. руб. Это снижение обусловлено сокращением объема продаж на 39% при росте цен на 0,6%.

Общий индекс товарооборота в фактических ценах по трем товарам вместе:

$$I_{pq} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0} = \frac{171024,3764}{253775,781} = 0,674, \text{ или } 67,4\%.$$

В отчетном периоде по сравнению с базисным товарооборот в фактических ценах по трем товарам снизился на 32,7%, или на 751,4046 тыс. руб. ( $\sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_0 = 171024,3764 - 253775,781$ ) в результате сокращения объема продаж по трем товарам в среднем на 33% при росте цен в среднем на 0,6%.

4. Покажем взаимосвязь индексов:

$$I_{pq} = I_q^I \cdot I_p^I; \quad 0,674 = 0,67 \cdot 1,0067;$$

$$I_{pq} = I_q^I \cdot I_p^I; \quad 0,674 = 0,669 \cdot 1,00768.$$

Взаимосвязь абсолютных стоимостных показателей:

$$\sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_0 = (\sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_1)^I + (\sum q_1 p_0 - \sum q_0 p_0)^I;$$

$$\sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_0 = (\sum p_1 q_0 - \sum p_0 q_0)^I + (\sum q_1 p_1 - \sum q_0 p_1)^I.$$

Данное равенство показывает влияние двух факторов на изменение стоимости проданных товаров: изменения цен и объема продаж.

$$- 82751,4046 \text{ тыс. руб.} = 1005,7798 - 83757,1844;$$

$$- 82751,4046 \text{ тыс. руб.} = 1948,3588 - 84699,7634.$$

### Сводные индексы в среднеарифметической и среднегармонической формах

*Средний арифметический индекс физического объема*, тождественный агрегатному индексу Ласпейреса, можно выразить:

$$i_q = \frac{q_1}{q_0} \Rightarrow q_1 = i_q \cdot q_0.$$

$$\text{Тогда } I_q^I = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} \Rightarrow I_q = \frac{\sum i_q q_0 p_0}{\sum q_0 p_0}. \quad (9.13)$$

*Средний гармонический индекс цен*, тождественный агрегатному индексу Пааше, можно выразить:

$$i_p = \frac{p_1}{p_0} \Rightarrow p_0 = \frac{p_1}{i_p}.$$

$$\text{Тогда } I_p^I = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} \Rightarrow I_p = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum \frac{p_1 q_1}{i_p}}. \quad (9.14)$$

**Средний арифметический индекс цен**, тождественный агрегатному индексу Ласпейреса, можно выразить:

$$i_p = \frac{p_1}{p_0} \Rightarrow p_1 = i_p \cdot p_0.$$

$$\text{Тогда } I_p^Л = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \Rightarrow I_p = \frac{\sum i_p p_0 q_0}{\sum p_0 q_0}. \quad (9.15)$$

### **Индексный анализ изменения взвешенной средней: индексы переменного и постоянного состава и структурных сдвигов**

**Индекс переменного состава** представляет собой соотношение средних величин какого-либо признака в отчетном и базисном периодах:

$$I_{\text{перем.}} = I_{\bar{x}} = \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_0} = \frac{\sum x_1 f_1}{\sum f_1} \Big/ \frac{\sum x_0 f_0}{\sum f_0}. \quad (9.16)$$

**Индекс постоянного (фиксированного) состава** устраняет влияние структурного фактора:

$$I_{\text{пост.}} = I_x = \frac{\sum x_1 f_1}{\sum f_1} \Big/ \frac{\sum x_0 f_1}{\sum f_1} \quad \text{или в агрегатной форме} \quad I_x = \frac{\sum x_1 f_1}{\sum x_0 f_1}. \quad (9.17)$$

**Индекс структурных сдвигов** характеризует влияние изменения структуры изучаемой совокупности на динамику среднего уровня признака:

$$I_{\text{стр.}} = I_w = \frac{\sum x_0 f_1}{\sum f_1} \Big/ \frac{\sum x_0 f_0}{\sum f_0}. \quad (9.18)$$

Индексы переменного, постоянного состава и структурных сдвигов увязываются в следующую систему:

$$I_{\text{перем.}} = I_{\text{пост.}} \cdot I_{\text{стр.}} \quad \text{или} \quad I_{\bar{x}} = I_x \cdot I_w. \quad (9.19)$$

### **Ряды индексов с постоянной и переменной базой сравнения (цепные и базисные)**

**Цепными индексами** называются индексы, которые имеют переменную базу сравнения.

**Базисные индексы** – это индексы, имеющие постоянную базу сравнения.

### Схема построения цепных индексов

Исходные уровни:  $q_1 \longleftarrow q_2 \longleftarrow q_3 \longleftarrow q_4$

Цепные индексы:  $i_q = \frac{q_2}{q_1}; \quad i_q = \frac{q_3}{q_2}; \quad i_q = \frac{q_4}{q_3}. \quad (9.20)$

### Схема построения базисных индексов

Исходные уровни:  $q_1 \longleftarrow q_2 \qquad q_3 \qquad q_4$

Базисные индексы:  $i_q = \frac{q_2}{q_1}; \quad i_q = \frac{q_3}{q_1}; \quad i_q = \frac{q_4}{q_1}. \quad (9.21)$

Между цепными и базисными индексами имеется взаимосвязь, которая заключается в следующем: **произведение всех цепных индексов равно общему базисному индексу:**

$$\frac{q_2}{q_1} \cdot \frac{q_3}{q_2} \cdot \frac{q_4}{q_3} = \frac{q_4}{q_1} \quad (9.22)$$

Отсюда следует: **отношение каждого последующего базисного индекса к предыдущему базисному дает промежуточный цепной индекс:**

$$\frac{q_4}{q_1} : \frac{q_3}{q_1} = \frac{q_4}{q_3}; \quad \frac{q_3}{q_1} : \frac{q_2}{q_1} = \frac{q_3}{q_2}. \quad (9.23)$$

Взаимосвязь в сводных (общих) индексах только при условии постоянства весов (или соизмерителей).

