Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Ростовский государственный экономический университет (РИНХ)»

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

УЧЕБНИК

Ростов-на-Дону
2016 г.

УДК
ББК

Рецензенты:

д.ф.-м. н., профессор кафедры «Дифференциальные и интегральные уравнения» ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет» ***Боев Н.В.***

к.э.н., доцент кафедры «Фундаментальная и прикладная математика» ФГБОУ ВПО РГЭУ (РИНХ) ***Алексейчик Т.В.***

Составитель: ***Сахарова Людмила Викторовна***

Линейная алгебра для экономистов: учебник / Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Ростовский государственный экономический университет (РИНХ)» – Ростов-на-Дону: Издательско-полиграфический комплекс РГЭУ (РИНХ) , 2016 - 128 с.

Учебник содержит теоретический материал, а также более 500 задач по разделам «Матрицы. Системы уравнений» и «Векторы. Аналитическая геометрия» курса линейной алгебры, а также их экономическим приложениям. Материал сгруппирован в параграфы по темам. В начале каждого параграфа содержится подробное изложение теоретического материала и решение некоторых типовых задач. В конце параграфов представлены задачи различного уровня сложности, начиная от простейших до повышенного уровня сложности.

Сборник предназначен для проведения занятий по линейной алгебре и организации домашней самостоятельной работы студентов очной и заочной формы обучения направления подготовки «Менеджмент».

Печатается по решению кафедры фундаментальной и прикладной математики ФБГОУ ВПО «Ростовский государственный экономический университет (РИНХ)»

УДК

Предисловие

Настоящее пособие соответствует программе дисциплины «Линейная алгебра» для бакалавров дневного и заочного отделения подготовки направления «Менеджмент». Оно содержит обзор теории, а также задачи различных уровней сложности по разделам «Матрицы. Системы уравнений» и «Векторы. Аналитическая геометрия».

Раздел «Матрицы. Системы уравнений» разбит на четыре параграфа, а раздел «Векторы. Аналитическая геометрия» – на семь параграфов, состоящих из теоретического материала, содержащего ключевые определения и формулы, примеров решения задач, набора заданий для самостоятельного решения. Теоретический материал проиллюстрирован примерами применения изучаемых математических понятий в экономических расчетах. Наиболее существенные экономические приложения матриц (в т.ч. балансовая модель Леонтьева) вынесены в отдельный §4. Материал раздела «Векторы. Аналитическая геометрия» изложен с учетом его дальнейшего применения в разделе «Линейное программирование», а также таких дисциплинах, как «Методы оптимизации» и «Математические модели экономики».

Количество задач, содержащихся в пособии, позволяет варьировать материал, используемый преподавателем для проведения занятий, домашних заданий и подготовки к выполнению типового расчётного задания.

Нумерация задач самостоятельна в каждом параграфе. Символика и терминология соответствуют учебным пособиям, рекомендуемым программой курса дисциплины «Линейная алгебра».

Часть 1. МАТРИЦЫ, СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Элементы теории определителей

1.1. Определители второго порядка и системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными

Определение. Пусть дана квадратная таблица из четырёх чисел a_1, a_2, b_1, b_2:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Определителем второго порядка, соответствующим таблице (1) называется число, равное $a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$, и обозначаемое

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Таким образом,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1.$$

Числа a_1, a_2, b_1, b_2 называются *элементами* определителя. Говорят, что числа a_1, b_2 лежат на *главной диагонали определителя*, а числа a_2, b_1 – на *побочной.* Следовательно, определитель второго порядка равен разности между произведениями элементов, лежащих на главной и побочной диагоналях.

Пример:

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 15 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 — 2 \cdot 15 = 15 + 30 = 45.$$

Рассмотрим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}. \qquad (2)$$

Определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

составленный из коэффициентов при неизвестных, называется определителем системы (1). Введём так же определители

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

которые получаются из Δ заменой столбцов из коэффициентов при $\boldsymbol{x}$ и, соответственно, при $\boldsymbol{y}$ столбцом свободных членов. Имеет место следующая

Теорема: а) Если определитель Δ системы (2) отличен от нуля, то система имеет единственное решение, определяемое по формулам Крамера

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

б) Если $\Delta = 0$, и при этом хотя бы один из определителей Δ_x, Δ_y отличен от нуля, то система (2) не имеет решений.
в) Если $\Delta = 0$ и $\Delta_x = \Delta_y = 0$, то система имеет бесконечно много решений (в этом случае одно из уравнений системы есть следствие другого).
Пример.

Решить систему: $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 4x - 5y = 10 \end{cases}$.

Вычисляем определитель системы и определители Δ_x, Δ_y :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 2, \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 10 & -5 \end{vmatrix} = 10, \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 4.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 5, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 2.$$

Пример.

Фирма состоит из двух отделений, суммарная величина прибыли которых в минувшем году составила 12 млн. усл. ед. На этот год запланировано увеличение прибыли первого отделения на 70%, второго – на 40%. В результате суммарная прибыль должна вырасти в 1,5 раза. Какова величина прибыли каждого из отделений: а) в минувшем году; б) в текущем году?
Решение.

Пусть x и y - прибыли первого и второго отделений в минувшем году. тогда условие задачи можно записать в виде системы:

$$\begin{cases} x + y = 12, \\ 1{,}7x + 1{,}4y = 18. \end{cases}$$

Решив систему по методу Крамера, получим:

$x = 4, \ \ y = 8.$

Следовательно, а) прибыль в минувшем году первого отделения -4 млн. усл. ед., а второго – 8 млн. усл. ед.; б) прибыль в этом году первого отделения $1{,}7 \cdot 4 = 6{,}8$ млн. усл. ед., второго $1{,}4 \cdot 8 = 11{,}2$ млн. усл. ед.

1.2. Однородная система двух линейных уравнений с тремя неизвестными

Пусть дана система двух однородных уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases}. \qquad (1)$$

С тремя неизвестными $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$. Введём обозначения:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Если хотя бы один из определителей $\boldsymbol{\Delta_1}$, $\boldsymbol{\Delta_2}$, $\boldsymbol{\Delta_3}$ не равен нулю, то все решения системы (1) будут определяться по формулам

$$x = \Delta_1 t, \qquad y = -\Delta_2 t, \qquad z = \Delta_3 t, \qquad (2)$$

где t – произвольное число. Каждое отдельное решение получается при каком-то определённом значении t.

Для практики вычислений полезно знать, что определители $\boldsymbol{\Delta_1}$, $\boldsymbol{\Delta_2}$, $\boldsymbol{\Delta_3}$ получаются при помощи поочерёдного вычёркивания столбцов таблицы:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Если все три определителя Δ_1, Δ_2, Δ_3 равны нулю, то одно из уравнений системы (1) есть следствие другого и система сводится к одному уравнению.

Пример. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

Выписываем таблицу: $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

Поочередним вычёркиванием столбцов составляем определители $\boldsymbol{\Delta_1}$, $\boldsymbol{\Delta_2}$, $\boldsymbol{\Delta_3}$ и вычисляем их:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -4, \qquad \Delta_2 = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 14, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8\,.$$

Определим по формуле (2) решение системы:

$$x = -4t, \qquad y = 14t, \qquad z = 8t.$$

или

$$x = -2\tilde{t}, \qquad y = 7\tilde{t}, \qquad z = 4\tilde{t}.$$

1.3. Определители третьего порядка и система трёх линейных уравнений с тремя неизвестными.

Определение. Пусть дана квадратная таблица из девяти чисел $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Определителем третьего порядка, соответствующим таблице (1), называется число, обозначаемое символом

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

и определяемое равенством:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - b_1 a_2 c_3 - a_1 c_2 b_3. \quad (2)$$

Числа $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ называется *элементами определителя.* Элементы a_1, b_2, c_3 расположены на диагонали определителя, называемой *главной;* элементы a_3, b_2, c_1 составляют его *побочную* диагональ.

Для практики вычислений полезно знать, что первые три слагаемые в правой части равенства (2) представляют собой произведение элементов определителя, взятых по три так, как показано пунктиром на схеме $\boxed{+}$:

$$\overset{+}{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{c_1} \\ \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{b_2} & \boldsymbol{c_1} \\ \boldsymbol{a_3} & \boldsymbol{b_3} & \boldsymbol{c_1} \end{vmatrix}}, \qquad \overset{-}{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{c_1} \\ \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{b_2} & \boldsymbol{c_1} \\ \boldsymbol{a_3} & \boldsymbol{b_3} & \boldsymbol{c_1} \end{vmatrix}}$$

Чтобы получить следующие три числа равенства (2), нужно перемножить элементы определителя по три так, как показано пунктирами на схеме $\boxed{-}$, после чего у каждого из найденных произведений изменить знак.

Пример. Вычислить определитель третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -7 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}.$$

Пользуясь приведенными схемами, вычисляем входящие в формулу (2) произведения:

По схеме $\boxed{+}$	По схеме $\boxed{-}$
$1 \cdot (-1) \cdot (-2) = 2,$	$6 \cdot (-1) \cdot 3 = -18,$
$4 \cdot (-7) \cdot 3 = -84,$	$4 \cdot 2 \cdot (-2) = -16,$
$2 \cdot 5 \cdot 6 = 60.$	$(-7) \cdot 5 \cdot 1 = -35.$

Произведения, вычисленные по схеме $\boxed{-}$,входят в формулу (2) с обратным знаком. Поэтому

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -7 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 84 + 60 + 18 + 16 + 35 = 47.$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_1z = d_2 \\ a_3x + b_2y + c_1z = d_3 \end{cases} \qquad (3)$$

с неизвестными x, y, z. Введём обозначения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

Определитель Δ, составленный из коэффициентов при неизвестных системы (3), называется определителем данной системы.

Полезно заметить, что определители $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ получается из определителя Δ при помощи замены соответственного его первого, второго и, наконец, третьего столбца столбцом свободных членов данной системы.

Теорема. а) Если определитель системы $\Delta \neq 0$, то решение системы (3) может быть получено по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}. \qquad (4)$$

б) Если $\Delta = 0$, и при этом хотя бы один из определителей Δ_x, Δ_y, Δ_z отличен от нуля, то система (3) не имеет решений.

в) Если $\Delta = 0$ и $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, то система имеет бесконечно много решений.

Пример. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x - y + 4z = 5 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases}.$$

Вычисляем определитель системы Δ и определители Δ_x, Δ_y, Δ_z:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 10, \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 20, \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 15.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то данная система имеет единственное решение. Находим его по формулам (4):

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{20}{10} = \frac{1}{2}, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}.$$

1.4. Свойства определителей

Свойство 1. Величина определителя не изменится, если все его строки заменить столбцами, причём каждую строку заменить столбцом с тем же номером, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Свойство 2. Перестановка двух столбцов или двух строк определителя равносильна умножения его на -1. Например,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Свойство 3.Умножение всех элементов одного столбца или одной строки определителя любое число k равносильно умножению определителя на это число k. Например,

$$\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Свойство 4. Если все элементы некоторого столбца или некоторой строки равны нулю, то сам определитель равен нулю.

Свойство 5. Если к элементам некоторого столбца (или некоторой строки) прибавить соответствующие элементы другого столбца (или другой строки), умноженные на любой общий множитель, то величина определителя при этом не изменится. Например:

$$\begin{vmatrix} a_1 + k & b_1 & c_1 \\ a_2 + k & b_2 & c_2 \\ a_3 + k & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Свойство 6. Если определитель имеет два одинаковых столбца или две одинаковые строки, то он равен нулю.

Свойство 7. Если соответствующие элементы двух столбцов или двух строк определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

Свойство 8. Если каждый элемент некоторого столбца (или некоторой строки) определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей, один из которых в указанном столбце (или, соответственно, в строке) имеет первые из упомянутых слагаемых, а другой – вторые; элементы, стоящие на остальных местах, у всех трёх определителей одни и те же.

Например,

$$\begin{vmatrix} a_1^{I} + a_1^{II} & b_1 & c_1 \\ a_2^{I} + a_2^{II} & b_2 & c_2 \\ a_3^{I} + a_3^{II} & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^{I} & b_1 & c_1 \\ a_2^{I} & b_2 & c_2 \\ a_3^{I} & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1^{II} & b_1 & c_1 \\ a_2^{II} & b_2 & c_2 \\ a_3^{II} & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Дальнейшие свойства определителей связаны с понятием алгебраического дополнения и минора.

Определение. *Минором* некоторого элемента называется определитель, получаемый из данного путём вычёркивания строки и столбца, на пересечении которых расположен данный элемент.

Определение. *Алгебраическое дополнение* любого элемента определителя равняется минору этого элемента, взятому со своим знаком, если сумма номеров строки и столбца, на пересечении которых расположен элемент, есть число чётное, и с обратным знаком, если это число нечётное. Алгебраическое дополнение элемента мы будем обозначать большой буквой того же наименования и тем же номером, что и буква, которой обозначен сам элемент.

Например, алгебраическое дополнение элемента a_1 определителя

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

равно:

$$A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

(элемент a_1 находится в первой строке, первом столбце, 1+1=2 – чётное число, поэтому алгебраическое дополнение равно минору, взятому со своим знаком). Алгебраическое дополнение элемента $\boldsymbol{b_1}$ того же определителя равно

$$B_1 = -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

здесь расматриваемый элемент находится в первой строке, втором столбце; 1+2=3 – нечётное число, поэтому перед минором становится знак “–”.

Свойство 10. Определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ равен сумме произведений элементов какого-либо столбца (или строки) на их алгебраические дополнения. Иначе говоря, имеют место следующие равенства, соответствующие разложению определителя по строке либо столбцу:

$$\Delta = a_1 \cdot A_1 + a_2 \cdot A_2 + a_3 \cdot A_3, \qquad \Delta = a_1 \cdot A_1 + b_1 \cdot B_1 + c_1 \cdot C_1.$$

Свойство 10. Сумма произведений элементов какого-либо столбца (или строки) на алгебраические дополнения элементов другого столбца (или строки) равна нулю. Например,

$$b_1 \cdot A_1 + b_2 \cdot A_2 + b_3 \cdot A_3 = 0.$$

Пример 1. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 21 & -18 & 24 \\ 7 & 12 & 16 \\ 0 & 6 & 32 \end{vmatrix}$$

с использованием свойства 3.

Поскольку элементы первого столбца кратны 7, второго столбца 6, а третьего 8, то в соответствии со свойством 3 определитель Δ можно упростить:

$$\Delta = 7 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 336 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

В полученном определителе элементы первой строки кратны 3, поэтому

$$\Delta = 336\cdot 3\cdot\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 4\end{vmatrix} = 1008\cdot(8+0+1-0+4-2) = 1008\cdot 11 ==$$

$11088.$

Пример 2. Доказать справедливость равенства:

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_1+\alpha a_2 & b_1+\alpha b_2 & c_1+\alpha c_2\end{vmatrix} = 0\ .$$

В соответствии со свойством 8 определитель, стоящий в левой части равенства можно представить в виде суммы двух определителей:

$$\Delta = \begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_1+\alpha a_2 & b_1+\alpha b_2 & c_1+\alpha c_2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_1 & b_1 & c_1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ \alpha a_2 & \alpha a_2 & \alpha a_2\end{vmatrix}\ .$$

В первом из определителей, стоящих после знака равенства, первая и третья строки совпадают, поэтому он равен нулю в соответствие со свойством 6; во втором определителе вторая и третья строки пропорциональны, а значит, по свойству 7 он так же равен нулю. Соответственно, $\Delta = 0$.