Возьмем ряд цепных индексов с постоянными весами ( $p_1$ ):

$$I_q = \frac{\sum q_2 p_1}{\sum q_1 p_1}; \quad I_q = \frac{\sum q_3 p_1}{\sum q_2 p_1}; \quad I_q = \frac{\sum q_4 p_1}{\sum q_3 p_1}. \quad (9.24)$$

Если перемножить эти индексы, то получим общий базисный индекс:

$$\frac{\sum q_2 p_1}{\sum q_1 p_1} \cdot \frac{\sum q_3 p_1}{\sum q_2 p_1} \cdot \frac{\sum q_4 p_1}{\sum q_3 p_1} = \frac{\sum q_4 p_1}{\sum q_1 p_1}. \quad (9.25)$$

Этому требованию не отвечают индексы с переменными весами:



$$I_q = \frac{\sum q_2 p_1}{\sum q_1 p_1}; \quad I_q = \frac{\sum q_3 p_2}{\sum q_2 p_2}; \quad I_q = \frac{\sum q_4 p_3}{\sum q_3 p_3}. \quad (9.26)$$

### Ряды индексов с постоянными и переменными весами

Два и более индексов с одинаковыми по содержанию и во времени весами образуют **ряд индексов с постоянными весами или соизмерителями**:

$$I_q = \frac{\sum q_2 p_1}{\sum q_1 p_1}; \quad I_q = \frac{\sum q_3 p_1}{\sum q_2 p_1}; \quad I_q = \frac{\sum q_4 p_1}{\sum q_3 p_1}. \quad (9.27)$$

Два и более индексов с одинаковыми по содержанию, но различными во времени весами или соизмерителями называются **рядом индексов с переменными весами или соизмерителями**:

$$I_q = \frac{\sum q_2 p_1}{\sum q_1 p_1}; \quad I_q = \frac{\sum q_3 p_2}{\sum q_2 p_2}; \quad I_q = \frac{\sum q_4 p_3}{\sum q_3 p_3}. \quad (9.28)$$

Многие связанные между собой экономические показатели образуют **индексные системы**. Выше были рассмотрены примеры построения двухфакторных систем взаимосвязанных индексов. Общие индексы могут быть разложены также на три, четыре и более факторных индекса, объясняющих изменение результативного признака за счет влияния каждого фактора в отдельности. Обозначим факторные признаки  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , тогда система взаимосвязанных индексов будет иметь вид:

$$I_{\text{общ.}} = \frac{\sum a_1 b_1 c_1}{\sum a_0 b_0 c_0} = \frac{\sum a_1 b_0 c_0}{\sum a_0 b_0 c_0} \cdot \frac{\sum a_1 b_1 c_0}{\sum a_1 b_0 c_0} \cdot \frac{\sum a_1 b_1 c_1}{\sum a_1 b_1 c_0}. \quad (9.29)$$

Аналогично строится система взаимосвязанных индексов при большем количестве факторов.

### 9.2. Контрольные вопросы к теме 9

1. Роль индексного метода анализа в экономических исследованиях.
2. В чем сущность индивидуальных и общих индексов, как они строятся?
3. В чем состоит различие агрегатных индексов Паше и Ласпейреса?

4. В каком случае рассчитываются средний арифметический и средний гармонический индексы?
5. Индексы с постоянными и переменными весами.
6. Индексный метод анализа динамики среднего уровня: индексы постоянного и переменного состава и структурных сдвигов.
7. Что представляет собой система взаимосвязанных индексов?

### *9.3. Контрольные задания к теме 9*

1. Производительность труда рабочих на предприятии увеличилась в отчетном периоде на 1,2%, а численность рабочих сократилась на 5%. Как изменился объем произведенной продукции на предприятии?
2. Затраты на одно изделие увеличились в отчетном году в среднем на 7,2%, а на все произведенные изделия – на 8%. Как изменилось количество изготовленных изделий?
3. Товарооборот предприятия увеличился в отчетном году по сравнению с прошлым годом в 1,2 раза при снижении цен за этот же период в среднем на 5%. Как изменился объем реализованной товарной массы в отчетном году?
4. Определить, на сколько процентов изменилась стоимость продукции в отчетном году по сравнению с прошлым годом, если известно, что количество произведенной продукции в натуральном выражении уменьшилось на 2,5%, а отпускные цены на продукцию увеличились на 5,2%.
5. Как изменятся общие затраты труда на производство продукции в отчетном периоде по сравнению с базисным при условии, что физический объем продукции увеличится на 14%, а трудоемкость единицы продукции снизится на 5%?
6. В таблице приведены цены на акции четырех компаний на конец января 2003 и 2004 гг. и средние дневные объемы сделок по каждой акции:

Компания	Цены акции, ф. ст.		Количество проданных акций	
	2003	2004	2003	2004
«Адамс Ко»	2,54	2,80	2000	2400
«Бартлет Лтд»	1,15	2,34	1200	3400
«Крейн энд Партнерз»	3,60	3,88	3000	2900
«Даунбрукс»	2,10	2,35	1800	2050

Вычислить:

- индивидуальные индексы цен и количества проданных акций;
- агрегатный индекс цен по формуле Пааше и величину экономии (перерасхода) от изменения цен;
- агрегатный индекс цен по формуле Ласпейреса и условную величину экономии (перерасхода) от изменения цен;

- индекс количества проданных акций по формуле Ласпейреса и величину экономии (перерасхода) от изменения объема продаж;
- общий индекс товарооборота.

Проверить правильность расчетов с помощью мультипликативной модели.

**7.** Имеются следующие данные о проданных товарах:

Товары	Количество, тыс. ед.		Цена, руб.	
	Базисный период	Текущий период	Базисный период	Текущий период
А	1000	750	15	20
Б	2000	1800	5	6

Определить:

- индивидуальные индексы объемов продаж в натуральном выражении, цен и товарооборота;
- агрегатные индексы физического объема;
- агрегатные индексы цен по формулам Пааше и Ласпейреса;
- общий индекс товарооборота;
- абсолютные приросты товарооборота за счет изменения объемов продаж, цен и за счет совместного действия обоих факторов.

Показать взаимосвязь между общими индексами и между абсолютными приростами товарооборота.

**8.** Имеются данные о реализации овощей и фруктов на рынках города:

Товар	Август		Сентябрь	
	количество, тонн	средняя цена за 1 кг	количество, тонн	средняя цена за 1 кг
Картофель	140	7,1	185	6,2
Яблоки	200	12,0	340	10,0
Помидоры	180	15,6	200	15,3

На основании приведенных данных определить общие индексы цен, физического объема и товарооборота. Покажите взаимосвязь индексов. Определите величину экономии (перерасхода) денежных средств покупателей от снижения (повышения) цен.

**9.** Динамика продажи трехкомнатных квартир характеризуется следующими данными:

Расположение квартиры	Цена одной квартиры, тыс. у.е		Количество проданных квартир, тыс.	
	Базисный период	Текущий период	Базисный период	Текущий период
Окраина	20	24	4,6	5,0
Район, прилегающий к центру	28	30	2,0	2,5
Центр	45	55	1,4	1,0

Определить сводный индекс цен на квартиры и количества проданных

квартир, а также сводный индекс стоимости проданных квартир. Результаты проанализируйте.

- 10.** Затраты на телерекламу отдельных категорий товара характеризуются следующими данными:

Категория товара	Себестоимость одного рекламного ролика, тыс. у.е.		Количество изготовленных роликов, ед.	
	Базисный период	Текущий период	Базисный период	Текущий период
Сладости	1,3	1,5	150	180
Напитки	1,0	1,2	140	135

Определить сводные индексы себестоимости и количества изготовленных роликов, общих затрат; абсолютный размер перерасхода (экономии) в общих затратах на телерекламу за счет изменения себестоимости.

- 11.** Динамика стоимости медицинского страхования в турагентстве характеризуется следующими данными:

Туристические центры	Стоимость страхового полиса, у.е.		Количество страховых полисов, тыс.	
	Базисный период	Текущий период	Базисный период	Текущий период
Стран Европы	15	25	36	48
Стран Америки	28	50	15	20

Определите сводные индексы стоимости страхового полиса, количества страховых полисов и страховой суммы.

- 12.** Имеются данные о реализации продукции:

Наименование товара	Июль		Август	
	Цена за 1 кг., руб.	Продано, т	Цена за 1 кг., руб.	Продано, т
Черешня	12	18	12	15
Персики	9	22	10	27
Виноград	8	20	7	24

Вычислить:

- индивидуальные индексы цен и физического объема;
- агрегатный индекс цен по формуле Пааше и величину экономии (перерасхода) от изменения цен;
- агрегатный индекс цен по формуле Ласпейреса и условную величину экономии (перерасхода) от изменения цен;
- индекс физического объема по формуле Ласпейреса и величину экономии (перерасхода) от изменения объема производства;
- общий индекс товарооборота.

Проверить правильность расчетов с помощью мультипликативной модели.

**13.** Вычислите индексы производительности труда по следующим данным:

Марка изделия	Базисный период			Отчетный период			Оптовая цена за 1 изделие, руб.
	кол-во изделий, шт.	отработано чел.-дней	трудоемкость 1 изделия	кол-во изделий, шт.	отработано чел.-дней	трудоемкость 1 изделия	
А	1150	919	0,8	1394	976	0,7	370
Б	970	1101	1,2	991	1090	1,1	560
В	828	745	0,9	814	760	0,9	406

**14.** Деятельность торговой фирмы характеризуется следующими данными:

Товар	Товарооборот, млн. руб.	
	ноябрь	декабрь
Чай зеленый	120	135
Чай черный	265	320
Кофе растворимый	180	195
Кофе натуральный (молотый, в зернах)	105	110

Оценить общее изменение физического объема реализации с учетом того, что в декабре фирма повысила все цены на 10%.

**15.** Исчислить индексы товарооборота, физического объема товарооборота, цен и абсолютный размер экономии (перерасхода) денежных средств в результате изменения цен на основании следующих данных:

- товарооборот отчетного периода – 560 тыс. руб.
- товарооборот базисного периода – 510 тыс. руб.
- товарооборот отчетного периода в базисных ценах – 590 тыс.руб.

**16.** Оптовая продажа некоторых продуктов питания на внутреннем рынке изменилась.

Продукт	Товарооборот в фактических ценах, тыс. ден. ед.		Товарооборот текущего периода в неизменных ценах, тыс. ден. ед.
	Базисный период	Текущий период	
Сахар	126	283	122
Масло подсолнечное	214	380	268

Определить индивидуальные индексы цен; сводные индексы товарооборота, цен и физического объема проданных продуктов питания.

**17.** Себестоимость и выпуск продукции на предприятии характеризуется следующими данными:

Вид продукции	Себестоимость продукции, руб.		Выпущено продукции в отчетном периоде, тыс. ед.
	Базисный период	Отчетный период	
А	30	34	4,8
Б	1500	1620	0,3
В	42	51	6,4

Вычислить индивидуальные индексы себестоимости продукции и общий индекс себестоимости продукции.

- 18.** Производительность труда в отчетном году по сравнению с прошлым годом возросла на 12% и составила 168 тыс. руб. на одного работающего. За этот же период численность работающих сократилась на 20 человек и составила 380 человек. Определить индексы численности работающих, физического объема продукции и абсолютный прирост физического объема продукции за счет роста производительности труда и изменения численности работающих.
- 19.** В течение некоторых периодов цены на непродовольственные товары не изменились, а на продовольственные возросли в среднем на 20%. Определите, на сколько процентов в среднем повысились цены на все товары вместе, если доля выручки от продажи продовольственных товаров в общей торговой выручке отчетного периода составила 60%.
- 20.** Определите, как должны были бы измениться цены на непродовольственные товары при среднем 15%-м увеличении цен на продовольственные товары, если общий средний рост цен на всю продукцию составил 12%.  
 Дайте два варианта ответа:  
 - когда объемы товарооборота по продовольственным и непродовольственным товарам в отчетном периоде равны;  
 - когда объем товарооборота по непродовольственным товарам составил 5/16 объема по продовольственным товарам.
- 21.** Имеются следующие данные о динамике потребительских цен в РФ за 1994 г.:

Группы товаров	Индекс потребительских цен (1994 г. по отн. к 1993 г.), в разгах	Структура потребительских расходов в 1993 г. (по данным бюджетных обследований), %
Продовольственные товары	3,1	49,4
Непродовольственные товары	2,9	43,1
Платные услуги	7,6	7,5

Рассчитать сводный индекс потребительских цен.

- 22.** Имеются следующие данные об изменении физического объема розничного товарооборота РФ в 2004 г. по сравнению с 2003 г.:

Группы товаров	Индекс физического объема товарооборота 2004г., в % к 2003 г.	Структура товарооборота в 2003 г., %
Продовольственные	90,5	42
Непродовольственные	94,8	58

Рассчитать общий индекс физического объема розничного товарооборота РФ в 2004 г. по сравнению с 2003 г.

**23.** Имеются данные об индексе потребительских цен (ИПЦ) в 2004 г.:

Товары и услуги	ИПЦ к предыдущему периоду (2003 г.), в разгах	Структура потребительских расходов в 2003 г., %
Продовольственные товары	2,0	49,8
Непродовольственные товары	2,4	?
Платные услуги	2,8	?
Сводный индекс	2,3	100,0

Определите в структуре потребительских расходов долю непродовольственных товаров и платных услуг.