Пример 3. Вычислить определитель Δ по свойству 10, разложив его по строке и по столбцу,

$$\Delta = \begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 5\\ -2 & 1 & 4\end{vmatrix}.$$

Разложим определитель по первой строке:

$$\Delta = 1\cdot\begin{vmatrix}0 & 5\\ 1 & 4\end{vmatrix} + (-1)\cdot\left(-\begin{vmatrix}3 & 5\\ -2 & 4\end{vmatrix}\right) + 2\cdot\begin{vmatrix}3 & 0\\ -2 & 1\end{vmatrix} = 1\cdot(0-5) +$$
$$+(12+10) + 2(3-0) = -5 + 22 + 6 = 23.$$

Теперь разложим его по второму столбцу:

$$\Delta = (-1)\cdot\left(-\begin{vmatrix}3 & 5\\ -2 & 4\end{vmatrix}\right) + 0\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & 4\end{vmatrix} + 1\cdot\left(-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{vmatrix}\right) = 1\cdot(12+10) +$$
$$+0 - 1\cdot(5-6) = 22 + 1 = 23\ .$$

Замечание. Как следует из примера 3, вычисления при разложении определителя по строке (по столбцу) существенно упрощаются, если в строке (столбце) имеются нули.

Пример 4.

Вычислить определитель четвёртого порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Разложим определители Δ по первому столбцу, содержащему ноль:

$$\Delta = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - (-3) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \Delta_1 - 0 \cdot \Delta_2 + 2 \cdot \Delta_3 + (-3) \cdot \Delta_4 \ ,$$

$$\Delta_1 = 6 + 0 + 2 - 0 + 2 + 3 = 13,$$

$$\Delta_3 = 2 + 0 + 3 - 0 - 12 + 2 = -5,$$

$$\Delta_4 = -1 + 4 + 3 + 1 + 6 + 2 = 15$$

(определитель Δ_2 не вычисляем, так как он умножается на ноль)

$$\Delta = 13 + 2 \cdot (-5) + 3 \cdot 15 = 48 \, .$$

Теперь вычисляем тот же определитель с использованием свойства 5. Прибавим к третьей строке определителя первую строку, умноженную на (-2)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

В результате проведённого преобразования в первом столбце, третьей строке получен ноль. Теперь получим ноль в первом столбце, четвёртой строке, умножив первую строку на 3 и прибавив её к четвёртой строке; попутно вынесем сомножитель из третьей строке, кратной 3.

$$\Delta = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 7 & 5 \end{vmatrix} \qquad .$$

Теперь размножим определитель по первому столбцу; ясно, что при этом потребуется вычислить всего один определитель третьего порядка, поскольку остальные умножаются на ноль:

$$\Delta = 3\left(1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 7 & 5 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -5 \\ -3 & 7 & 5 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -3 & 7 & 5 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= 3 \cdot \left(\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 7 & 5 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 \right) = 3 \cdot (-15 - 3 + 14 - 6 + 5 + 21) = 48.$$

Задачи для решения

1.1. Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{5} \\ 2+\sqrt{5} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} a^2-ab+b^2 & a-b \\ a^2+ab+b^2 & a+b \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} a-b & a \\ a+c & a+b \end{vmatrix}$; 7) $\begin{vmatrix} a+1 & b-c \\ a^2+a & ab-ac \end{vmatrix}$;

8) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$; 9) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$; 10) $\begin{vmatrix} \operatorname{tg}\alpha & 1 \\ -1 & \operatorname{tg}\alpha \end{vmatrix}$.

1.2. Решить уравнения:

1) $\begin{vmatrix} 2 & x-4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3x & x+22 \end{vmatrix} = 0$; 3) $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0$;

4) $\begin{vmatrix} 3x & -1 \\ x & 2x-3 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}$; 5) $\begin{vmatrix} 4\sin x & 1 \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = 0$; 6) $\begin{vmatrix} \cos 8x & -\sin 5x \\ \sin 8x & \cos 5x \end{vmatrix}$.

1.3. Решить неравенство:

1) $\begin{vmatrix} 3x-3 & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix} > 0$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & x+4 \\ 2 & x \end{vmatrix} < 0$; 3) $\begin{vmatrix} 2x-2 & 1 \\ 7x & 2 \end{vmatrix} > 5$.

1.4. Найти все решения каждой из следующих систем уравнений:

1) $\begin{cases} 2x+5y=1 \\ 3x+7y=2 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 2x-3y=4 \\ 4x-5y=10 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} 5x-7y=1 \\ x-2y=0 \end{cases}$;

4) $\begin{cases} 4x+7y+13=0 \\ 5x+8y+14=0 \end{cases}$; 5) $\begin{cases} 4x+6y=2 \\ 6x+9y=3 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} 2x-2y=2 \\ 6x-4y=3 \end{cases}$.

1.5. Определить, при каких значениях a и b система уравнений

$$\begin{cases} 3x-ay=1 \\ 6x+4y=b \end{cases};$$

1) имеет единственное решение;

2) не имеет решений;

3)имеет бесконечное множество решений.

1.6. Определить,при каком значении a система однородных уравнений

$$\begin{cases} 13x + 2y = 0 \\ 5x + ay = 0 \end{cases};$$

имеет только нулевое решение.

1.7. Найти все решения каждой из однородных систем уравнений:

$$1)\begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ 6x - 4y + 3z = 0 \end{cases}; \quad 2)\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 2x - 9y + 3z = 0 \end{cases}; \quad 3)\begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases};$$

$$4)\begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}; \quad 5)\begin{cases} 2x - y - 2z = 0 \\ x - 5y + 2z = 0 \end{cases}; \quad 6)\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3x - 5y + 2z = 0 \end{cases}.$$

1.8. Вычислить определители 3-го порядка:

$$11)\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}; \quad 2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}; \quad 3)\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix};$$

$$4)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}; \quad 5)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}; \quad 6)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix};$$

$$7)\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}; \quad 8)\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}; \quad 9)\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix};$$

$$10)\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}; \quad 11)\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}; \quad 12)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

1.9. Решить уравнение:

$$1)\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0; \quad 2)\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x + 10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad 3)\begin{vmatrix} x & -1 & 3 \\ -4 & x & 5 \\ 6 & -3 & 7 \end{vmatrix}.$$

1.10. Решить неравенства:

$$1)\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 1; \quad 2)\begin{vmatrix} 2 & x + 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix}.$$

1.11. При каком условии справедливо равенство:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos\rho \\ \cos\beta & \cos\rho & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos\rho \\ \cos\beta & \cos\rho & 1 \end{vmatrix}.$$

1.12. Установить, что системы уравнений имеют единственное решение и найти его:

$$1)\begin{cases} 2x+3y+5z=10 \\ 3x+7y+4z=3 \\ x+2y+2z=3 \end{cases}; \qquad 2)\begin{cases} 5x-6y+4z=3 \\ 3x-3y+2z=2; \\ 4x-5y+2z=1 \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} 4x-3y+2z+4=0 \\ 6x-2y+3z+1=0; \\ 5x-3y+2z+3=0 \end{cases} \qquad 4)\begin{cases} 5x+2y+3z+2=0 \\ 2x-2y+5z=0 \\ 3x+4y+2z+10=0 \end{cases};$$

$$5)\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 3x-5y+3z=1; \\ 2x+7y-z=8 \end{cases} \qquad 6)\begin{cases} 2x+y=5 \\ x+3z=16; \\ 5y-z=10 \end{cases}$$

$$7)\begin{cases} 2x-4y+9z=28 \\ 7x+3y-6z=-1; \\ 7x+9y-9z=5 \end{cases} \qquad 8)\begin{cases} 7x+2y+3z=15 \\ 5x-3y+2z=15 \\ 10x-11y+5z=36 \end{cases};$$

1.13. Найти все решения системы:

$$1)\begin{cases} x+2y-4z=1 \\ 2x+y-5z=-1; \\ x-y-z=-2 \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} 2x-y+z=-2 \\ x+2y+3z=-1; \\ x-3y-2z=3 \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} 3x-y+2z=5 \\ 2x-y-z=2 \\ 4x-2y-2z=-3 \end{cases}; \qquad 4)\begin{cases} 4x+3y+2z=1 \\ x+3y+5z=1 \\ 3x+6y+9z=2 \end{cases}.$$

1.14. Определить, при каких значениях a и b система уравнений:

$$\begin{cases} 3x-2y+z=b \\ 5x-8y+9z=3 \\ 2x+y+az=-1 \end{cases}$$

1) имеет единственное решение;

2) не имеет решений;

3) имеет бесконечное множество решений.

1. 15. Доказать справедливость равенства, не раскрывая определителей:

$$1)\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 11 \end{vmatrix};$$

$$2)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{vmatrix};$$

$$3)\begin{vmatrix} \beta b_1 + \rho c_1 & b_1 & c_1 \\ \beta b_2 + \rho c_2 & b_2 & c_2 \\ \beta b_3 + \rho c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0; \qquad 4)\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \cos 2\beta \\ \sin^2\rho & \cos^2\rho & \cos 2\rho \end{vmatrix} = 0.$$

1.16. Вычислить определитель разложением по строке либо по столбцу:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}.$$

1.17. Вычислить определители четвёртого порядка:

$$1)\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 3 & 5 \end{vmatrix}; \qquad 2)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix};$$

$$3)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} \qquad 4)\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix};$$

$$5)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}; \qquad 6)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix};$$

$$7)\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & 9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}; \qquad 8)\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix};$$

$$9)\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}; \qquad 10)\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix};$$

11) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$; 12) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$;

13) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$; 14) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}$;

15) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$; 16) $\begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix}$;

17) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; 18) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$;

19) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$; 20) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$.

Ответы:

1.1. 1) 8; 2) 10; 3) 0; 4) 0;

5) $2b^3$; 6) $-(b^2 + ac)$; 7) 0;

8) -1; 9) 1; 10) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$.

1.2. 1) x=12; 2) x=2; 3) x_1=-4, x_2=-4;

4) $x_1 = -\frac{1}{6}$, $x_2 = \frac{3}{2}$; 5) $x = (1)^n \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$; 6) $x = \frac{\pi(2n+1)}{6}$, $n \in z$.

1.3. 1) $x > 3$; 2) $x > -10$; 3) $x < -3$.

1.4. 1) $x = 3$, $y = -1$; 2) $x = 5$, $y = 2$; 3) $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{1}{3}$;

4) $x = 2$, $y = -3$; 5) бесконечно много решений; 6) нет решений.

1.5. 1) $a \neq -2$; 2) $a = -2, b \neq 2$; 3) $a = -2, b = 2$.

1.6. $a = 10/13$.

1.7. 1) $x = 2t,\ y = 3t,\ z = 0$; 2) $x = 0,\ y = t,\ z = 3t$; 3) $x = 0,\ y = t, z = 2t$;

$4) x = 2t, y = 5t, z = 4t;$ $5) x = 4t, y = 2t, z = 3t;$ $6) x = t, y = 5t, z = 11t.$

1.8. 1) -12; 2) 29; 3) 87; 4) 0; 5) -29; 6) 40;
7) -3; 8)100; 9) -5; 10) 0; 11) 1; 12) 1.

1.9. 1) $x = -3$; 2) $x_1 = -10$, $x_2 = 2$; 3) $x_1 = 2, x_2 = -\frac{11}{7}$.

1.10. 1) $x > \frac{7}{2}$; 2) $-6 < x < -4$.

1.11. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$

1.12. 1) $x = 3,\ y = -2,\ z = 2$; 2) $x = y = z = 1$;
3) $x = 1,\ y = 2,\ z = -1$; 4) $x = 2,\ y = -3,\ z = -2$;
5) $x = y = z = 1$; 6) $x = 1,\ y = 3,\ z = 1$;
7) $x = 2,\ y = 3,\ z = 4$; 8) $x = 2,\ y - 1,\ z = 1$.

1.13. 1) Бесконечное множество решений;
2) нет решений; 3) нет решений;
4) бесконечное множество решений.

1.14. 1)$a \neq -3$; 2)$a = -3, b \neq 1/3$; 3)$a = -3, b = 1/3$.

1.16. 0.

1.17. 1) 30; 2) -20; 3) 0; 4) 48; 5) -8; 6) -3
7) -9; 8)18; 9)18; 10) 4; 11) 90; 12) 27
13) 17 14) -6; 15) -10; 16) 100; 17) 160; 18) 48;
19) 12; 20) 900.

§2. Матрицы и действия над ними

2.1. Основные понятия

Определение. *Матрицей* называется прямоугольная таблица, составленная из чисел или каких-либо других объектов, например:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \\ 5 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}; \quad (1;\ 0;\ -3;\ 4); \quad \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\mathrm{tg}\alpha & \mathrm{ctg}\alpha \end{pmatrix}.$$

и пр.

Круглые скобки по бокам – знак матрицы. Важнейшее отличие матрицы от определения в том, что определитель считается равным некоторому числу, тогда каквaaaa матрица не приравнивается какому-то более простому объекту. Ее можно для краткости обозначить одной буквой, например, А, В, С и т.д. В общем виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

Т.е. элементы матрицы снабжаются двумя индексами, из которых первый указывается номер строки, а второй – номер столбца. Иногда кратко пишут $A=(a_{ij})_{mn}$, т.е. i меняется от 1 до m, а j-от 1 до n.

Каждая матрица имеет определенные *размеры*, т.е. количество строк и количество столбцов. Рассмотренные выше матрицы имеют размер: 3х4; 3х2; 1х4; 2х2; mxn.

Если число строк равно числу столбцов, то матрица называется *квадратной*, тогда говорят о ее *порядке.* Например, матрица $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ – второго порядка.

Квадратная матрица первого порядка отождествляется со своими единственным элементом. Например, (3)=3 – число.

Матрица, у которой всего 1 столбец, называется *столбцевой*, а матрица, у которой всего одна строка – *строчной*. Например, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ – столбцевая матрица, а (1; -2; 3) – строчная.

Матрица, у которой все элементы равны нулю, называются *нулевой*. Квадратная матрица, у которой равны нулю все элементы кроме, возможно, стоящих на главной диагонали называется *диагональной.* Если на диагонали стоят элементы а,в,…,k, то матрица обозначается diag (a,b,…,k).

Диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны единице, называется *единичной* и обозначается буквой Е. Например, единичные матрицы 3-го и 2-го порядка, соответственно, имеют вид:

$$\mathrm{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Транспонировать матрицу – значит, заменить ее строки столбцами, причем каждую строку заменить на столбец с тем же самым номером. Транспонированную матрицу k матрице А будем обозначать A^T.

Например, если $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, то $\mathrm{A^T} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Ясно, что $(A^T)^T=A$.

Матрица, совпадающая со своей транспонированной, называется *симметрической*. Такой может быть только квадратная матрица. Условие в симметричности можно записать виде $a_{ij}=a_{ji}$.

Например, матрица $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ – симметрическая,

так как $\mathrm{A^T} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \mathrm{A}$

Квадратная матрица А имеет *определитель*, который обозначает det A, например,

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 1 + 1 = 6.$$

Прямоугольная неквадратная матрица определителя не имеет, так как определители бывают только квадратные. Из свойств определителей 1.4 вытекает, что

$\det E=1; \quad \det A^T=\det A.$

2.1. Линейные операции над матрицами

I. Матрицы одинакового размера можно складывать; при этом, если

$A=(a_{ij})_{mn}$, $B=(b_{ij})_{mn}$, то $A+B=C=(a_{ij}+b_{ij})_{mn}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}.$$

Пример.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

II. Любую матрицу можно умножить на любое число; при этом, если $A=(a_{ij})_{mn}$, k – число, то $k\,A=(ka_{ij})_{mn}$,

$$k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{23} & ka_{23} \end{pmatrix}$$

Пример

$$3\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 & -3 \\ 9 & 3 & -6 & 12 \end{pmatrix}$$

Сложение матриц и умножение матриц на число относятся линейным операциям над матрицами, которые обладают следующими свойствами (m, n - числа):

1) A+B=B+A; 2) (A+B)+C=A+(B+C);

3) $(m\cdot n)A=m(nA)$; 4) (m+n)A= mA+nA;

5) m(A+B)=mA+mB; 6) $(A+B)^T=A^T+B^T$;

7) $(mA)^T=mA^T$; 8) $\det(A+B)\neq\det A+\det b$;

9)$\det(mA)=m^k\cdot\det A$, где k – порядок квадратной матрицы A.

Пример.