**24.** Определить долю товаров народного потребления и долю платных услуг в общем объеме товарооборота в 2004 г. по РФ, имея следующие данные:

Товары и услуги	Изменение цен и тарифов (2004 г. в % к 2003 г.)	Объем товарооборота и услуг в 2003 г., % к итогу
Товары народного потребления	195	?
Платные услуги населению	170,6	?
Итого	192,7	100,0

**25.** В отчетном году было реализовано товара А на 300 млн. руб., товара Б – на 5 млрд. руб., товара В – на 412 млн. руб., товара Г – на 143 млн. руб. Исчислите общий индекс цен на все товары, если известно, что цены на товар А были снижены на 4%, на товар Б остались без изменения, а на товары В и Г повысились на 3 и 10% соответственно.

**26.** Имеются следующие производственные показатели по предприятию:

Вид продукции	Изменение объема выпуска продукции в III квартале по сравнению с I кварталом, %	Общие затраты рабочего времени на производство продукции в I квартале, тыс. чел.-час.
А	-8	16
Б	+2	10

Определить:

- на сколько процентов изменился выпуск продукции по двум видам;
- как изменилась трудоемкость продукции, если общие затраты времени на все производство в III квартале снизились на 10%;
- экономию рабочего времени в результате среднего снижения трудоемкости.

27. Имеются следующие данные о продаже товаров в торговом доме:

Товары	Продано товаров в фактических ценах, млн. руб.		Изменение цен в отчетном периоде по сравнению с базисным
	Базисный период	Отчетный период	
А	441,5	662,5	+40
Б	222,5	220,0	+20
В	736,0	748,5	Без изменения

Вычислить:

- индивидуальные и общие индексы цен;
- общий индекс физического объема товарной массы;
- общий индекс товарооборота в фактических ценах.

Выявите взаимосвязь индексов в относительном и абсолютном выражениях.

28. Имеются следующие данные о реализации кондитерских изделий объединением «Россия».

Продукт	Товарооборот, млн. у.е.		Изменение цены в октябре по сравнению с сентябрем, %
	сентябрь	октябрь	
Шоколад (плитки)	150	162	+2,8
Шоколадные конфеты в коробках	95	120	+4,6
Шоколадные конфеты развесные	67	73	-2,3

Рассчитать сводные индексы товарооборота, цен и физического объема реализации.

29. Имеются данные о производстве мебели на заказ фирмой «Командор»:

Изделие	Общие затраты на производство в 2004 г., млн. у.е.	Изменение себестоимости изделия в 2004 г. по сравнению с 2003 г., %
Кухня	1,9	+8,9
Шкаф-купе	2,4	+12,6
Детская	0,8	-2,1

Определить общее изменение себестоимости продукции в 2004 г. по сравнению с 2003 г. и обусловленный этим изменением размер экономии или дополнительных затрат фирмы.

30. Имеются данные о продаже товаров в розничной торговле области:

Группы товаров	Товарооборот, млн. руб.		Изменение количества проданных товаров, %
	Базисный период	Отчетный период	
Обувь	920	1000	+15
Трикотаж	840	860	+30

Для анализа объемов реализации определить общий индекс физического объема товарооборота, общий индекс цен и абсолютный размер экономии (перерасхода) денежных средств.



**31.** Имеются следующие данные о товарообороте овощного магазина:

Овощи	Продано в базисном периоде, тыс. руб.	Изменение количества проданных товаров в отчетном периоде по сравнению с базисным, %
Картофель	16000	+20
Морковь	7000	+10
Свекла	26000	-5
Лук	56000	Без изменения

Определить общий индекс физического объема товарооборота по всем наименованиям овощей. Как при этом изменился общий товарооборот в фактических ценах, если цены в среднем в отчетном периоде по сравнению с базисным увеличились на 5%?

**32.** Имеются следующие данные:

Товар	Реализация в базисном периоде, руб.	Изменение физического объема реализации в текущем периоде по сравнению с базисным, %
Мандарины	46000	-6,4
Грейпфруты	27000	-8,2
Апельсины	51000	+1,3

Рассчитайте средний арифметический индекс физического объема товарооборота.

**33.** Имеются следующие данные:

Товар	Товарооборот, тыс. руб.		Индивидуальные индексы	
	Базисного периода	Отчетного периода	Физического объема реализации	Цен
А	1,2	1,3	0,96	0,83
Б	2,3	2,2	1,01	0,97
В	2,7	2,9	1,12	1,03

Рассчитайте индексы физического объема реализации, цен и товарооборота.

**34.** Рассчитать средневзвешенные индексы цен и количества проданных акций на фондовых рынках, а также общий индекс стоимости по следующим данным:

Рынок	Объем торгов, млн. ден. ед.		Темпы прироста, %	
	Базисный период	Отчетный период	цен на акции	количества акций
Первичный	80	190	+90	+35
Вторичный	40	120	+150	+20

**35.** Имеются следующие данные о реализации молочных продуктов на городском рынке:

Продукт	Товарооборот, тыс. руб.		Изменение цены в декабре по сравнению с ноябрем, %
	Ноябрь	Декабрь	
Молоко	9,7	6,3	+2,1

Сметана	4,5	4,0	+3,5
Творог	12,9	11,5	+4,2

Рассчитайте сводные индексы цен, товарооборота и физического объема реализации.

**36.** Розничный товарооборот РФ в январе 2005 г. характеризуется следующими данными:

Товары	Удельный вес в общем объеме товарооборота, % к итогу	Индивидуальный индекс цен (по сравнению с декабрем 2004 г.), %
Продовольственные	47	123
Непродовольственные	53	112

Рассчитайте сводный индекс цен на потребительские товары.

**37.** Имеются данные о себестоимости продукции фирмы «Омега»:

Выпускаемые изделия	Произведено продукции, тыс. шт		Себестоимость единицы, руб.	
	Базисный период	Отчетный период	Базисный период	Отчетный период
А	400	300	2,8	2,9
Б	100	200	3,1	3,3
В	300	300	4,2	4,5

Вычислить:

- индивидуальные индексы себестоимости и физического объема;
- агрегатные индексы физического объема и себестоимости;
- общий индекс затрат на производство;
- индекс переменного состава, индекс фиксированного состава и индекс изменения структуры себестоимости продукции.

Сделайте выводы.

**38.** Имеются следующие данные о себестоимости продукции фирмы «Альтаир»:

Выпускаемые изделия	Произведено продукции, тыс.шт.		Себестоимость единицы, у.е.	
	Базисный период	Отчетный период	Базисный период	Отчетный период
А	300	400	15	14
Б	200	150	10	11
В	100	180	25	30

Вычислить:

- индивидуальные индексы себестоимости и физического объема;
- агрегатные индексы физического объема и себестоимости;
- общий индекс затрат на производство;
- индекс переменного состава, индекс фиксированного состава и индекс изменения структуры себестоимости продукции.

Сделайте выводы.

- 39.** Имеются данные об объемах производства и производительности труда на предприятии:

Вид продукции	Затраты времени на одно изделие, чел. -час.		Произведено, шт.	
	Январь	Февраль	Январь	Февраль
Изделие 1	1,0	0,9	458	450
Изделие 2	1,2	1,0	311	324
Изделие 3	0,9	0,8	765	752

Вычислить:

- индивидуальные индексы физического объема производства и трудоемкости;
- индекс производительности труда и физического объема продукции, взвешенного по трудоемкости;
- индекс переменного состава, индекс фиксированного состава, индекс изменения структуры затрат времени на производство продукции. Сделайте выводы.

- 40.** Имеются данные об объемах производства продукции отрасли:

Выпускаемые изделия	Выработано продукции, шт		Цена за единицу, руб.	
	Базисный период	Отчетный период	Базисный период	Отчетный период
А	600	500	18	16
Б	300	340	12	14
В	500	520	27	30

Вычислить:

- индивидуальные индексы цен и физического объема;
- агрегатный индекс цен по формуле Пааше и величину экономии (перерасхода) от изменения цен;
- индекс физического объема по формуле Ласпейреса и величину экономии (перерасхода) от изменения объема производства;
- общий индекс товарооборота;
- индекс переменного состава, индекс фиксированного состава, индекс изменения структуры цен.

Проверить правильность расчетов с помощью систем взаимосвязанных индексов.

- 41.** Средняя цена картофеля по двум рынкам в отчетном периоде по сравнению с базисным повысилась на 17%. В результате структурных сдвигов произошло повышение средней цены на 10%. Определить индекс цен постоянного состава
- 42.** Имеются данные о заработной плате работников по трем корпорациям:

Корпорации	Среднемесячная зарплата одного работника, у.е.		Среднесписочная численность работников, тыс. чел.	
	III квартал	IV квартал	III квартал	IV квартал
1	670	700	6,0	5,0
2	750	800	4,0	4,5
3	820	900	10,0	12,0

Определить индексы средней заработной платы переменного и постоянного состава, а также влияние на динамику средней заработной платы изменения структуры среднесписочной численности работников.

**43.** Имеются данные о заработной плате по двум предприятиям отрасли:

Предприятие	Заработная плата, руб.		Доля работников, %	
	Базисный период	Отчетный период	Базисный период	Отчетный период
1	1800	3200	43	40
2	4100	4800	57	60

Определить индексы заработной платы переменного, постоянного состава и структурных сдвигов.

**44.** Имеются данные о вкладах населения в Сбербанке:

Группы населения	Размер вклада, у.е.		Удельный вес вкладов в общем их числе	
	Базисный период	Отчетный период	Базисный период	Отчетный период
Городское	500	540	0,5	0,6
Сельское	420	480	0,5	0,4

Определить общие индексы среднего размера вклада для всего населения переменного, постоянного состава и структурных сдвигов.

**45.** Имеются данные о сделках на фондовой бирже, млн. руб.:

Вид ценных бумаг	Январь		Февраль	
	предложено	куплено	предложено	куплено
Акции предприятий	12,0	6,4	7,0	3,7
Акции банков	6,0	4,9	5,0	3,9
Государственные облигации	2,0	2,0	9,0	8,8

Определить индексы ликвидности переменного, постоянного состава и структурных сдвигов.

- 46.** Определить индексы среднего размера страхового тарифа при страховании автомобилей со сроком эксплуатации до 3 лет переменного, постоянного состава и структурных сдвигов:

Автомобиль	Страховой тариф, %		Страховая сумма, тыс. ден. ед.	
	Базисный период	Текущий период	Базисный период	Текущий период
Отечественный	2,5	3,0	520	750
Импортного производства	5,0	6,0	380	850

- 47.** Имеются следующие данные о вкладах в банках города:

Виды вкладов в банках города	Предшествующий период		Отчетный период	
	Число вкладов	Сумма вкладов, тыс. руб.	Число вкладов	Сумма вкладов, тыс. руб.
До востребования	80000	64800	90000	81900
Срочные	20000	42680	30000	45900

Определить индексы среднего вклада переменного, постоянного состава и структурных сдвигов.

- 48.** Имеются следующие данные:

Изделие	Себестоимость, руб.		Произведено, тыс. шт.	
	базисный период	отчетный период	базисный период	отчетный период
1	2,3	2,1	91,5	137,8
2	1,9	2,1	170,3	101,6

Рассчитать влияние структурных сдвигов на изменение средней себестоимости двух однотипных изделий, т.е. рассчитать индекс себестоимости переменного состава, индекс себестоимости фиксированного состава и индекс изменения структуры. Показать взаимосвязь между ними.

- 49.** Имеются данные о ценах реализации товара в регионах:

Регион	Базисный период		Отчетный период	
	Цена, руб.	Продано, шт.	Цена, руб.	Продано, шт.
1	12	10 000	13	8 000
2	17	20 000	19	9 000

Вычислите индекс цен переменного состава, фиксированного состава и индекс структурных сдвигов. Покажите взаимосвязь между индексами.

- 50.** Общие затраты на производство продукции завода составили: в 2002 г. – 7800 тыс. руб.; в 2003 г. – 8500, в 2004 г. – 9000 тыс. руб. Себестоимость продукции в 2003 г. снизилась в среднем по сравнению с 2002 г. на 3,0%, а в 2004 г. – на 1,2% по сравнению с 2003 г. Определить изменение физического объема продукции завода за эти годы.

- 51.** По предприятию объем выпущенной продукции во II квартале увеличился по сравнению с I кварталом на 10%, в III квартале по сравнению со II кварталом он снизился на 1,2%, а в IV квартале по сравнению с III кварталом объем выпущенной продукции увеличился на 12,5%. Определить, как изменился объем выпущенной продукции на предприятии в IV квартале по сравнению с I кварталом.
- 52.** Объем товарной продукции завода в действующих ценах составил: сентябрь – 12000 тыс. руб., октябрь – 14400 тыс. руб., ноябрь – 24000 тыс. руб. Отпускные цены на продукцию завода снижены в среднем в октябре по сравнению с сентябрем на 0,6%, а в ноябре повышены на 5% по сравнению с октябрём. Определить изменение физического объема продукции.
- 53.** По имеющимся в таблице данным о средних оптовых ценах на бензин по РФ во II квартале 1996 г. определите недостающие показатели:

Месяц	Цена за 1 т, тыс. руб.	Индивидуальные индексы цен	
		цепные	базисный
Апрель	?	-	100,0
Май	799	?	?
Июнь	?	101,9	102,8

- 54.** Имеются следующие данные о продаже стройматериалов по кварталам:

Вид продукции	Цена, у.е.			Объем продаж, тыс. ед.		
	I кв.	II кв.	III кв.	I кв.	II кв.	III кв.
А	42	44	42	800	820	700
Б	650	700	630	450	520	480

Вычислить:

- индивидуальные индексы цен: цепные и базисные;
- индивидуальные индексы объема продаж по каждому виду продукции: цепные и базисные;
- общие индексы цен: цепные и базисные;
- общие индексы физического объема продаж: цепные и базисные.