В некоторой отрасли 4 завода выпускают 3 вида продукции. Матрица $A_{4\times3}$ задаёт объёмы продукции на каждом заводе в первом квартале, матрица $B_{4\times3}$ - соответственно во втором; (a_{ij}, $в_{ij}$) – объёмы продукции j –го типа на i –м заводе в 1-м и 2-м кварталах соответственно:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти:

а) объёмы продукции; б) прирост объёмов производства во втором квартале по сравнению с первым по видам продукции и заводам; в) стоимостное выражение выпущенной продукции за полгода (в долларах), если λ – курс доллара по отношению к рублю.

Решение:

а) Объёмы продукции за полугодие определяются суммой матриц, т.е.

$$C=A+B=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 3 & 6 & 3 \\ 8 & 4 & 7 \\ 7 & 3 & 7 \end{pmatrix},$$

где c_{ij} – объём продукции j-го типа, произведённый за полугодие i-м заводом.
б) Прирост во втором квартале по сравнению с первым определяется разностью матриц, т.е.

$$Д=B-A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отрицательные элементы показывают, что на данном заводе объём производства уменьшился, положительные – увеличился, нулевые – не изменился.
в) Произведение $\lambda C= \lambda(A+B)$ даёт выражение стоимости объёмов производства за квартал в долларах по каждому заводу и каждому предприятию.

2.2.Умножение матриц

Умножение матриц друг на друга возможно лишь в том случае, когда число столбцов первого множителя равно числу строк второго множителя. В противном случае умножение невозможно.

При умножении матрицы A размера mxn на матрицу B размера nxp получаем матрицу C размера mxp. Элемент c_{ij} этой матрицы равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбцов матрицы B, т.е.

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Пример

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) & 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 & 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 3(-1) & 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Две квадратные матрицы одинакового порядка всегда можно перемножить, что даст квадратную матрицу того же порядка.

В частности, квадратную матрицу можно возвысить в квадрат, т.е. умножить саму на себя, тогда как прямоугольную неквадратную матрицу возвести в квадрат нельзя.

Пример. Найти f(A), если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 + 2x - 3.$

Под f(A) подразумевается матрица вида $f(A) = A^2 + 2A - 3E$, где E – единичная матрица того же порядка, что и матрица A.

Тогда

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$2A - 3E = 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix},$$

$$f(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Умножение матриц обладает следующими свойствами:

1) матрицы не перестановочны друг с другом, т.е. $A \cdot B \neq B \cdot A$;

Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

2) если k – число, то $(kA) \cdot B = A \cdot (kB) = k \cdot (AB)$;

3) $(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$; 4) $C \cdot (A+B) = C \cdot A + C \cdot B$;

5) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$; 6) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$;

7) $(AB)^T = B^T A^T$.

Матрицы A и B называются перестановочными (коммутирующими), если AB=BA.

Пример.

Найти все матрицы, перестановочные с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Будем искать матрицу B, коммутирующую с матрицей A в виде

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a - c & 3b - d \\ 2a & 2b \end{pmatrix};$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a + 2b & -a \\ 3c + 2d & -c \end{pmatrix}.$$

Поскольку AB=BA, то

$$\begin{pmatrix} 3a - c & 3b - d \\ 2a & 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a + 2b & -a \\ 3c + 2d & -c \end{pmatrix}.$$

Для определения неизвестных a, b, c, d получаем систему из 4 уравнений:

$$\begin{cases} 3a - c = 3a + 2b \\ 3b - d = -a \\ 2a = 3c + 2d \\ 2b = -c \end{cases}.$$

Очевидно, что 1-е уравнение системы совпадает с 4-м уравнением и может быть отброшено. Если из 4-го уравнения системы выразить с через b и подставить в 3-е уравнение, получим:

$2a= -6b+2d,$

что после сокращения на 2 дает уравнение:

$a = -3b+в,$

совпадающее, с точностью до знака, со 2-м уравнением. Следовательно, система сводится к виду

$$\begin{cases} 3b - d = -a \\ 2b = -c \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a = d - 3b \\ c = -2b \end{cases},$$

где b и d принимают любые значения, а значит, любая матрица, коммутирующая с А может быть записана в виде

$$B = \begin{pmatrix} d - 3b & b \\ -2b & d \end{pmatrix}.$$

Пример.

Завод производит двигатели, которые могут либо сразу потребовать дополнительной регулировки (в 40% случаев), либо сразу могут быть использованы (в 60% случаев). Как показывают статистические исследования, те двигатели, которые изначально требовали регулировки, потребуют дополнительной регулировки через месяц в 65% случаев, а в 35% случаев через месяц будут работать хорошо. Те же двигатели, которые не требовали первоначальной регулировки, потребуют её через месяц в 20% случаев и продолжат хорошо работать в 80% случаев. Какова доля двигателей, которые будут работать хорошо или потребуют регулировки через 2 месяца после выпуска? Через 3 месяца?

Решение.

В момент после выпуска доля хороших двигателей составляет 0,6, а доля требующих регулировки – 0,4. Через месяц доля хороших составит:

$$0{,}6 \cdot 0{,}8+0{,}4 \cdot 0{,}35=0{,}62.$$

Доля требующих регулировки:

$$0{,}6 \cdot 0{,}2+0{,}4 \cdot 0{,}65=0{,}38.$$

Введём строку состояния X_t в момент t;

$$X_t=(x_{1t};\ x_{2t}),$$

где x_{1t} – доля хороших двигателей, x_{2t} – доля двигателей, требующих регулировки в момент t.

Матрица перехода

$$A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

где a_{ij} - доля двигателей, которые в настоящее время находятся в состоянии i (1- «хороший», 2- «требует регулировки»), а через месяц – в состоянии j. Очевидно, что для матрицы перехода сумма элементов каждой строки равна 1, все элементы неотрицательны.

Очевидно,

$$\text{X} = (0{,}6 \;\; 0{,}4), \quad A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}35 & 0{,}65 \end{pmatrix}.$$

Тогда через месяц:

$$X_1 = X_0 \cdot A = (0{,}6;0{,}4) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}35 & 0{,}65 \end{pmatrix} = \left(0{,}62;0{,}38)\right),$$

через 2 месяца:

$X_2 = X_1 A = X_0 AA = X_0 A^2$; через 3 месяца $X_3 = X_2 A = X_0 A^3$.

Найдём матрицы:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0.{,}35 & 0{,}65 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}35 & 0{,}65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}71 & 0{,}29 \\ 0{,}5075 & 0{,}4925 \end{pmatrix};$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0{,}71 & 0{,}29 \\ 0{,}5075 & 0{,}4925 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}35 & 0{,}65 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}67 & 0{,}33 \\ 0{,}58 & 0{,}42 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что если A - матрица перехода, то A^t - тоже матрица перехода при любом натуральном t. Теперь

$$X_2 = (0{,}6 \;\; 0{,}4) \begin{pmatrix} 0{,}71 & 0{,}29 \\ 0{,}5075 & 0{,}4929 \end{pmatrix} = \left(0{,}629 \quad 0{,}371\right),$$

$$X_3 = \left(0{,}6 \quad 0{,}4\right) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}67 & 0{,}33 \\ 0{,}58 & 0{,}42 \end{pmatrix} = \left(0{,}634 \quad 0{,}366\right).$$

Очевидно, $X_t = X_0 A^t$.

Пример.

Отрасль состоит из n предприятий, выпускающих по одному виду продукции каждое: обозначим объем продукции i-го предприятия через xi. Каждое из предприятий отрасли для обеспечения своего производства потребляет часть продукции, выпускаемой им самим и другими предприятиями. Пусть aij - доля продукции i-го предприятия, потребляемая j-м предприятием для обеспечения выпуска своей продукции объема xj. Найдем величину yi - количество продукции i-го предприятия, предназначенной для реализации вне данной отрасли (объем конечного продукта). Эта величина легко может быть подсчитана по формуле

$$y_i = x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j; \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Введем в рассмотрение квадратную матрицу порядка п, описывающую внутреннее потребление отрасли

$$A = (a_{ij}); \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда вектор конечного продукта является решением матричного уравнения

$$\bar{x} - A\bar{x} = \bar{y}, \backslash$$

с использованием единичной матрицы Е получаем

$$(E - A)\bar{x} = \bar{y}.$$

Пример. Пусть вектор выпуска продукции отрасли и матрица внутреннего потребления имеют, соответственно, вид

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 400 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

Получим вектор объемов конечного продукта, предназначенного для реализации вне отрасли, состоящей из трех предприятий:

$$\bar{y} = (E - A)\bar{x} = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,1 & -0,2 \\ -0,2 & 0,7 & -0,1 \\ -0,2 & -0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

2.3.Обратная матрица. Матричные уравнения

Будем рассматривать квадратные матрицы заданного порядка n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

При умножении таких матриц единичная матрица того же порядка играет ту же роль, что единица при умножении чисел: A·E=E·A=A.

По аналогии с умножением чисел определяется и понятие обратной к А матрицы: это матрица A^{-1} , для которой

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E.$$

Отсюда

$$\det A \cdot \det A^{-1} = \det E = 1,$$

т.е.

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Видим, что для существования обратной матрицы обязательно должно быть $\det A \neq 0$. Квадратная матрица A, для которой $\det A = 0$ называется вырожденной. Такая матрица не имеет обратной. Всякая невырожденная матрица имеет обратную.

Чтобы найти матрицу, обратную к A, нужно:

1) вычислить detA; если $\det A \neq 0$, обратная матрица существует;
2) вычислить алгебраические дополнение элементов матрицы A_{ij};
3) составить транспонированную матрицу алгебраических дополнений:

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \dots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} \dots a_{n2} \\ - - - - & - - - - \\ a_{1n} & a_{2n} \dots a_{nn} \end{pmatrix};$$

4)найти обратную матрицу по формуле $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot C.$

Пример.

Найти A^{-1}, если $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1) Вычисляем определитель матрицы:

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

2) Находим алгебраические дополнения

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7 \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{25} = -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4.$$

3) Составляем транспонированную матрицу алгебраических дополнений:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

4) Находим обратную матрицу по формуле (1):

$$A^{-1} = 1 \begin{pmatrix} 1 & -7 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Обратные матрицы применяются при решении матричных уравнений.

Пусть задано уравнение

$$A \cdot X = B, \qquad (1),$$

где X – неизвестная матрица n-го порядка; матрицы A и B заданы. Пусть матрица A невырождена, а значит, существует A-1. Умножим уравнение на A-1 слева:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

(напоминаем, порядок сомножителей важны, т.к. операция умножения матриц неперестановочна). По определению $A^{-1} \cdot A = E$. следовательно, уравнение сводится к виду $E \cdot X = A^{-1} \cdot B$, откуда

$$X = A^{-1} \cdot B \qquad (2)$$

– решение исходного уравнения.

Пример. Решить матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Переобозначим: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Тогда уравнение сведется к виду $A \cdot X = B$, решение которого определяется формулой (2).

Первый этап решения заключается в нахождении A^{-1} по формуле (1).

1) $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0;$

следовательно, матрица A имеет обратную.

2) Находим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -1 \qquad A_{21} = -3$$
$$A_{12} = -1 \qquad A_{22} = 2.$$

3) Составляем транспонированную матрицу алгебраических дополнений.

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4) Находим обратную матрицу $A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Второй этап решения состоит в перемножении матриц A^{-1} и B:

$$X = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -10 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & 2 \\ -\frac{8}{5} & -1 \end{pmatrix}.$$

Если матричное уравнение имеет вид

$$X \cdot A = B,$$

то решение находим умножение уравнения на A^{-1} справа $X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$, откуда следует $X \cdot E = B \cdot A^{-1}$, или

$$X = B \cdot A^{-1}.$$

Соответственно, решение уравнения $A \cdot X \cdot B = C$ отыскивается одновременным умножением уравнений на A^{-1} слева и на B^{-1} справа:

$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$.

2.4. Ранг матрицы.

Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \dots a_{2n} \\ - - - - - - - - \\ a_{n1}a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Если в этой матрице выделить произвольно n столбцов и к строк, то элементы, стоящие на пересечении выделенных столбцов и строк, образуют квадратную матрицу к-го порядка. Определитель этой матрицы называется *минором к-го порядка матрицы* А. Матрица А обладает минором любого порядка от 1 до наименьшего из чисел m и n. Среди всех отличных от нуля минор матрица А найдется, по крайней мере, один минор, порядок которого будет наименьшим.

Определение. Наименьший из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля, называется рангом матрицы.

Если ранг матрицы А равен r, то это означает, что в матрице А имеется отличный от нуля минор порядка r, но всякий минор порядка, большего чем r, равен нулю. Ранг матрицы А обозначается r(A) или RgA. Очевидно, что всегда выполняется соотношение:

$$0 \leq r \leq \min(m,n).$$

Например, в матрице

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}
$$

Единтвенный минор четвертого порядка равен нулю. А так как найдется минор третего порядка, не равный нулю, например,

$$
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,
$$

то $r(A) = 3$.

Свойства ранга матрицы. Ранг матрицы не изменяется при

1) транспонировании матрицы;
2) перестановка ее столбцов или строк;
3) умножение всех элементов ее столбца (или строки) на отличное от нуля число;
4) прибавлении к одному из ее столбцов (или строке) другого столбца (строки), умноженного (-ной) на некоторое число;
5) удалении из матрицы столбца (строки) состоящего (-щей) из нуля;
6) удалении из матрицы столбца (строки) являющегося (-щейся) линейной комбинацией других столбцов (строк).

Определение. Всякий отличный от нуля минор матрицы, порядок которого равен ее рангу, называется *базисным минором* этой матрицы.

Базисных миноров у матрицы может быть несколько.

Столбцы и строки, которые участвуют в образовании базисного минора, также называется *базисными строками и столбцами*.

Теорема. Всякий столбец матрицы является линейной комбинацией ее базисных столбцов, а всякая ее строка – линейной комбинацией базисных строк.

Рассмотрим один из способов вычисления ранга матрицы, основанный на элементарных преобразованиях матриц.

Определение. *Элементарными* называются следующие преобразования матриц:

1. перестановка двух любых столбцов (или строк);
2. умножение столбца (или строк) на отличное от нуля число;
3. прибавление к одному столбцу (или строке) линейной комбинации остальных столбцов (или строк).

Как следует из вышесказанного, при элементарных преобразованиях матрицы ее ранг не меняется.

Две матрицы называются *эквивалентными*, если одна из них получается из другой с помощью конечного числа элементарных преобразований.

Эквивалентные матрицы не являются, вообще говоря, равными, но их ранги равны. Эквивалентность друг другу матрицу А и В обозначается А~В.

Канонической матрицей называется матрица, у которой в начале главной диагонали стоит подряд несколько единиц, а все остальные элементы равны нулю, например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При помощи элементарных преобразований строк и столбцов любую матрицу можно привести к канонической. Ранг канонической матрицы равен числу единиц на ее главной диагонали.

Пример. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

путем приведения ее к каноническому виду.

Прибавим к 5-му столбцу матрицу 1-й столбец, результат запишем на место 5-го столбца (обозначается 5стб+1стб). Дальнейшее преобразования будем так же указывать сокращенно.

$$\mathrm{A} = \underset{5\text{стб}+1\text{стб}}{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}} \sim \underset{1\text{стр}-3\cdot2\text{стр},\ 3\text{стр}+3\cdot2\text{стр}}{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & 0 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\sim \underset{3\text{стр}+2\cdot1\text{стр}}{\begin{pmatrix} -7 & -9 & -4 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & 0 \\ 14 & 18 & 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \sim \underset{1\text{стб}-3\text{стб}}{\begin{pmatrix} -7 & -9 & -4 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}-3 & -9 & -4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 3 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}-3 & -9 & -4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim$$

2стб+4·4стб, 3стб+3·4стб $\qquad$ 1стб$\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$, 2стб $\cdot\left(-\frac{1}{9}\right)$

3стб $\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)$, 4стб$(-1)$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

2стб − 1стб, 3стб − 1стб $\qquad$ 2стб ↔ 4стб

Следовательно, r (A)=2.