Покажите взаимосвязь между цепными и базисными индексами.

- 55.** Имеются следующие данные о продаже масла в магазинах по кварталам:

Масло	I квартал		II квартал		III квартал	
	Объем, тыс. ед.	Цена, руб.	Объем, тыс. ед.	Цена, руб.	Объем, тыс. ед.	Цена, руб.
В пачках	1,2	5,2	1,1	5,4	0,9	5,6
Развесное	0,4	22,0	0,41	22,0	0,38	22,4

Вычислить цепные и базисные, индивидуальные и общие индексы физического объема и цен. Показать взаимосвязь между ними.

- 56.** Имеются следующие данные о количестве произведенной продукции и ценах за единицу продукции по трем изделиям за четыре периода:

Изделия	I период		II период		III период		IV период	
	количество	цена	количество	цена	количество	цена	количество	цена
А	150	20	150	20	200	18	250	16
Б	280	50	300	48	360	48	410	40
В	200	40	250	36	280	30	320	30

Рассчитать базисные и цепные индексы объема продукции и цен с постоянными и переменными весами.

- 57.** В следующей таблице приведены розничные цены на автомобили в период с 1997 по 1999 гг., а также объемы их продаж в Великобритании за каждый год.

Модель	Розничные цены (без налогов)			Количество проданных штук (10 тыс.)		
	1997	1998	1999	1997	1998	1999
Алтро	6000	6080	6110	6,5	8,0	8,8
Бистро	7450	8090	8990	6,4	5,8	5,7
Кастро	10350	11950	12675	4,0	3,7	2,8

Рассчитать базисные и цепные индексы количества проданных автомобилей и розничных цен с постоянными и переменными весами.

- 58.** Имеются следующие данные о ценах на уголь и объемах его производства в РФ во II квартале 2005 г.:

Месяц	Цена за 1 т., тыс. руб.	Произведено, млн. т
Апрель	120	23,2
Май	121	20,2
Июнь	116	18,7

При условии 100%-ной реализации угля в каждом месяце определите цепные и базисные индивидуальные индексы цен, физического объема реализации и товарооборота. Проверьте взаимосвязь цепных и базисных индексов.

- 59.** Имеются следующие данные о ценах на фуражную пшеницу и объемах ее сбора в Ростовской области:

Год	Цена за 1 т, тыс. руб.	Собрано, млн. т
2002	1,8	10,7
2003	2,3	12,1
2004	2,6	11,9

При условии 100%-ной реализации пшеницы за каждый год определите цепные и базисные, индивидуальные индексы цен, физического объема реализации и товарооборота. Проверьте взаимосвязь цепных и базисных индексов.

- 60.** Имеются следующие данные о продаже растительного масла в крупном супермаркете:

Масло	Цена за литр, руб.			Объем реализации, тыс. литров		
	сентябрь	октябрь	ноябрь	сентябрь	октябрь	ноябрь
Подсолнечное	31,5	32,0	30,6	1,6	2,5	1,8
Оливковое	210,0	230,0	230,0	0,3	0,4	0,35

Вычислите цепные и базисные, индивидуальные индексы и общие индексы физического объема и цен. Покажите взаимосвязи между ними.

- 61.** Имеются следующие данные о себестоимости и объеме выпуска продукции Азовского консервного завода, выпускающего детское питание:

Продукция	Себестоимость единицы, руб.			Объем выпуска, тыс. ед.		
	июль	август	сентябрь	июль	август	сентябрь
Пюре фруктовое	6,8	6,5	6,0	150,0	190,0	250,0
Пюре овощное	5,2	5,0	4,9	120,0	180,0	210,0
Сок	8,3	8,0	7,5	250,0	320,0	390,0

Вычислите цепные и базисные, индивидуальные индексы и общие индексы физического объема и себестоимости. Покажите взаимосвязи между ними.

- 62.** Удельный вес затрат на производство продукции А в общем объеме затрат на производство двух видов продукции А и Б составил в текущем периоде 60,0%, а себестоимость производства изделия А в базисном и текущем периодах соответственно составила 80 и 75% себестоимости производства изделия Б. Определите общие индексы себестоимости и физического объема продукции, если себестоимость производства единицы изделия Б снизилась в текущем периоде по сравнению с базисным на 10,0%, а затраты на производство обоих видов продукции увеличилась на 6,0%



## Вместо заключения приведем шуточное по виду и все же серьезное стихотворение о статистике<sup>1</sup>

Статистика всем специалистам нужна:  
В анализе ведь – королева она!  
В пустые слова она учит не верить,  
А все, что возможно, учесть и измерить!

Познать пожелаешь ли тип иль закон –  
То в средней, как правило, выражен он;  
Еще подсчитай медиану и моду,  
Лишь после вещей свои мысли народу!

Варьирует все, что ты видишь вокруг:  
Без «сигмы» останешься, словно без рук!  
Коль сильно буренки варьируют в стаде –  
Не ставь их на комплекс беспривязный, дядя!

Чем всуе чесать то затылок, то темя,  
Измерь корреляцию в сложной системе,  
И детерминации коэффициент  
О силе всех связей расскажет в момент:

Узнаешь, кто – любит, кто – просто «залетка»,  
И связана ль в море с трескою селедка,  
В чем главные факторы фондоотдачи,  
И кто виноват, что рентабельность плачет!

Когда ж функциональную встретишь систему,  
На помощь зови «метод индексов» тему,  
Да помни, что индексы – это «цепочка»:  
Множь «папу» на «маму» – получишь «сыночка».

Спешి динамический выровнять ряд –  
Узнаешь, идешь ли вперед иль назад;  
И чтоб болтуны не водили за нос,  
Измерив тенденцию, сделай прогноз!

Запомни же твердо, себя зря не мучая:  
Наш мир есть гибрид от Закона и Случая!  
В грядущем у нас достоверностей нет:  
Будь мужествен, знай: стохастичен весь свет!

Кто понял статистику, тот не внакладе,  
Страшиться не нужно ему ничего:  
Запас страхово́й и в душе и на складе  
Спасет от случайности всякой его!

Но если статистику «сбагрил» формально,  
И радость и горе застигнут врасплох:  
Инфарктом закончишь путь жизни печальный,  
Хоть мир статистический вовсе не плох!

---

<sup>1</sup> Юзбашев М.М. Как я стал статистиком и почему не сожалею об этом// Вопросы статистики. 1999. №12. С. 72-73.

## Библиографический список

1. **Громыко Г. Л.** Общая теория статистики: Практикум.– М.: ИНФРА-М, 1999. – 139 с.
2. **Едророва В. Н., Едророва М. В.** Общая теория статистики: Учебник – М.: Юристъ, 2001. – 511 с.
3. **Елисеева И. И., Юзбашев М. М.** Общая теория статистики: Учебник/ Под ред. чл.-корр. РАН И. И. Елисеевой. – М.: Финансы и статистика, 1995. – 368 с.
4. **Ерина А. М., Пальян З. О.** Теория статистики: Практикум. – К.: О-во “Знання”, КОО, 2001. – 267 с.
5. **Ефимова М. Р., Ганченко О. И., Петрова Е. В.** Практикум по общей теории статистики: Учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2000. – 280 с.
6. **Ефимова М. Р., Петрова Е. В., Румянцев В. Н.** Общая теория статистики: Учебник. – М.: ИНФРА-М, 1996. – 416 с.
7. **Казаринова С. Е., Карасев О. И.** Теория статистики: Справочные материалы, практические и контрольные задания, тесты. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Экономический факультет МГУ, ТЕИС, 2001. – 66 с.
8. **Князевский В. С.** Задачи по общей теории статистики и их решение на ЭВМ: Учебное пособие / РИСХМ. – Ростов н/Д, 1986. – 81 с.
9. **Минашкин В.Г., Гусынин А. Б., Садовникова Н. А., Шмойлова Р.А.** Теория статистики: Учебно-практическое пособие для системы дистанционного образования / Под ред. к.э.н., доц. В. Г. Минашкина. – М.: МЭСИ, 1998. – 256 с.
10. **Ниворожкина Л. И., Морозова З. А.** Вариационные ряды и их характеристики. Введение в математическую статистику. Учебное пособие / РГЭА. – Ростов н/Д, 1997. – 65 с.
11. **Практикум по статистике:** Учеб. пособие для вузов / Под ред. В. М. Симчеры / ВЗФЭИ. – М.: ЗАО «Финстатинформ», 1999. – 259 с.
12. **Практикум по теории статистики:** Учеб. пособие. / Под ред. проф. Р.А. Шмойловой. – М.: Финансы и статистика, 1999. – 416 с.
13. **Сборник задач по общей теории статистики:** Учебное пособие / Под ред. к.э.н., доц. Серга Л. К. – М.: Информационно-издательский дом «Филинъ», 1999. – 360 с.
14. **Теория статистики:** Учебник / Под ред. проф. Г. Л. Громыко. – М.: ИНФРА-М, 2000. – 414 с.
15. **Теория статистики:** Учебник / Под ред. проф. Р. А. Шмойловой. – 3-е изд., перераб. – М.: Финансы и статистика, 1999. – 560 с.

16. **Теория статистики с основами теории вероятностей:** Учеб пособие для вузов / И. И. Елисеева, В. С. Князевский, Л. И. Ниворожкина, З. А. Морозова; Под ред. И. И. Елисеевой. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. – 446 с.
17. **Томас Р.** Количественные методы анализа хозяйственной деятельности / Пер. с англ. – М.: Издательство «Дело и сервис», 1999. – 432 с.
18. **Уотшем Т. Дж., Паррамоу К.** Количественные методы в финансах: Учеб. пособие для вузов / Пер. с англ. под ред. М. Р. Ефимовой. – М.: Финансы, ЮНИТИ, 1999. – 527 с.
19. **Яковлева Н. А., Сурова В. А., Останков А. Ф.** Теория статистики: Учебные задания – Ростов н/Д, РГЭУ «РИНХ», 2004. – 52 с.

## Приложение 1

Таблица функции  $\Phi_0(z) = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx$  (функция Лапласа)

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	0,00399	0,00798	0,01197	0,01595	0,01994	0,02392	0,02790	0,03188	0,03586
0,1	0,03983	0,04380	0,04776	0,05172	0,05567	0,05962	0,06356	0,06749	0,07142	0,07535
0,2	0,07926	0,08317	0,08706	0,09095	0,09483	0,09871	0,10257	0,10642	0,11026	0,11409
0,3	0,11791	0,12172	0,12552	0,12930	0,13307	0,13683	0,14058	0,14431	0,14803	0,15173
0,4	0,15542	0,15910	0,16276	0,16640	0,17003	0,17364	0,17724	0,18082	0,18439	0,18793
0,5	0,19146	0,19497	0,19847	0,20194	0,20540	0,20884	0,21226	0,21566	0,21904	0,22240
0,6	0,22575	0,22907	0,23237	0,23565	0,23891	0,24215	0,24537	0,24857	0,25175	0,25490
0,7	0,25804	0,26115	0,26424	0,26730	0,27035	0,27337	0,27637	0,27935	0,28230	0,28524
0,8	0,28814	0,29103	0,29389	0,29673	0,29955	0,30234	0,30511	0,30785	0,31057	0,31327
0,9	0,31594	0,31859	0,32121	0,32381	0,32639	0,32894	0,33147	0,33398	0,33646	0,33891
1,0	0,34134	0,34375	0,34614	0,34849	0,35083	0,35314	0,35543	0,35769	0,35993	0,36214
1,1	0,36433	0,36650	0,36864	0,37076	0,37286	0,37493	0,37698	0,37900	0,38100	0,38298
1,2	0,38493	0,38686	0,38877	0,39065	0,39251	0,39435	0,39617	0,39796	0,39973	0,40147
1,3	0,40320	0,40490	0,40658	0,40824	0,40988	0,41149	0,41308	0,41466	0,41621	0,41774
1,4	0,41924	0,42073	0,42220	0,42364	0,42507	0,42647	0,42785	0,42922	0,43056	0,43189
1,5	0,43319	0,43448	0,43574	0,43699	0,43822	0,43943	0,44062	0,44179	0,44295	0,44408
1,6	0,44520	0,44630	0,44738	0,44845	0,44950	0,45053	0,45154	0,45254	0,45352	0,45449
1,7	0,45543	0,45637	0,45728	0,45818	0,45907	0,45994	0,46080	0,46164	0,46246	0,46327
1,8	0,46407	0,46485	0,46562	0,46638	0,46712	0,46784	0,46856	0,46926	0,46995	0,47062
1,9	0,47128	0,47193	0,47257	0,47320	0,47381	0,47441	0,47500	0,47558	0,47615	0,47670
2,0	0,47725	0,47778	0,47831	0,47882	0,47932	0,47982	0,48030	0,48077	0,48124	0,48169
2,1	0,48214	0,48257	0,48300	0,48341	0,48382	0,48422	0,48461	0,48500	0,48537	0,48574
2,2	0,48610	0,48645	0,48679	0,48713	0,48745	0,48778	0,48809	0,48840	0,48870	0,48899
2,3	0,48928	0,48956	0,48983	0,49010	0,49036	0,49061	0,49086	0,49111	0,49134	0,49158
2,4	0,49180	0,49202	0,49224	0,49245	0,49266	0,49286	0,49305	0,49324	0,49343	0,49361
2,5	0,49379	0,49396	0,49413	0,49430	0,49446	0,49461	0,49477	0,49492	0,49506	0,49520
2,6	0,49534	0,49547	0,49560	0,49573	0,49585	0,49598	0,49609	0,49621	0,49632	0,49643
2,7	0,49653	0,49664	0,49674	0,49683	0,49693	0,49702	0,49711	0,49720	0,49728	0,49736
2,8	0,49744	0,49752	0,49760	0,49767	0,49774	0,49781	0,49788	0,49795	0,49801	0,49807
2,9	0,49813	0,49819	0,49825	0,49831	0,49836	0,49841	0,49846	0,49851	0,49856	0,49861
3,0	0,49865	0,49869	0,49874	0,49878	0,49882	0,49886	0,49889	0,49893	0,49896	0,49900
3,1	0,49903	0,49906	0,49910	0,49913	0,49916	0,49918	0,49921	0,49924	0,49926	0,49929
3,2	0,49931	0,49934	0,49936	0,49938	0,49940	0,49942	0,49944	0,49946	0,49948	0,49950
3,3	0,49952	0,49953	0,49955	0,49957	0,49958	0,49960	0,49961	0,49962	0,49964	0,49965
3,4	0,49966	0,49968	0,49969	0,49970	0,49971	0,49972	0,49973	0,49974	0,49975	0,49976
3,5	0,49977	0,49978	0,49978	0,49979	0,49980	0,49981	0,49981	0,49982	0,49983	0,49983
3,6	0,49984	0,49985	0,49985	0,49986	0,49986	0,49987	0,49987	0,49988	0,49988	0,49989
3,7	0,49989	0,49990	0,49990	0,49990	0,49991	0,49991	0,49992	0,49992	0,49992	0,49992
3,8	0,49993	0,49993	0,49993	0,49994	0,49994	0,49994	0,49994	0,49995	0,49995	0,49995
3,9	0,49995	0,49995	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49997	0,49997
4,0	0,499968									
4,5	0,499997									
5,0	0,4999997									