Задачи для решения

2.1. Выполнить действия:

1) (1,2,1,-1)+(3,2,-1,2); 2) 3·(1,-1,0,3)+2(-1,2,3,1)-(1,1,6,11);

3) $4\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}-1 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ -1 & 3 & 2\end{pmatrix}$;

4) $3\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -4\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -3 & 2 & 2\end{pmatrix}$.

2.2. Умножить матрицы:

1) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}3 & 5\\ 6 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 2\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & -6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9 & -6\\ 6 & -4\end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix}4 & 3\\ 7 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-28 & 93\\ 38 & -126\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 3 & -4 & 1\\ 2 & -5 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$; 7) $\begin{pmatrix}5 & 8 & -4\\ 6 & 9 & -5\\ 4 & 7 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2 & 5\\ 4 & -1 & 3\\ 9 & 6 & 5\end{pmatrix}$;

8) $\begin{pmatrix}5 & 0 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 5 & 3\\ 3 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\ -2\\ 7\\ 4\end{pmatrix}$; 9) $\begin{pmatrix}4 & 0 & -2 & 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -1\\ 5\\ 2\end{pmatrix}$;

10) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$; 11) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

12) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; 13) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; 14) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$;

15) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 & 6 & 9 \\ 5 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

16) $\begin{pmatrix} 5 & 7 & -3 & -4 \\ 7 & 6 & -4 & -5 \\ 6 & 4 & -3 & 2 \\ 8 & 5 & -6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$;

17) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -5 & 3 & 11 \\ 16 & 24 & 8 & -8 \\ 8 & 16 & 0 & -16 \end{pmatrix}$;

18) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -5 & -3 & -4 & 4 \\ 5 & 1 & 4 & -3 \\ -16 & -11 & -15 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & 4 \\ 11 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \\ 22 & 2 & 9 & 8 \end{pmatrix}$;

19) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 70 & 34 & -107 \\ 52 & 26 & -68 \\ 101 & 50 & -140 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 27 & -18 & 10 \\ -46 & 31 & -17 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

20) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.3.Выполнить действия:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^3$; 3) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^5$;

4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$; 5) $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n$; 6) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3$.

2.4. Найти значение многочлена f (A) от матрицы A:

1) $f(x) = 3x^2 - 4, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;

2) $f(x) = x^2 - 3x + 1, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$;

3) $f(x) = 3x^2 - 2x + 5, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$;

4) $f(x) = x^2 - x - 1, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2.5. Найти все матрицы, перестановочные с данной:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2.6. Найти обратные матрицы для следующих матриц.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$; 7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

8) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; 9) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 10) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.7. Решить матричные уравнения:

1) $\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}3 & 5\\5 & 9\end{pmatrix}$; 2) $X\cdot\begin{pmatrix}3 & -2\\5 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\-5 & 6\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}3 & -1\\5 & -2\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}5 & 6\\7 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & 16\\9 & 10\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\3 & 2 & -4\\2 & -1 & 0\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\10 & 2 & 7\\10 & 7 & 8\end{pmatrix}$;

5) $X\cdot\begin{pmatrix}5 & 3 & 1\\1 & -3 & -2\\-5 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & 3 & 0\\-5 & 9 & 0\\-2 & 15 & 0\end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix}2 & 0\\-1 & 4\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1\\2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 3\end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\4 & -5 & 2\\5 & -7 & 3\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}9 & 7 & 6\\1 & 1 & 2\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\18 & 12 & 9\\23 & 15 & 11\end{pmatrix}$;

8) * $\begin{pmatrix}2 & 4\\-1 & 3\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}-2 & 2 & -3\\1 & 1 & 1\\2 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\1 & 1 & 2\end{pmatrix}$;

9) $\begin{pmatrix}2 & 5\\1 & 3\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}4 & -6\\2 & 1\end{pmatrix}$; 10) $X\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\2 & 1 & 0\\1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\4 & 3 & 2\\1 & -2 & 5\end{pmatrix}$;

11) $\begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}-3 & 2\\5 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\3 & -1\end{pmatrix}$.

2.8. Найти ранги матриц:

1) $\begin{pmatrix}0 & 4 & 10 & 1\\4 & 8 & 18 & 7\\10 & 18 & 40 & 17\\1 & 7 & 17 & 3\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 11 & 2\\1 & 0 & 4 & -1\\11 & 4 & 56 & 5\\2 & -1 & 5 & -6\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 4\\0 & 1 & 0 & 2 & 5\\0 & 0 & 1 & 3 & 6\\1 & 2 & 3 & 14 & 32\\4 & 5 & 6 & 32 & 77\end{pmatrix}$;

4) $\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2\\2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2\\-2 & -5 & 8 & -4 & 3 & -1\\6 & 0 & -1 & 2 & -7 & -5\\-1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1\end{bmatrix}$; 5) $\begin{bmatrix}2 & 1 & 1 & 1\\1 & 3 & 1 & 1\\1 & 1 & 4 & 1\\1 & 1 & 1 & 5\\1 & 2 & 3 & 4\\1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$;

6) $\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 3 & 4\\2 & 1 & -1 & 2 & 0\\-1 & 2 & 1 & 1 & 3\\1 & 5 & -8 & -5 & -12\\3 & -7 & 8 & 9 & 13\end{bmatrix}$; 7) $\begin{bmatrix}3 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1\\4 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2\\2 & -1 & -2 & 1 & 1 & -3\\3 & 1 & 3 & -9 & -1 & 6\\3 & -1 & -5 & 7 & 2 & 7\end{bmatrix}$;

$$8)\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ответы

2.6.

$1)\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $2)\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$; $3)\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$;

$4)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$; $5)\begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; $6)\begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

$7)\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$; $8)\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$; $9)\begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 & -38 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$10)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.7.

$1)\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; $2)\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$; $3)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; $4)\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$;

$5)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$; $6)\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$; $7)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

$8)\begin{pmatrix} 0{,}7 & -5{,}5 & 3{,}4 \\ -0{,}1 & 0{,}5 & -0{,}2 \end{pmatrix}$; $9)\begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$; $10)\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;

$11)\begin{pmatrix} 24 & 13 \\ -34 & -18 \end{pmatrix}$.

2.8 1)2; 2)2; 3)3; 4)3; 5)4; 6)3; 7)3; 8)6.

§3. Системы линейных уравнений (СЛАУ)

3.1. Классификация систем линейных уравнений.

Определение. Уравнение относительно неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется линейным, если его можно записать в виде:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

где числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называются *коэффициентами*, а b – *свободный член.*

Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ - - - - - - - - - - - - - - - - - \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Матрица A, составленная из коэффициентов при неизвестных,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ \ldots & a_{2n} \\ - - - & - - - & - - - \\ a_{m1} & a_{m2} \ \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется *основной матрицей системы*, а матрица

$$\widetilde{A} = \left(\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ \ldots & a_{2n} \\ - - - & - - - & - - - \\ a_{m1} & a_{m2} \ \ldots & a_{mn} \end{matrix}\left|\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ - \\ b_m \end{matrix}\right.\right)$$

называется *расширенной матрицей системы*.

3.2. Матричный способ решения СЛАУ.

Используя понятие произведения матриц, систему (1) можно записать в виде

$$A \cdot X = B, \qquad (2)$$

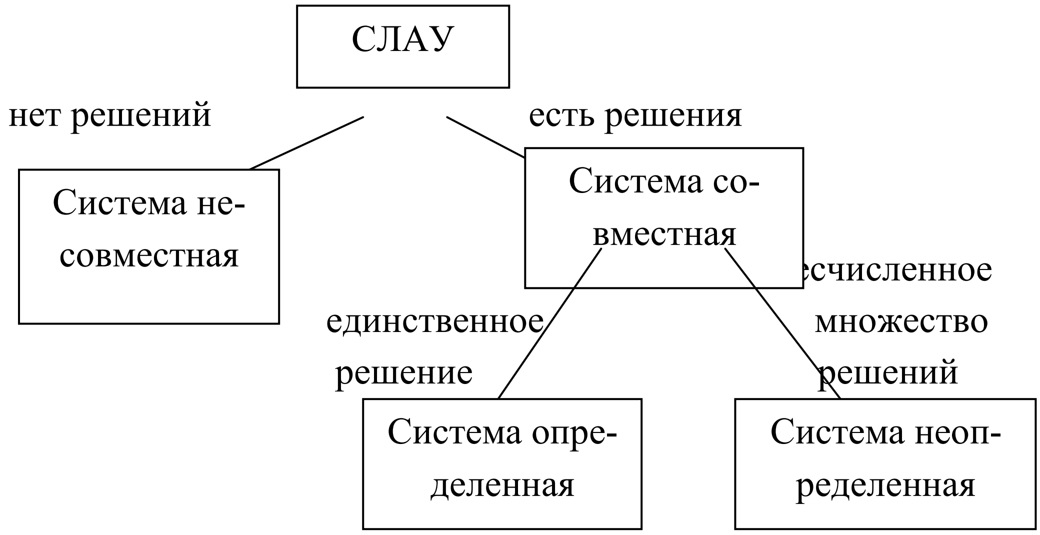
где A – основная матрица системы,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$$

– соответственно, вектор-столбец неизвестных и вектор-столбец из свободных членов.

Равенство (2) называется системой линейных уравнений в матричной форме (СЛАУ).

Классификация СЛАУ может быть представлена в виде следующей схемы:



СЛАУ из 2 уравнений с двумя неизвестными и из 3 уравнений с тремя неизвестными были исследованы, соответственно, в § 1, 2.

Рассмотрим теперь систему из n уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ -\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,- \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}. \qquad (3)$$

Предположим, что определитель основной матрицы системы отличен от нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ - - - & - - - - - \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда решение системы (3) может быть получено по формулам Крамера, обобщенным на случай произвольного числа уравнений:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots . \quad , \; x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где Δ_1, Δ_2,…, Δ_n – определители, получаемые из Δ заменой 1-го, 2-го, …, n-го столбца на столбец свободных членов.

Если систему (3) переписать в виде (2)

$$A \cdot X = B,$$

то решение матричного уравнения, к которому свелась система, может быть найдено по алгоритму, описанному в § 2. Такой метод называется матричным способом решения СЛАУ.

Пример. Решить матричным способом систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10. \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$$

Вводим обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Тогда система может быть записана в матричной форме

$$A \cdot X = B,$$

решение которой, как было изложено в § 6, имеет вид:

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Находим A^{-1}:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

Следовательно, A-1 существует.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1;$$

$$C = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot C = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Находим решение матричного уравнения:

$$X = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Из принятых обозначений следует, что

$$x_1 = 1, \; x_2 = 3, \; x_3 = 1.$$

3.3. Метод Гаусса. Критерий совместимости СЛАУ

Решение СЛАУ по правилу Крамера либо матричным способом во-первых, неприменимо в случае, когда число уравнений системы m не равно числу неизвестных n: m≠n; во-вторых, в случае, когда n велико, оба метода приводят к громоздким вычислениям.

На практике часто используется так называемый метод Гаусса последовательного исключения неизвестных. Он состоит в том, что данная линейная система уравнений сводится к эквивалентной системе (т.е. имеющей те же решения) с матрицей треугольной формы, решая которую, получают решение первоначальной системы.

Эквивалентная СЛАУ может быть получена из исходной с помощью преобразований:

1. перестановки местами двух любых уравнений;
2. умножения уравнения на отличное от нуля число;
3. прибавления к одному уравнению линейной комбинации остальных уравнений.

Очевидно, что описанным преобразованиям соответствуют элементарные преобразования расширенной матрицы системы, выполняемые со строками (см. п.2.4.).

Пример 1. Решить методом Гаусса систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3 \end{cases}.$$

1 этап решения. Исключим неизвестную x_1 из трех уравнений системы. Для этого поменяем местами 1-ое и 2-ое уравнения (чтобы коэффициент при x_1 в 1-м уравнении был равен единице);

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3 \end{cases}.$$

Затем умножим 1-ое уравнение на (-2) и прибавим его ко 2-му уравнению, тем самым исключив из него x_1; с этой же целью прибавим к 3-му и 4-му уравнениям 1-ое уравнение, умноженное на (-2) и на (-1):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + +x_3 + x_4 = 0 \\ -x_2 - 7x_3 - 2x_4 = -5 \\ -2x_3 + 2x_4 = -4 \end{cases}.$$

Проведенным преобразованиям системы соответствуют следующие преобразования расширенной матрицы системы:

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \end{array}\right) \sim \quad \begin{array}{c} 2\text{ стр.} + (-2) \cdot 1\text{стр} \\ 3\text{ стр.} + (-2) \cdot 1\text{стр} \\ 4\text{ стр.} (-2) \cdot 1\text{стр} \end{array}$$

1 стр. ↔2 стр.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4 \end{array}\right) \sim$$

2 этап решения. Исключаем неизвестную $\boldsymbol{x_2}$ из всех уравнений системы, кроме 1-го и 2-го. Для этого к 3-му уравнению прибавляем второе; попутно сокращаем 4-ое уравнение на (-2):

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim$$

3 стр.+2 стр.

3 этап решения. Исключаем x_3 из 4-го уравнения. Для этого меняем местами 3-е и 4-ое уравнения, а затем прибавляем к новому 4-му уравнению 3-е, умноженное на 6:

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 7 \end{array}\right)$$

3 стр. ↔4 стр., 4 стр. ↔3 стр· 6

Цель преобразований достигнута: матрица приведена к верхнетреугольному виду. Следует заметить, что ранги исходной матрицы $\widetilde{A}$ и полученной матрицы равны. Очевидно, что

$$r(\widetilde{A}) = 4.$$

4 этап решения. Осуществим так называемый обратный ход метода Гаусса. Выпишем по верхнетреугольной матрице систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 & (1) \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 & (2) \\ x_3 - x_4 = 2 & (3) \\ -7x_4 = 7 & (4) \end{cases}$$

Из (4) получаем: $x_4 = -1$. Подставив x_4 в (3), получаем: $x_3 = 1$. Последующая подстановка найденных x_3 и x_4 в (2) приводит к x_2=0. Наконец, подставив x_2, x_3, x_4 в (1), находим последнюю неизвестную: x_1=-2.

Итак, решение системы имеет вид: x_1=-2, x_2=0, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$.

Рассмотрим критерий совместности СЛАУ.

Теорема Кронекера - Капелли. Для совместности системы m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ - - - - - - - - - - - - - - - - \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}. \qquad (1)$$

Необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы системы был равен рангу матрицы коэффициентов А.

Для лучшего понимания практического применения теоремы рассмотрим доказательство ее достаточности.

Пусть $r(\widetilde{A}) = r(A) = r$. В соответствии с определением ранга данным в § 7 у матрицы А и ($\widetilde{A}$) имеется базисный минор -го порядка. Для определенности будем считать, что этот минор расположен в левом верхнем углу:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2r} \\ - - - & - - - \\ a_{r1} & a_{r2} \dots a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда в соответствии с теоремой о базисном миноре (п.2.4) строки матрицы $\widetilde{A}$ с (r+1)-ю по m-ю являются линейными комбинациями первых r строк. Но это означает, что первые r уравнений системы независимы, а остальные m- r уравнений являются линейными комбинациями, то есть следствиями.

В этом случае система состоит лишь из r независимых уравнений. Достаточно поэтому решить первые r уравнений системы; их решения автоматически будут удовлетворять и остальным (m- r) уравнениям. Возможны 2 случая:

1. r =n. Тогда систему, состоящую из первых r уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r = b_r \end{cases}$$

можно решить, например, по формулам Крамера. Система имеет единственное решение. Она совместная и определенная.

2. r<n. Возьмем первые r уравнений системы (см. пример 1) и, оставив в левых частях первые r неизвестных, остальные перенесем в правые части:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n \end{cases}$$

Свободным неизвестным $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots x_n$ можно придавать какие угодно значения, получая при этом соответствующие значения главных неизвестных $x_1, x_2, \dots x_r$.

Это случай совместной, но неопределенной системы.