## Приложение 2

Критические точки распределения  $\chi^2$ 

Число степеней свободы k	Уровень значимости $\alpha$					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

## Приложение 3

## Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы k	Уровень значимости $\alpha$ (двусторонняя критическая область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,00	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,70
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,28	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,07	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
Число степеней свободы k	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Уровень значимости $\alpha$ (односторонняя критическая область)					

**Критические точки распределения Фишера-Снедекора**  
 ( $K_1$  - число степеней свободы большей дисперсии,  $K_2$  - число степеней свободы меньшей дисперсии)

Уровень значимости $\alpha = 0,01$												
$K_2 \backslash K_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4052	4999	5403	5625	5764	5889	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	98,49	99,01	90,17	99,25	99,33	99,30	99,34	99,36	99,36	99,40	99,41	99,42
3	34,12	38,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,96	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71
11	9,86	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,72	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,44	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,45

## Окончание приложения 4

Уровень значимости $\alpha = 0,05$												
$K_2 \backslash K_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,41	2,38



**Z-преобразование Фишера**

Значения величины  $z$  для значений  $r$

<b><math>r</math></b>	<b>0,00</b>	<b>0,01</b>	<b>0,02</b>	<b>0,03</b>	<b>0,04</b>	<b>0,05</b>	<b>0,06</b>	<b>0,07</b>	<b>0,08</b>	<b>0,09</b>
<b>0,0</b>	0,0000	0,0101	0,0200	0,0300	0,0400	0,0501	0,0601	0,0701	0,0802	0,0902
<b>0,1</b>	0,1003	0,1104	0,1206	0,1308	0,1409	0,1511	0,1614	0,1717	0,1820	0,1923
<b>0,2</b>	0,2027	0,2132	0,2237	0,2342	0,2448	0,2554	0,2661	0,2769	0,2877	0,2986
<b>0,3</b>	0,3095	0,3206	0,3317	0,3428	0,3541	0,3654	0,3769	0,3884	0,4001	0,4118
<b>0,4</b>	0,4236	0,4356	0,4477	0,4599	0,4722	0,4847	0,4973	0,5101	0,5230	0,5361
<b>0,5</b>	0,5493	0,5627	0,5763	0,5901	0,6042	0,6184	0,6328	0,6475	0,6625	0,6777
<b>0,6</b>	0,6931	0,7089	0,7250	0,7414	0,7582	0,7753	0,7928	0,8107	0,8291	0,8480
<b>0,7</b>	0,8673	0,8872	0,9076	0,9287	0,9505	0,9730	0,9962	1,0203	1,0454	1,0714
<b>0,8</b>	1,0986	1,1270	1,1568	1,1881	1,2212	1,2562	1,2933	1,3331	1,3758	1,4219
<b>0,9</b>	1,4722	1,5275	1,5890	1,6584	1,7380	1,8318	1,9459	2,0923	2,2976	2,6467
<b>0,99</b>	2,6466	2,6996	2,7587	2,8257	2,9031	2,9945	3,1063	3,2504	3,4534	3,8002



**ТЕОРИЯ СТАТИСТИКИ  
ПРАКТИКУМ**

**Ниворожкина Людмила Ивановна**

**Рудяга Анна Альбертовна**

**Федосова Оксана Николаевна**

Директор издательства РГЭУ «РИНХ»  
Редакторы:

Корректор  
Компьютерный набор и верстка

В. Е. Смейле  
Е.В. Барыбин  
О.Н. Шимко  
Е.В. Барыбин  
А. А. Рудяга

Изд. № 124/6935  
Печать офсетная  
Гарнитура «Таймс»  
Заказ №

Подписано к печати 28.04.05  
Формат 60\*84/16  
Тираж 100 экз.

Бумага офсетная  
Объем 11,6 уч.-изд. л.  
“С” 124

344002, г. Ростов-на-Дону, ул. Б. Садовая, 69, РГЭУ “РИНХ”. Издательство.

Отпечатано в ООО издательстве «Тана».  
г.Азов, ул. Чехова,23.