Пример 2.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 = -6 \\ 2x_1 - 11x_2 \qquad + 7x_4 = 21 \end{cases}.$$

Приводим расширенную матрицу системы к верхнеугольному виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & -2 & -6 \\ 2 & -11 & 0 & 7 & 21 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 2 & -5 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 2 & -5 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

2 стр. +(-3) · 1стр

3 стр. + (-2) · 1стр

$r(A) = r(\widetilde{A}) = 2$; следовательно, система совместна. Число неизвестных n=4, больше ранга r системы. Следовательно, СЛАУ неопределенная; две неизвестные свободные, две – главные.

Восстанавливаем систему:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ 7x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -15 \end{cases}$$

Принимаем в качестве главных неизвестных x_1, x_2, а в качестве свободных - x_3, x_4.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3 - x_3 - x_4 & (1) \\ 7x_2 = -15 - 2x_3 + 5x_4 & (2) \end{cases}$$

Из уравнения (2) выразим главную неизвестную x_2 через свободные x_3, x_4:

$$x_2 = \frac{1}{7}(5x_4 - 2x_3 - 15)$$

Подставив x_2 в (1) получаем аналогичное выражение для лавной неизвестной x_1:

$$x_1 = \frac{1}{7}(-9 - 11x_3 + 3x_4).$$

Следовательно, общее решение СЛАУ имеет вид:

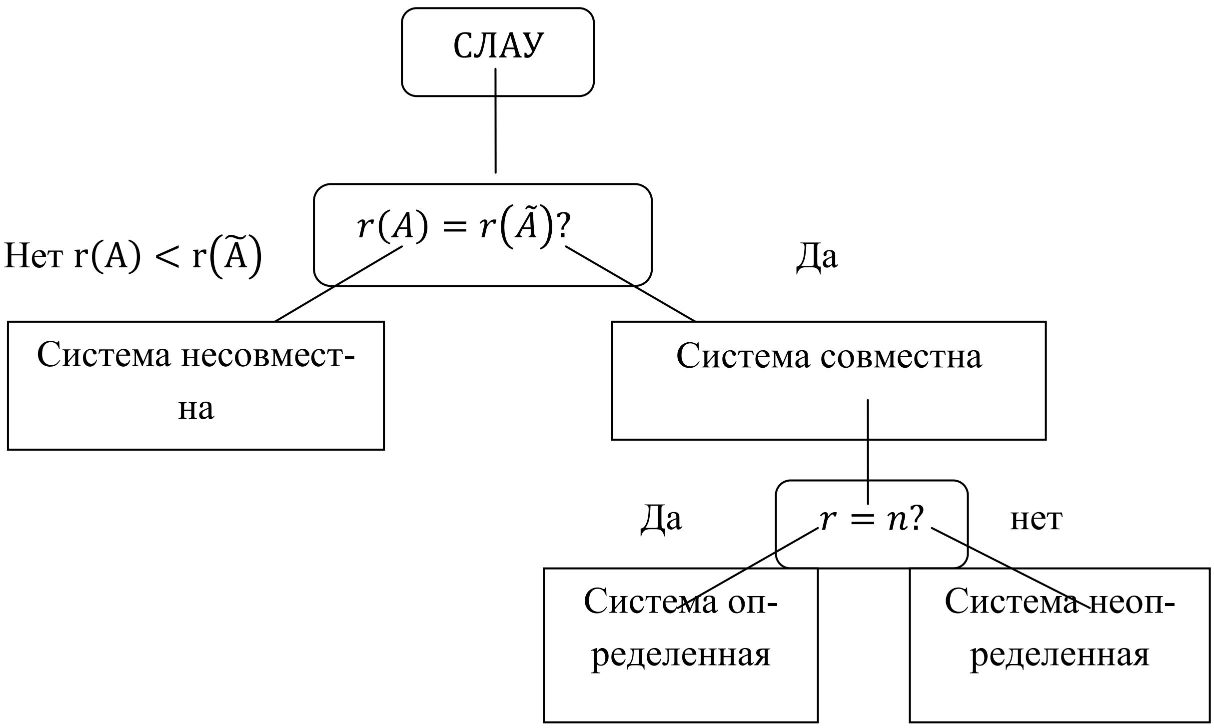
$$x_1 = \frac{1}{7}(-9 - 11x_3 + 3x_4),$$

$$x_2 = \frac{1}{7}(5x_4 - 2x_3 - 15),$$

x_3, x_4 принимают любые значения.

Как следует из теоремы, если $r(A) = r(\widetilde{A})$ система совместна; если $r(A) < r(\widetilde{A})$, система несовместна.

Схему предыдущего пункта можно конкретизировать с учетом теоремы Кронекера-Капелли.



Пример 3.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \qquad\quad = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \end{cases}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & -5 & -6 \\ 0 & -3 & 5 & -3 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} 3\ \text{стр.} + 2\ \text{стр.} \\ 4\ \text{стр.} + (-3)\cdot 2\ \text{стр.} \end{array}$$

2 стр.+(-2)1стр., 3 стр.+(-2)1стр,
4 стр. + (-1)1 стр.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 10 & -9 & -9 \\ 0 & 0 & -10 & 9 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 10 & -9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

4 стр.+3 стр.

$r(A) = 3 < r(\widetilde{A}) = 4.$

Следовательно, система несовместна.

3.4. Однородные уравнения

Однородные уравнения – это уравнения, свободные члены которых равны нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ -\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,- \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Система однородных уравнений всегда совместна, т.к. имеет всегда нулевое решение:

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

Нулевые решения называются тривиальными.

Важно выяснить, при каком условии однородная система имеет нулевые решения.

Теорема 1. Для того, чтобы система (1) имела ненулевые решения необходимо и достаточно, чтобы ранг r ее матрицы коэффициентов был меньше n.

Теорема 2. Для того, чтобы однородная система n линейных уравнений с n неизвестными обладала ненулевыми решениями, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю.

Пример.

Выяснить, имеет ли данная система нетривиальные (ненулевые) решения.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 9x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 17x_3 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & -9 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -17 \end{pmatrix} \sim \underset{1\text{ стр.} \leftrightarrow 2\text{ стр.}}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & -9 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -17 \end{pmatrix}} \sim \begin{matrix} 2\text{ стр.} + 1\text{ стр.} \cdot (-2) \\ 3\text{ стр.} + 1\text{стр.} \cdot (-1) \\ 4\text{ стр.} + 1\text{ стр.} \cdot (-3) \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -9 \\ 0 & 7 & 14 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 5 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} 2\text{ стр.} \cdot \frac{1}{7} \\ 3\text{ стр.} \cdot \frac{1}{5} \\ 4\text{ стр.} \cdot \frac{1}{5} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{matrix} 3\text{стр} - 2\text{стр} \\ 4\text{стр} - 2\text{стр} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(A)=2<n=3$, следовательно, по теореме 1 ненулевые решения существуют. Найдем все решения системы.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 9x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Будем считать, что x_3 – свободная неизвестная, x_1,x_2 – главные:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 9x_3 & (1) \\ x_2 = -2x_3 & (2) \end{cases}$$

Подставив x_2 из (2) в уравнение (1), получим: $x_1 = 5x_3$.

Следовательно, решение системы имеет вид:

$$x_1 = 5x_3$$

$$x_2 = -2x_3$$

x_3 – свободная.

Определение. Линейно-независимая система решений СЛАУ (1) $e_1, e_2, \ldots, e_k$ называется фундаментальной системой решений, а их линейная комбинация $C_1 e_1 + C_2 e_2 + \ldots + C_k e_k$ ($C_1, C_2, \ldots, C_k$ произвольные постоянные) называется общим решением системы.

Фундаментальную систему решений можно получить следующим образом. Придаем свободным неизвестным значение:

$$x_{r+1} = 1, \quad x_{r+2} = 0, \ldots, x_n = 0$$

и получаем из системы значения главных неизвестных:

$$x_1 = \alpha_1, \ x_2 = \alpha_2, \ \ldots \ , x_r = \alpha_r .$$

Тогда

$$e_1 = \{\alpha_1, \ \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \ 1,0, \ldots, 0\}.$$

Затем задаем

$$x_{r+1} = 0, \ \ x_{r+2} = 1, \ldots, x_n = 0,$$

находим

$$x_1 = \beta_1, \ \ x_2 = \beta_2, \ldots, x_r = \beta_r,$$

так что

$$e_2 = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r, 0,1, \ldots, 0\}$$

Повторив выше изложенный алгоритм k=n-r раз, получим:

$$e_к = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r, 0,0, \ldots, 1\}.$$

Полученные таким образом решения $e_1, e_2, \ldots, e_k$ и образуют фундаментальную систему решений.

Пример.

Найти общее решение системы:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

Решаем систему методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} 2стр + 1стр \cdot (-2) \\ 3стр + 1стр \cdot (-3) \\ 4стр + 1стр \cdot (-2) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} 3стр + 2стр\cdot(-4) \\ 4стр + 2стр\cdot(-5) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim$$

$$2стр \leftrightarrow 4стр\cdot(-1)$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

4стр+3стр· (-1)

r(A)=3<n=5, следовательно, система имеет ненулевые решения; две неизвестные свободные, три – главные.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ -8x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases}.$$

Пусть x_4, x_5 – свободные, x_1, x_2, x_3 – главные неизвестные. Тогда решение системы может быть записано в виде:

$$x_1 = \frac{1}{8}(-4x_4 + 7x_5), \quad x_2 = -\frac{1}{8}(4x_4 - 5x_5), \quad x_3 = \frac{1}{8}(4x_4 - 5x_5)$$

x_4, x_5 – свободные. (2)

Нахождение системы фундаментальных решений оформим в виде таблицы:

	Главные			Свободные	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
e_1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0
e_2	$\frac{7}{8}$	$\frac{5}{8}$	$-\frac{5}{8}$	0	1

То есть, если придать свободным неизвестным значение x_4=1, x_5=0, то из формул (2) будет следовать, что

$$x_1 = -\frac{1}{2}, \qquad x_2 = -\frac{1}{2}, \qquad x_3 = \frac{1}{2},$$

а значит,

$$e_1 = \left\{-\frac{1}{2}, \qquad -\frac{1}{2}, \ \frac{1}{2} \quad 1, \qquad 0\right\}$$

Если же x_4=0, x_5=1, то из формул (2) следует, что

$$x_1 = \frac{7}{8}, \qquad x_2 = \frac{5}{8}, \qquad x_3 = -\frac{5}{8},$$

и значит,

$$e_2 = \left\{\frac{7}{8},\ \frac{5}{8}, \qquad -\frac{5}{8}, \qquad 0{,}1\right\}$$

и общее решение системы имеет вид: $y = C_1 e_1 + C_2 e_2$.

Задачи для решения.

Решить матричным способом системы уравнений:

3.1. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11; \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$

3.2. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$

3.3. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$;

3.4. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$

3.5. $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 8x + 3y - 6z = 2 \\ -4x - y + 3z = -3 \end{cases}$;

3.6. $\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 3 \\ x + 2y - 3z = 14; \\ 3x + 4y + z = 10 \end{cases}$

3.7. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 7 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$;

3.8. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$;

3.9. $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 8x + 3y - 6z = 2 \\ -4x - y + 3z = -3 \end{cases}$;

3.10. $\begin{cases} x + y - 2z = 6 \\ 2x + 3y - 7z = 16; \\ 5x + 2y + z = 16 \end{cases}$

3.11. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 29 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 25 \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -16 \end{cases}$;

3.12. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$.

Решить СЛАУ методом Гаусса:

3.13. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}$.

3.14. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$.

3.15. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$.

3.16. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \end{cases}$.

3.17. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 \qquad - 3x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$.

3.18 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3 \end{cases}$.

3.19. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 3 \end{cases}$.

3.20 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 3 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - 7x_5 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -1 \end{cases}$.

3.21. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 5x_5 = -3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 = 1 \end{cases}$.

3.22 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$.

3.23. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_4 = -3 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 7 \end{cases}$.

3.24. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 7x_1 + 14x_2 + 20x_3 + 27x_4 = 0 \\ 5x_1 + 10x_2 + 16x_3 + 19x_4 = -2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 13x_4 = 5 \end{cases}$.

3.25. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 = -3 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_4 + x_5 = -1 \end{cases}$.

3.26. $\begin{cases} 105x_1 - 175x_2 - 315x_3 + 245x_4 = 84 \\ 90x_1 - 150x_2 - 270x_3 + 210x_4 = 72 \\ 75x_1 - 125x_2 - 225x_3 + 175x_4 = 59 \end{cases}$.

3.27. $\begin{cases} 8x_1 + 12x_2 = 20 \\ 14x_1 + 21x_2 = 35 \\ 9x_3 + 11x_4 = 0 \\ 16x_3 + 20x_4 = 0 \\ 10x_5 + 12x_6 = 22 \\ 15x_5 + 18x_6 = 33 \end{cases}$.

3.28. $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 8 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ -x_1 + x_3 + 24x_4 = 1 \\ -x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$.

Выяснить, имеют ли системы уравнений нетривиальные решения и найти их.

3.29. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 9x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 8x_3 - 8x_4 + 27x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 16x_3 + 16x_4 + 81x_5 = 0 \end{cases}$.   3.30. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 17x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$.

3.31. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$.

3.32. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0 \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$

3.33. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$.

3.34. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$.

Найти фундаментальную систему решений и общее решение следующих систем

3.35. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 9x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$.   3.36. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$.

3.37. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$.   3.38. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$.

3.39. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$.   3.40. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$.

3.41. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0 \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 - 8x_5 = 0 \end{cases}$. 3.42. $\begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$.

3.43. $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0 \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$.

3.44. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0 \\ 7x_1 + 10x_2 - x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$.

Ответы:

3.1. $x_1 = 3,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1.$ 3.2. $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = -2.$

3.3. $x_1 = 2,\ x_2 = -2,\ x_3 = 3.$ 3.4. $x_1 = 3,\ x_2 = 4,\ x_3 = 5.$

3.5. $x = -8,\ \ y = -4, z = -13.$ 3.6. $x = 3,\ y = 1,\ z = -3.$

3.7. $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = -2.$ 3.8. $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1.$

3.9. $x = -8, y = -4, z = -13.$ 3.10. $x = 3, y = 1, z = -1.$

3.11. $x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = 2.$ 3.12. $x_1 = -1, x_2 = 3, x_3 = 2.$

3.13. $x_3 = 2x_2 - x_{1,}\ x_4 = 1,\ x_1, x_2$ – свободные. 3.14. Нет решений.

3.15. $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1.$ 3.16. Нет решений.

3.17. $x_1 = -8, x_2 = 3 + x_4, x_3 = 6 + 2x_4,\ x_4 -$ свободная

3.18. $x_1 = \frac{1+x_5}{3},\quad x_2 = \frac{1+3x_3+3x_4-5x_5}{3},\quad x_3, x_4, x_5$ – свободные.

3.19. Нет решений .

3.20. $x_1 = \frac{-x_5}{2}, x_2 = -1 - \frac{x_5}{2}, x_3 = 0, x_4 = -1 - \frac{x_5}{2},\ x_5 -$ свободная.

3.21. Нет решений.

3.22. $x_1 = \frac{1+5x_4}{6}, x_2 = \frac{1-7x_4}{6}, x_3 = \frac{1+5x_4}{6},\ \ x_4 -$ свободная.

3.23. $x_1 = \frac{5+4x_3+x_4}{5}, x_2 = \frac{10+2x_3+3x_4}{5},$

3.24. $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = -1, x_4 = 1, x_3, x_4$ - свободные.

3.25. $x_1 = 6 - x_5, x_2 = -5 + x_5, x_3 = 3, x_4 = -1 - x_5\quad x_4, x_5 -$ свободные.

3.26. Нет решений.

3.27. $x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2,\ x_3 = 0, x_4 = 0,\ x_5 = \frac{11}{5} - \frac{6}{5}x_6;\ x_2, x_6 -$ свободные.

3.28. $x_1 = -1 + x_3 + 2x_4,\ x_2 = -3 + x_3 + 2x_4;\ x_3, x_4 -$ свободные.

3.29. $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0.$

3.30. $x_1 = -\frac{11x_3}{7}, \quad x_2 = -\frac{x_3}{7}, \quad x_3 -$ свободная.

3.31. $x_1 = x_2 = x_3 = 0, \quad x_4 = x_5,\ x_5 -$ свободная.

3.32. $x_1 = \frac{3x_3 - 13x_4}{17}, \ x_2 = \frac{19x_3 - 20x_4}{17}, \quad x_3, x_4 -$ свободные.

3.33 . $x_1 = \frac{-4x_4 + 7x_5}{8}, \ x_2 = \frac{-4x_4 + 5x_5}{8}, \quad x_3 = \frac{4x_4 - 5x_5}{8}, \ x_4, x_5$ – свободные.

3.34. $x_1 = \frac{7}{6}x_5 - x_3, \ x_2 = \frac{5}{6}x_5 + x_3, \quad x_4 = \frac{x_5}{3}, \quad x_3, x_5 -$ свободные.

3.35. $c_1e_1,\ e_1 = \{3,1,5\}$ 3.36. $c_1e_1 + c_2e_2, \quad e_1 = \{2,1,0\}, \ e_2 = \{3,0\}.$

3.37. Система имеет только тривиальное решение.

3.38. $c_1e_1, e_1 = \{4,1,-5\}.$

3.39. $c_1e_1 + c_2e_2, \ e_1 = \{8,-6,1,0\}, \ e_2 = \{-7,5,0,1\}.$

3.40. $c_1e_1 + c_2e_2, \ e_1 = \left\{1,0,-\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right\}, \ e_2 = \{0,1,5,-7\}.$

3.41. $c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3, \quad e_1 = \left\{1,0,0,-\frac{9}{4},\frac{3}{4}\right\},$

$$e_2 = \left\{0,1,0,-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\}, \quad e_3 = \{0,0,1,-2,1\}.$$

3.42. $c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3, \quad e_1 = \{1,1,-1,1,0,0\},$

$$e_2 = \{-1,0,0,0,1,0\}, \quad e_3 = \left\{0,-\frac{2}{3},0,0,1\right\}.$$

3.43. $c_1e_1 + c_2e_2, \ e_1 = \left\{0,\frac{1}{3},1,0,0\right\}, \ e_2 = \left\{0,-\frac{2}{3},0,0,1\right\}.$

3.44. $c_1e_1 + c_2e_2, \ e_1 = \{-3,2,1,0,0\}, \ e_2 = \{-5,3,0,0,1\}.$

§ 4. Применение матриц в экономике

Примеры применения матриц и систем линейных алгебраических уравнений для решения простейших экономических задач уже были рассмотрены в пп. 1.1, 2.1, 2.2. Рассмотрим еще несколько наиболее часто встречающихся математических моделей экономики с применением линейной алгебры.

Производственные показатели

Пусть производственное объединение выпускает ежемесячно четыре вида изделий, основные производственные показатели которых приведены в Таблице 1:

Таблица 1

Вид изделий	Количество изделий	Расход сырья, кг/изд.	Норма времени изготовления, ч/изд.	Цена изделия, ден. ед./изд.
1	10	8	20	10
2	20	5	15	25
3	30	4	30	30
4	40	3	25	15

Требуется определить следующие ежемесячные показатели: расход сырья S, затраты рабочего времени T и стоимость P выпускаемой продукции предприятия.

По приведенным данным составим четыре вектора, характеризующие весь производственный цикл:

$q = (10, 20, 30, 40)$ – вектор ассортимента;

$s = (8, 5, 4, 3)$ – вектор расхода сырья;

$t = (20, 15, 30, 25)$ – вектор затрат рабочего времени;

$p = (10, 25, 30, 15)$ – ценовой вектор.

Тогда искомые величины будут представлять собой соответствующие скалярные произведения вектора ассортимента q на три других вектора:

$S = qs = 80 + 100 + 120 + 120 = 420$ (кг),

$T = q\,t = 200+300+900 + 1000=2400$ (ч),

$P = q\,p = 100+500+900+600=2100$ (ден. ед.)

Расход сырья

Предприятие выпускает четыре вида изделий с использованием четырех видов сырья. Нормы расхода сырья даны как элементы матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Требуется найти затраты сырья каждого вида при заданном плане выпуска каждого вида изделия: соответственно, 60, 50, 35 и 40 ед.

Составим вектор-план выпуска продукции:

q = (60, 50, 35, 40).

Тогда решение задачи дается вектором затрат, координаты которого и являются величинами затрат сырья по каждому его виду: этот вектор затрат вычисляется как произведение вектора q на матрицу A*:*

$$qA = (60,50,35,40)\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120+50+245+160 \\ 180+100+70+200 \\ 240+250+105+240 \\ 300+300+70+320 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 575 \\ 550 \\ 835 \\ 990 \end{pmatrix}$$

Линейная модель многоотраслевой экономики (балансовая модель Леонтьева)

Пусть производственное объединение состоит из n отраслей, выпускающих n видов продукции и потребляющих при этом сою собственную продукцию и продукцию других отраслей. Ведем в рассмотрение обозначения:

$X = (X_1,\ X_2, ..., X_n)$ - вектор валовой продукции,

$Y = (Y_1,\ Y_2, ..., Y_n)$ - вектор конечной продукции (конечное потребление и накопление).

X_{ij} – производственные (материальные) затраты j-й отрасли продукции i-й отрасли в течении планового периода (например, если отрасль 1– угольная, отрасль 2 – черная металлургия, то x_{12} – годовые затраты угля на производство черных металлов).

Тогда рассмотренные величины связаны соотношениями:

$$X_1 = X_{11} + X_{12} + \ldots + X_{1n} + Y_1;$$

$$X_2 = X_{21} + X_{22} + \ldots + X_{2n} + Y_2;$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots;$$

$$X_n = X_{n1} + X_{n2} + \ldots + X_{nn} + Y_n.$$

С учетом того, что $x_{ij} = a_{ij} X_j$ система уравнений можно переписать в следующем виде:

$$\begin{array}{lllllll} X_1 & = & a_{11}X_1 & + & a_{12}X_2 & +\ldots + & a_{1n}X_n & + & Y_1; \\ X_2 & = & a_{21}X_1 & + & a_{22}X_2 & +\ldots + & a_{2n}X_n & + & Y_2; \\ X_n & = & a_{n1}X_1 & + & a_{2n}X_2 & +\ldots + & a_{nn}X_n & + & Y_n. \end{array}$$

Или, в компактном виде:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot X_j + Y_i \left(i = \overline{1,n}\right),$$

то есть:

$$X = AX + Y, \quad A = (a_{ij})_{nn},$$

Последнее уравнение представляет собой матричную форму записи *модели межотраслевого баланса*, которую называют *моделью Леонтьева* или *моделью «затраты – выпуск».*

Элементы a_{ij} матрицы A называют *коэффициентами прямых (материальных) затрат* – это затраты i-й отрасли на единицу (рубль) валовой продукции j-й отрасли.

В матричной форме модель Леонтьева можно записать в следующем виде:

$$X - AX = Y \text{ или } (E - A)X = Y.$$

Последнее соотношение можно использовать для решения следующих задач:

1) определение объемов конечного продукта отраслей $Y_1,\ Y_2,\ \ldots,.Y_n$ по заданным объемам валовой продукции:

$$Y = (E - A)X;$$

2) определение валовой продукции отраслей $X_1,\ X_2,\ \ldots,.X_n$ по заданным объемам конечной продукции:

$$X = (E - A)^{-1} \cdot Y,\ X = BY, \quad B = (E - A)^{-1}.$$

Элементы b_{ij} - обратной матрицы $B=(E-A)^{-1}$ называют *коэффициентами полных (материальных) затрат* – это затраты *i*-й отрасли на каждый рубль конечной продукции j.

Матрицу *B* называют *матрицей коэффициентов полных затрат*, а матрицу *A – матрицей коэффициентов прямых затрат*.

Пример.

Предприятие выпускает продукцию трех видов, причем каждый из его цехов специализируется на выпуске только одного вида: первый цех выпускает продукцию первого вида, второй – продукцию второго вида, третий - продукцию третьего вида. Часть продукции идет на внутреннее потребление, остальная часть является конечным продуктом.

Заданы экономические оценки коэффициентов прямых затрат и объемов конечной продукции:

$$A=\begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.4 \end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} 36 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Требуется составить баланс производства и распределения продукции предприятия.

Решение.

Модель баланса производства и распределения продукции предприятия можно представить следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} X_1 &= 0.1X_1+0.3X_2+0.2X_3+36 \\ X_2 &= 0.2X_1+0.2X_2+0.3X_3+11, \\ X_3 &= 0.1X_1+0.1X_2+0.4X_3+8 \end{aligned}$$

где x_1, x_2, x_3 – количество продукции соответственно первого, второго и третьего вида.

Решим систему уравнений методом Гаусса и определим валовую продукцию цехов x_1, x_2, x_3:

$$\begin{cases} 0.9x_1-0.3x_2-0.2x_3=36 \\ -0.2x_1+0.8x_2-0.3x_3=11 \\ -0.1x_1-0.1x_2+0.6x_3=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x_1-3x_2-2x_3=360 \\ 2x_1-8x_2+3x_3=-110 \\ x_1+x_2-6x_3=-80 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1+x_2-6x_3=-80 \\ 2x_1-8x_2+3x_3=-110 \\ 9x_1-3x_2-2x_3=360 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & | & -80 \\ 2 & -8 & 3 & | & -110 \\ 9 & -3 & -2 & | & 360 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & | & -80 \\ 0 & -10 & 15 & | & 50 \\ 0 & -12 & 52 & | & 1080 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & | & -80 \\ 0 & 2 & -3 & | & -10 \\ 0 & 3 & -13 & | & -270 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & | & -80 \\ 0 & 2 & 3 & | & -10 \\ 0 & 0 & -17 & | & -510 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 = -80 \\ 2x_2 - 3x_3 = -10 \\ -17x_3 = -510 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_3 = 30 \\ x_2 = \dfrac{-10+90}{2} = 40 \\ x_1 = -80 - 40 + 180 = 60 \end{matrix}$$

значит:

$$x_1 = 60, \quad x_2 = 40, \quad x_3 = 30.$$

Распределение продукции между цехами на внутреннее потребление определяем из соотношения:

$$X_{ij} = a_{ij} X_j, \text{ т. е. } x_{11} = 0.1 \cdot 60 = 6; \quad x_{12} = 0.3 \cdot 40 = 12 \text{ и т. д.}$$

Как следствие, баланс производства и распределения продукции предприятия – будут иметь вид Таблицы 2.

Таблица 2

Межпродуктовый баланс производства и распределения продукции					
Производящие структуры	Потребляющие структуры			Конечный продукт	Валовый продукт
	1	2	3		
1	6,0	12,0	6,0	36	60
2	12,0	8,0	9,0	11	40
3	6,0	4,0	12,0	8	30
Итого:	24	24	27	55	130

Часть 2. ВЕКТОРЫ. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

§1. Линейные операции над векторами

Вектором $\overline{AB}$ (или $\overline{a}$) называют отрезок, концы которого рассматриваются в определённом порядке: точка A – начальная, точка B – конечная (рис. 1).

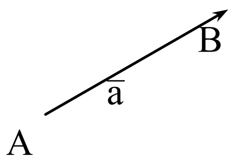


Рис. 1

Если конечная точка вектора совпадает с начальной, то вектор называется нулевым или нуль-вектором.

Длина вектора $\overline{AB}$, т.е. расстояние между его начальной и конечной точками, называется модулем этого вектора и обозначается символом $\left|\overline{AB}\right|$ (или $\left|\overline{a}\right|$).

Вектор, длина которого равна единице, называется единичным.

Векторы, расположенные на одной прямой или на параллельных прямых, называются коллинеарными. Для коллинеарных векторов можно указать прямую, которой они параллельны.

Векторы называются компланарными, если существует плоскость, которой они параллельны. Если такие векторы отнести к общему началу, то они будут лежать в одной плоскости.

Два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются равными ($\overline{a} = \overline{b}$), если выполняются следующие три условия: 1) векторы коллинеарны ($\overline{a} \parallel \overline{b}$); 2) векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ одинаково направлены (сонаправлены); 3) длины этих векторов равны ($\left|\overline{a}\right| = \left|\overline{b}\right|$).

Если хотя бы одно из этих условий не выполнено, векторы не будут равны.

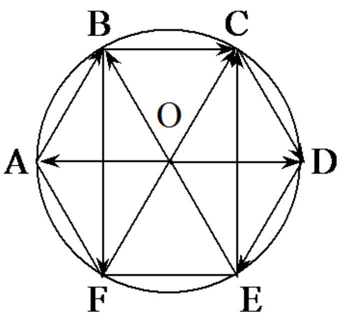


Рис. 2

Из векторов, изображённых на рис. 2 (в круг вписан правильный 6-угольник ABCDEF), равными будут лишь две пары векторов: $\overline{AB} = \overline{OC}$ и $\overline{BC} = \overline{OD}$. Остальные либо не параллельны, хотя могут иметь и одинаковые длины (например, $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{CD}$), либо параллельны, но противоположно направлены (например, $\overline{BC}$ и $\overline{OA}$, $\overline{AB}$ и $\overline{DE}$, $\overline{BF}$ и $\overline{EC}$, $\overline{OA}$ и $\overline{OD}$), либо вообще имеют разные длины.

Умножение вектора на число

Произведением вектора $\overline{a}$ на число m называют вектор $\overline{b}$ ($\overline{b} = m \cdot \overline{a}$), который удовлетворяет следующим требованиям:

1) вектор $\bar{b}$ коллинеарен вектору $\bar{a}$ ($\bar{b} \parallel \bar{a}$);

2) вектор $\bar{b}$ направлен в ту же сторону, что и вектор $\bar{a}$ (т.е. векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ сонаправлены), если число m положительно (m > 0), и вектор $\bar{b}$ имеет направление, противоположное вектору $\bar{a}$, если m < 0;

3) $|\bar{b}| = |m| \cdot |\bar{a}|$, т.е. длина вектора $\bar{b}$ равна длине вектора $\bar{a}$, умноженной на модуль числа m.

Из определения умножения вектора на число следует, что векторы, связанные соотношением $\bar{b} = m \cdot \bar{a}$, коллинеарны. Можно доказать и обратное: если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны, то они могут быть связаны соотношением: $\bar{b} = m \cdot \bar{a}$, т.е. соотношение $\bar{b} = m \cdot \bar{a}$ является необходимым и достаточным условием коллинеарности двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Вектор $-\bar{a} = (-1) \cdot \bar{a}$ называется противоположным вектору $\bar{a}$.

Имеет место следующее свойство: для любых чисел m, n и любого вектора $\bar{a}$ справедливо равенство: $m(n\bar{a}) = (m \cdot n) \cdot \bar{a}$.

Сложение векторов

Пусть заданы несколько векторов.

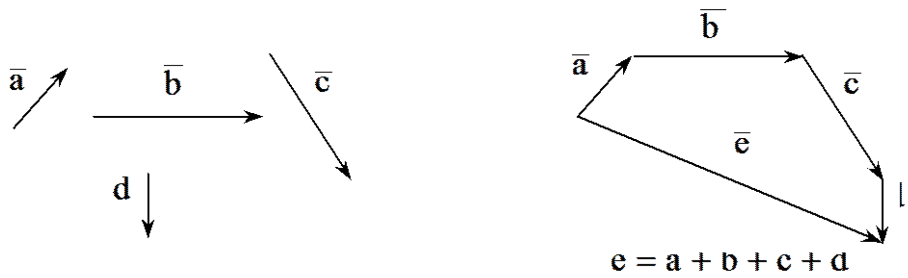
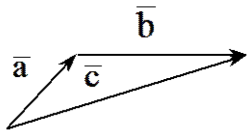


Рис. 3

Чтобы сложить несколько векторов, надо построить равные им векторы, располагая их так, чтобы начало каждого последующего вектора совпадало с концом предыдущего. Вектором суммы этих векторов будет замыкающий вектор, начало которого совпадает с началом первого вектора, а конец – с концом последнего вектора (рис. 3).

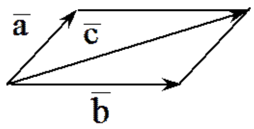
Два вектора можно сложить двумя способами:

1) по правилу треугольника, пристроив один из векторов к другому, и тогда вектором суммы будет замыкающий вектор, идущий из начала первого вектора к концу второго (рис. 4) и
2) по правилу параллелограмма, отнеся векторы к общему началу, и тогда вектор суммы будет совпадать с диагональю параллелограмма, построенного на этих векторах как на сторонах, начало которого совпадает с началом слагаемых векторов (рис. 5).



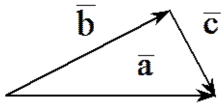
$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$

Рис. 4



$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$

Рис. 5



$\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$

Рис. 6

Свойства сложения векторов:

1) $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ (коммутативность, или переместительность);
2) $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$ (ассоциативность, или сочетательность);
3) $m(\bar{a} + \bar{b}) = m\bar{a} + m\bar{b}$ (дистрибутивность, или распределительность относительно умножения на скаляр);
4) для любых чисел m и n и любого вектора $\bar{a}$ $(m + n)\bar{a} = m\bar{a} + n\bar{a}$.

Вычитание векторов

Под разностью векторов $\bar{a} - \bar{b}$ понимают такой вектор $\bar{c}$, который при сложении с вектором $\bar{b}$ даёт вектор $\bar{a}$, т.е.

$$\bar{a} - \bar{b} = \bar{c}, \text{ если } \bar{c} + \bar{b} = \bar{a}$$

Чтобы построить вектор разности $\bar{a} - \bar{b}$, надо отнести векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ к общему началу, тогда начальной точкой вектора разности будет конец вектора $\bar{b}$, а конечной точкой – конец вектора $\bar{a}$ (рис. 6).

Поскольку $\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b})$, то чтобы из вектора $\bar{a}$ вычесть вектор $\bar{b}$, достаточно к вектору $\bar{a}$ прибавить вектор, противоположный вектору $\bar{b}$.

Проектирование вектора на ось

Пусть задана ось *l* с единичным вектором $\bar{e}$, а вектор $\overline{AB}$ – произвольный вектор пространства.

Чтобы ортогонально спроектировать вектор $\overline{AB}$ на ось *l*, проведём через точки A и B плоскости, перпендикулярные оси *l*, и отметим точки A1 и B1 пересечения этих плоскостей с осью *l* (рис. 7).

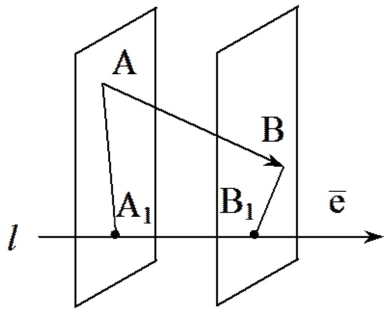


Рис. 7

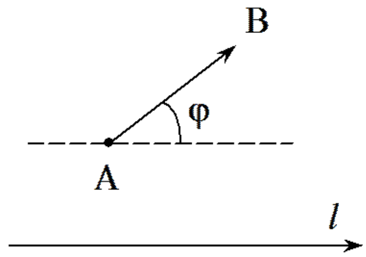


Рис. 8

Проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось *l* называют величину направленного отрезка $\overline{A_1B_1}$, т.е. его длину, взятую со знаком "+", если направление отрезка $\overline{A_1B_1}$ совпадает с направлением оси *l*, и со знаком"–", если эти направления противоположны.

Если вектор $\overline{AB}$ образует с осью *l* угол φ (рис. 8), то проекция вектора $\overline{AB}$ на ось *l* вычисляется по формуле:

$$\text{пр}_{\ell}\overline{AB} = \left|\overline{AB}\right| \cdot \cos\varphi.$$

Базис. Координаты вектора

Базисом в пространстве называют три некомпланарных вектора $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, взятых в определённом порядке. Каждый вектор $\bar{a}$ пространства можно единственным образом разложить по направлениям базисных векторов $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, т.е. представить вектор $\bar{a}$ в виде суммы трёх векторов, коллинеарных векторам $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$. На рис. 9

$$\bar{a} = \overline{ON} + \overline{NM} = = \left(\overline{OA} + \overline{OB}\right) + \overline{NM} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{NM} = \alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 + \alpha_3\bar{e}_3.$$

Коэффициенты разложения вектора $\bar{a}$ по базисным векторам $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, т.е. упорядоченная тройка чисел α1, α2, α3, называются координатами вектора $\bar{a}$ в базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$. Координаты вектора пишутся в круглых или фигурных скобках: $\bar{a} = (\alpha1, \alpha2, \alpha3)$. Так что запись $\bar{a} = (2; -3; \frac{5}{2})$ означает:

$$\bar{a} = 2\bar{e}_1 - 3\bar{e}_2 + \frac{5}{2}\bar{e}_3.$$

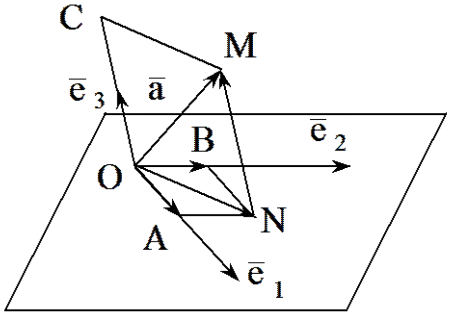


Рис. 9

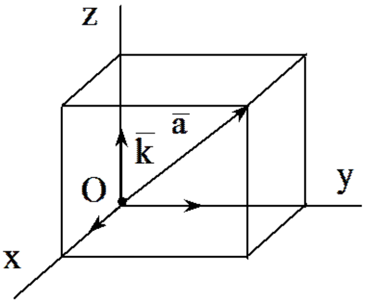


Рис. 10

Рассмотрим прямоугольную декартову систему координат Oxyz (рис. 10). Единичные векторы $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ на осях координат образуют ортонормированный базис в пространстве, а коэффициенты разложения произвольного вектора $\bar{a}$ пространства по базису $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ называются координатами вектора $\bar{a}$ в системе Oxyz, так что, если

$$\bar{a} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k},$$

то X, Y, Z – координаты вектора $\bar{a}$ или $\bar{a} = (X, Y, Z)$.

Координаты вектора $\bar{a}$ в прямоугольной системе координат являются проекциями этого вектора на оси координат, т.е.

$$X = \text{пр}_{Ox}\bar{a}; \qquad Y = \text{пр}_{Oy}\bar{a}; \qquad Z = \text{пр}_{Oz}\bar{a}.$$

Свойства координат векторов:

1. Равные векторы имеют равные координаты.
2. При умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число.
3. При сложении (вычитании) векторов их соответствующие координаты складываются (вычитаются).
4. Следствие. Координаты коллинеарных векторов пропорциональны.

Простейшие задачи

1. Если вектор $\overline{AB}$ задан координатами начальной и конечной точек:

A(xA, yA, zA) и B(xB, yB, zB), то вектор $\overline{AB}$ имеет координаты (xB–xA; yB–yA; zB–zA).

2. Модуль вектора $\bar{a}$ (X, Y, Z) находится по формуле: $|\bar{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$.

3. Расстояние между точками A(xA, yA, zA) и B(xB, yB, zB) вычисляется по формуле: $|\overline{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

4. Деление отрезка в данном отношении. Разделить направленный отрезок AB в отношении λ значит на прямой AB найти такую точку C, что $\overline{AC} = \lambda\overline{CB}$. Если A(xA, yA, zA), B(xB, yB, zB), то координаты нужной точки C определяются по формулам:

$$x_C = \frac{x_A + \lambda \cdot x_B}{1+\lambda};\ y_C = \frac{y_A + \lambda \cdot y_B}{1+\lambda};\ z_C = \frac{z_A + \lambda \cdot z_B}{1+\lambda}.$$

5. Если точка C(xC, yC, zC) – середина отрезка AB, то её координаты определяются по формулам:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2}; \qquad y_C = \frac{y_A + y_B}{2}; \qquad z_C = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

6. Направляющие косинусы вектора. Пусть α, β, γ – углы, которые вектор $\bar{a}$ образует с осями координат (рис. 11). Косинусы этих углов, т.е. cos α, cos β, cos γ, называются направляющими косинусами вектора $\bar{a}$. Пусть дан вектор $\bar{a}$ = (X, Y, Z). Поскольку

$$X = \text{пр}_{Ox}\bar{a} = |\bar{a}|\cos\alpha, \qquad Y = \text{пр}_{Oy}\bar{a} = |\bar{a}|\cos\alpha, \qquad Z = \text{пр}_{Oz}\bar{a} = |\bar{a}|\cos\alpha,$$

то

$$\cos\alpha = \frac{X}{|\bar{a}|}; \qquad \cos\beta = \frac{Y}{|\bar{a}|}; \qquad \cos\gamma = \frac{Z}{|\bar{a}|}.$$

А так как $|\bar{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$, то направляющие косинусы вектора $\bar{a}$ (X, Y, Z) вычисляются по формулам:

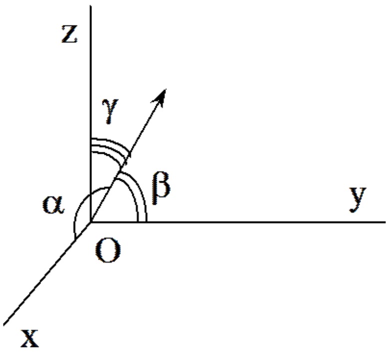


Рис. 11

$$\cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}};$$

$$\cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}.$$

Основное свойство направляющих косинусов вектора:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Задача 1. Даны 3 вершины параллелограмма ABCD: A(1; 2; -1), B(2; -1; 3) и C(-1; 0; 2). Найти четвёртую вершину D (рис. 12).

Решение

Обозначим координаты точки D(x, y, z), тогда $\overline{BC}$(-3; 1; -1); $\overline{AD}$(x–1; y–2; z+1). Поскольку $\overline{BC} = \overline{AD}$, то их координаты равны, т.е.:

$$\begin{cases} -3 = x - 1; \\ 1 = y - 2; \\ -1 = z + 1, \end{cases}$$ откуда находим:

x = –2; y = 3; z = –2, т.е. D(-2; 3; -2).

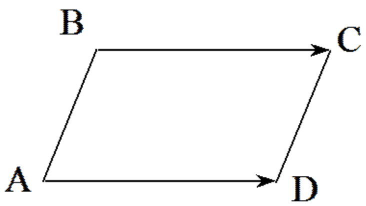


Рис. 12

Задача 2. Даны вершины ΔABC: A(3; 3; -1), B(-1; 2; 4) и C(5; -6; 2). Найти длину его медианы AD (рис. 13).

Решение

Найдём координаты точки D как середины отрезка BC:

$$x_D = \frac{-1+5}{2} = 2; \qquad y_D = \frac{2-6}{2} = -2; \qquad z_D = \frac{4+2}{2} = 3,$$

так что D(2; -2; 3). Координаты вектора $\overline{AD}$: $\overline{AD}$ (-1; -5; 4).

Длина медианы AD:

$$\left|\overline{AD}\right| = \sqrt{1+25+16} = \sqrt{42}.$$

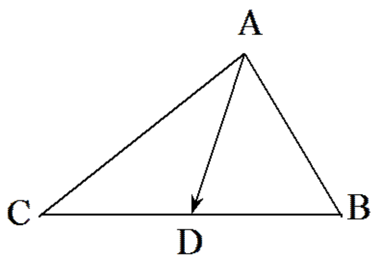


Рис. 13

Задача 3. Дан вектор $\bar{c} = 4\bar{i} + 7\bar{j} - 4\bar{k}$. Найти вектор $\bar{d}$, параллельный вектору $\bar{c}$, противоположного с ним направления, если $|\bar{d}| = 27$.

Решение

1 способ.

Вектор $\bar{c}$ имеет координаты: $\bar{c}$ (4; 7; -4). Поскольку $\bar{c} \parallel \bar{d}$, то они связаны соотношением:

$$\bar{d} = k \cdot \bar{c} \Rightarrow |\bar{d}| = |k| \cdot |\bar{c}|;\ |\bar{d}| = 27;\ |\bar{c}| = \sqrt{16+49+16} = 9,$$

так что $27 = |k| \cdot 9 \Rightarrow |k| = \dfrac{27}{9} = 3 \Rightarrow k = \pm 3$, а так как векторы $\bar{c}$ и $\bar{d}$ противоположно направлены, то $k = -3$, так что $\bar{d} = -3\bar{c} \Rightarrow \bar{d}$ (-12; -21; 12).

2 способ.

Поскольку координаты коллинеарных векторов пропорциональны, а $\bar{c}$ (4; 7; -4), то вектор $\bar{d}$ имеет координаты $\bar{d}$ (4k; 7k; -4k), где коэффициент пропорциональности k отрицателен, поскольку векторы $\bar{c}$ и $\bar{d}$ противоположно направлены. По условию $|\bar{d}| = 27$, т.е.

$$\sqrt{16k^2 + 49k^2 + 16k^2} = 27 \Rightarrow \sqrt{81k^2} = 27 \Rightarrow$$

$$9 \cdot |k| = 27 \Rightarrow |k| = 3 \Rightarrow k = -3 \Rightarrow \bar{d}\ (-12; -21; 12).$$

Задача 4. Вектор $\bar{a}$ составляет с осями Oy и Oz углы 60° и 45°, а с осью Ox – тупой угол. Вычислить его координаты при условии, что $|\bar{a}| = 6$.

Решение

Координаты вектора $\bar{a}$ найдём по формулам

$$\begin{cases} x = |\bar{a}|\cos\alpha; \\ y = |\bar{a}|\cos\beta; \\ z = |\bar{a}|\cos\gamma, \end{cases} \qquad (*)$$

где $|\bar{a}| = 6$, а $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы $\bar{a}$.

$$\cos\beta = \cos 60° = \frac{1}{2};\ \cos\gamma = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$\cos\alpha$ найдём из основного свойства направляющих косинусов: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$:

$$\cos^2\alpha+\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=1 \Rightarrow \quad \cos^2\alpha=\frac{1}{4} \Rightarrow \quad \cos\alpha=\pm\frac{1}{2},$$

но так как угол α – тупой, то $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$.

По формулам (*) находим:

$$x=6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-3; \qquad y=6\cdot\frac{1}{2}=3; \qquad z=6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2},$$

так что $\bar{a}$ (-3; 3; $3\sqrt{2}$).

Задача 5. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол φ = 60°, причём $|\bar{a}|$ = 5; $|\bar{b}|$ = 8. Найти $|\bar{a}+\bar{b}|$ и $|\bar{a}-\bar{b}|$ (рис. 14)

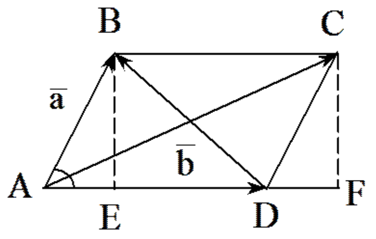


Рис. 14

Решение

$\bar{a}+\bar{b}$ = $\overline{AC}$; $\bar{a}-\bar{b}$ = $\overline{DB}$, следовательно надо найти длины отрезков AC и DB.

Из ΔABE имеем:

$\angle$BAE = 60°; AB = 5 $\Rightarrow$ AE = AB·cos60° = 5·$\frac{1}{2}$ =

= $\frac{5}{2}$ = 2,5; BE = AB·sin60° = 5·$\frac{\sqrt{3}}{2}$ = $\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

Тогда ED = 8 – 2,5 = 5,5 = $\frac{11}{2}$ и из ΔBED по теореме Пифагора имеем:

$$|\overline{DB}|=\sqrt{BE^2+ED^2}=\sqrt{\frac{75}{4}+\frac{121}{4}}=\sqrt{\frac{196}{4}}=\sqrt{49}=7.$$

Рассмотрим ΔACF: AF = AD + DF = 8 + 2,5 = 10,5 = $\frac{21}{2}$ (так как DF = AE);

CF = BE = $\frac{5\sqrt{3}}{2}$. По теореме Пифагора имеем:

$$|\overline{AC}|=\sqrt{AF^2+CF^2}=\sqrt{\frac{441}{4}+\frac{75}{4}}=\sqrt{\frac{516}{4}}=\sqrt{129}.$$

Ответ: $|\bar{a}+\bar{b}|$ = $\sqrt{129}$; $|\bar{a}-\bar{b}|$ = 7.

Задачи для решения

1.1. Что можно утверждать о ненулевых векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если: а) $|\bar{a}+\bar{b}|$ =

$= |\bar{a}| - |\bar{b}|$; б) $|\bar{a} - \bar{b}| = |\bar{a}| + |\bar{b}|$; в) $|\bar{a} + \bar{b}| = |\bar{a} - \bar{b}|$; г) $\bar{a} + \bar{b} \perp \bar{a} - \bar{b}$.

1.2. Точки K и L являются серединами сторон DC и CD параллелограмма ABCD. Полагая $\overline{AK} = \bar{k}$, $\overline{AL} = \bar{\ell}$, выразить через $\bar{k}$ и $\bar{\ell}$ векторы $\overline{BC}$ и $\overline{CD}$.

1.3. Дано: ABCD – параллелограмм; K, E, F, H – середины сторон $\overline{DC}$, AD, BC, AB. Полагая $\overline{AE} = \bar{a}$, $\overline{AF} = \bar{b}$, выразить через $\bar{a}$ и $\bar{b}$ векторы $\overline{KB}$, $\overline{CH}$, $\overline{DO}$ (O – центр параллелограмма), $\overline{AO}$, $\overline{AK}$, $\overline{HD}$.

1.4. В ромбе ABCD диагонали $\overline{AC} = \bar{a}$, $\overline{BD} = \bar{b}$. Разложить по этим двум векторам векторы, совпадающие со сторонами ромба.

1.5. В треугольнике ABC векторы $\overline{AB} = \bar{c}$, $\overline{AC} = \bar{b}$ и медиана $\overline{AD} = \bar{p}$. Разложить вектор $\bar{p}$ по направлениям $\bar{b}$ и $\bar{c}$, разложить вектор $\bar{b}$ по направлениям $\bar{p}$ и $\bar{c}$.

1.6. На трёх некомпланарных векторах $\overline{AB} = \bar{p}$, $\overline{AD} = \bar{q}$, $\overline{AA'} = \bar{r}$ построен параллелепипед ABCDA'B'C'D'. Выразить через $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$ векторы, совпадающие с рёбрами, диагональю параллелепипеда и диагоналями граней этого параллелепипеда, для которых вершина A' служит началом.

1.7. Дан тетраэдр OABC. Полагая $\overline{OA} = \bar{a}$, $\overline{OB} = \bar{b}$, $\overline{OC} = \bar{c}$, выразить через $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ векторы $\overline{MN}$, $\overline{PQ}$ и $\overline{RS}$, где M, P, R – середины рёбер $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, а N, Q и S – середины соответственно противоположных рёбер.

1.8. В правильном 6-угольнике ABCDEF $\overline{FA} = \bar{p}$, $\overline{FE} = \bar{q}$. Выразить через $\bar{p}$ и $\bar{q}$ векторы $\overline{FC}$, $\overline{BD}$, $\overline{EC}$, $\overline{DA}$ и $\overline{CA}$.

1.9. В равнобедренной трапеции ABCD $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$; $\overline{AB} = \bar{a}$, $\overline{AD} = \bar{b}$. Найти ортогональные проекции векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ и $\overline{DA}$ на ось ℓ, имеющую направление $\overline{AD}$.

1.10. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ взаимно перпендикулярны, причём $|\bar{a}| = 5$; $|\bar{b}| = 12$. Найти $|\bar{a} + \bar{b}|$ и $|\bar{a} - \bar{b}|$.

1.11. В равнобедренной трапеции ABCD (AB = CD) $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$; $\overline{AB} = \bar{b}$, $\overline{AD} = \bar{a}$. Найти $\overline{BC}$ и $\overline{CD}$.

1.12. Три силы $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$ приложены к одной точке и взаимно перпендикулярны. Определить величину их равнодействующей $\bar{F}$, если $|\bar{p}| = 4$, $|\bar{q}| = 6$, $|\bar{r}| = 8$.

1.13. Найти $|\bar{a} + \bar{b}|$, если $|\bar{a}| = 11$; $|\bar{b}| = 23$; $|\bar{a} - \bar{b}| = 30$.

1.14. В прямоугольной трапеции ABCD сторона CD образует с основанием AD угол 45°, при этом $\overline{BC} = \bar{a}$, $\overline{CD} = \bar{b}$. Найти $\overline{DA}$, если $|\bar{a}| = 1$; $|\bar{b}| = \sqrt{8}$.

1.15. Дано: A(3; 5; -2), B(1; -2; 3). Найти $|\overline{AB}|$.

1.16. Дано: A(1; -1; 1), B(2; 3; -4), C(-1; 5; 3), D(3; 1; -1). Найти координаты вектора $\bar{m} = \overline{BC} - 2\overline{AD}$.

1.17. Дано: $\overline{AB} = (3; 1; -1)$, B(-1; 2; 3). Найти координаты точки A.

1.18. Дана точка C(2; 0; -1). Вектор $\overline{BC} = 3\overline{AB}$, причём $\overline{AB} = 2\bar{i} - \bar{j} + 5\bar{k}$. Найти координаты точки B.

1.19. Даны точки A(2; γ; -1), B(1; 0; 2), C(α; -1; 1), D(4; -3; β). При каких значениях α, β, γ имеет место соотношение $\overline{AD} = 2\overline{BC}$.

1.20. Дана точка A(1; -3; 4). Найти координаты точки C – середины вектора $\overline{AB}$ (-6; 4; 8).

1.21. Расстояние между точками A(x; 6; -1) и B(7; y; 3) делится в точке M(1; 4; z) пополам. Найти неизвестные координаты этих точек.

1.22. Дано: $\overline{AB} = (5; -1; 1)$ и точка D(-7; 1; -1), причём $\overline{AB} = \overline{CD}$. Найти координаты точки C.

1.23. Даны: A(-2; 3; 1), C(3; -2; 2), причём точка C – середина отрезка AB. Найти координаты точки B.

1.24. Проведён отрезок от точки A(1; -1; 3) до точки B(-1; 2; 4). До какой точки его нужно продолжить в том же направлении, чтобы его длина утроилась.

1.25. Точка A(-2; 1; 0) является вершиной общего угла двух подобных треугольников. Найти две другие вершины бо'льшего треугольника B1 и C1, если известны вершины меньшего: B(4; 3; -2), C(4; -1; 6), а отношение сходственных сторон равно $3/2$.

1.26. Доказать, что точки A(-3; -7; -5), B(0; -1; -2) и C(2; 3; 0) лежат на одной прямой, причём точка B расположена между A и C.

1.27. Даны точки A(1; 2; 1), B(2; -1; 3) и C(3; α; β). При каких α и β точка C лежит на прямой AB?

1.28. Даны векторы $\overline{a}$ (2; 3), $\overline{b}$ (1; -3), $\overline{c}$ (0; 9). При каком значении α векторы $\overline{p} = \overline{a} + \alpha\overline{b}$ и $\overline{q} = \overline{a} + \overline{c}$ коллинеарны?

1.29. Даны векторы $\overline{AB} = 2\overline{i} - \overline{j} + 3\overline{k}$, $\overline{AC} = 9\overline{i} - 5\overline{j} + 7\overline{k}$. Найти $\left|\overline{BC}\right|$.

1.30. Дан вектор $\overline{a}$ (3; -4; 12). Найти орт вектора $\overline{a}$.

1.31. Точки A(3; 2; -3), B(1; -4; -1) и C(-1; 2; 5) – вершины треугольника ABC. Найти длины его медиан.

1.32. Даны вершины треугольника: A(1; -3; 4), B(3; 1; 2) и C(-2; 4; 3). Найти координаты вектора, совпадающего с медианой $\overline{CM}$.

1.33. Доказать, что треугольник ABC равнобедренный, если A(3; 2; -1), B(1; -1; 3), C(-2; 1; -1).

1.34. Дан треугольник с вершинами A(1; 2; 3), B(3; 2; 1) и C(1; 4; 1). Выяснить, является ли треугольник равносторонним, равнобедренным или разносторонним.

1.35. Доказать, что 4-угольник, заданный вершинами A(5; 2; -1), B(1; -3; 4), C(-2; 1; 3) и D(2; 6; -2) – параллелограмм.

1.36. Даны три последовательные вершины параллелограмма: A(2; 3; -1), B(-1; 2; 2), C(0; 4; -3). Найти 4ую вершину D.

1.37. Проверить, что точки A(-1; 5; -10), B(5; -7; 8), C(-1; 1; -3) и D(3; -7; 9) являются вершинами трапеции.

1.38. Проверить коллинеарность векторов $\overline{a}$ (-3; 6; 12) и $\overline{b}$ (2; -4; -8). Установить зависимость между этими векторами.

1.39. Векторы $\overline{a}$ (3; 3; -1) и $\overline{b}$ (-2; 1; 3) являются сторонами параллелограмма. Найти длины его диагоналей.

1.40. На отрезке с концами A(1; 2; 5) и B(-2; 3; 1) найти точку, отсекающую его четвёртую часть, считая от точки A.

1.41. Из чисел $\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$; $\frac{\sqrt{2}}{4}$ выбрать те три, которые могут являться направляющими косинусами одного вектора.

1.42. Найти направляющие косинусы вектора $\overline{AB}$, если A(3; -2; 1), B(2; 5; 3).

1.43. Дано: $\overline{a} = 3\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k} - \frac{3\overline{i} - 2\left(\overline{j} + \overline{k}\right)}{4}$. Найти длину этого вектора и его направляющие косинусы.

1.44. Найти угол, который вектор $\overline{a}$ образует с осью Oy, если с осями Ox и Oz он образует соответственно углы 45° и 120°.

1.45. Найти координаты вектора $\bar{a}$, если $|\bar{a}|$ = 4 и он образует с осями Oy и Oz углы соответственно 45° и 60°, а с осью Ox – тупой угол.

1.46. Определить координаты вектора $\bar{a}$, образующего с осями координат равные углы, если $|\bar{a}| = 5\sqrt{3}$.

1.47. Даны две силы: $\bar{F}_1$ (2; 2; 2) и $\bar{F}_2$ (-1; 3; 5). Найти величину и направление их равнодействующей $\bar{R}$.

1.48. Дан вектор $\bar{c} = 4\bar{i} + 7\bar{j} - 4\bar{k}$. Найти вектор $\bar{d}$, параллельный вектору $\bar{c}$, противоположного с ним направления, если $|\bar{d}|$ = 27.

1.49. Дан вектор $\bar{a} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + 4\bar{k}$. Найти вектор $\bar{b}$, если известно, что он перпендикулярен оси Oz, его абсцисса равна абсциссе вектора $\bar{a}$ и $|\bar{b}| = |\bar{a}|$.

1.50. На плоскости даны два вектора: $\bar{p}$ (2; -3) и $\bar{q}$ (1; 2). Найти разложение вектора $\bar{a}$ (9; 4) по базису $\bar{p}$ и $\bar{q}$.

1.51. Даны три вектора: $\bar{a}$ (3; -1), $\bar{b}$ (1; -2) и $\bar{c}$ (-1; 7). Найти разложение вектора $\bar{p} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$ по базису $\bar{a}$, $\bar{b}$.

1.52. Даны 4 точки: A(1; -2), B(2; 1), C(3; 2), D(-2; 3). Найти разложение вектора $\overline{AB} - 2\overline{CB} + \overline{DB}$ по базису $\overline{AD}$, $\overline{AC}$.

1.53. Даны 4 вектора: $\bar{a}$ (2; 1; 0), $\bar{b}$ (1; -1; 2), $\bar{c}$ (2; 2; -1) и $\bar{d}$ (3; 7; -7). Показать, что векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ могут служить базисом, и разложить вектор $\bar{d}$ по базису $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

1.54. Показать, что векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ компланарны, и разложить вектор $\bar{c}$ по базису $\bar{a}$, $\bar{b}$:

а) $\bar{a}$ (2; -1; 2), $\bar{b}$ (1; 2; -3), $\bar{c}$ (3; -4; 7);

б) $\bar{a}$ (1; 1; 4), $\bar{b}$ (1; -2; 0), $\bar{c}$ (3; -3; 4);

в) $\bar{a}$ (3; 5; 0), $\bar{b}$ (1; 1; 2), $\bar{c}$ (5; 3; 4).

1.55. Показать, что векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ некомпланарны, и разложить вектор $\bar{d}$ по базису $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$:

а) $\bar{a}$ (2; 2; 3), $\bar{b}$ (1; 2; 3), $\bar{c}$ (1; 1; 1), $\bar{d}$ (3; 0; -2);

б) $\bar{a}$ (1; 1; -2), $\bar{b}$ (1; -1; 0), $\bar{c}$ (0; 2; 3), $\bar{d}$ (1; 1; 1);

в) $\bar{a}$ (1; 2; 0), $\bar{b}$ (3; 1; 1), $\bar{c}$ (4; 9; 0), $\bar{d}$ (0; -6; 1).

1.56. Дан вектор $\bar{c} = 16\bar{i} + 15\bar{j} + 12\bar{k}$. Найти координаты вектора $\bar{d}$, параллельного $\bar{c}$, противоположного с ним направления, если $|\bar{d}|$ = 50.

1.57. В прямоугольной трапеции боковая сторона $\overline{CD}$ составляет угол 45° с большим основанием AD. Найти $\overline{AB}$, если $\overline{CD}$ = $\bar{a}$; $\overline{AD}$ = $\bar{b}$.

1.58. Даны 2 вектора: $\bar{m}$(1; 2; -1) и $\bar{n}$(-2; 1; 2), имеющие общее начало. Найти координаты единичного вектора, имеющего направление биссектрисы угла между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

1.59. Два вектора $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j} - 2\bar{k}$ и $\bar{b} = 4\bar{j} - 3\bar{k}$ приложены к одной точке. Найти координаты вектора $\bar{m}$, направленного по биссектрисе угла между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $|\bar{m}|$ = $\sqrt{170}$.

1.60. Даны три вершины параллелограмма ABCD: A(3; -4; 7), B(-5; 3; -2), C(1; 2; -3). Найти вершину D, противоположную вершине B.

1.61. Проверить свойства средней линии треугольника с вершинами A(3; -1; 2), B(1; 2; -1) и C(-1; 1; -3).

1.62. Проверить, что 4 точки: A(3; -1; 2), B(1; 2; -1), C(-1; 1; -3), D(3; -5; 3) служат вершинами трапеции и что выполняются свойства средней линии трапеции.

1.63. Точки A(2; 1; 1), B(-1; 2; 3), C(0; 3; 5) являются последовательными вершинами параллелограмма. Найти длины его диагоналей.

1.64. Даны 2 смежные вершины параллелограмма: A(2; 0; -1) и B(1; 1; 3). Точка O(-1; 2; 5) является точкой пересечения его диагоналей. Найти координаты двух других вершин параллелограмма.

1.65. Доказать, что 4-угольник ABCD – ромб, если A(-1; 0; 3), B(2; 2; 4), C(3; 5; 2), D(0; 3; 1).

1.66. Даны 3 последовательные вершины правильного 6-угольника: A(-1; 0; 3), B(2; 2; 4), C(3; 5; 2). Найти остальные его вершины.

1.67. Зная одну из вершин треугольника A(-2; 5; 3) и векторы, совпадающие с двумя его сторонами $\overline{AB}$ (-1; 1; 2), $\overline{BC}$ (0; 2; 3), найти остальные вершины и вектор $\overline{CA}$.

1.68. Векторы $\bar{a}$ (2; -1; 2) и $\bar{b}$ (-3; -2; 6) приложены к одной точке. Определить координаты вектора $\bar{c}$, направленного по биссектрисе угла между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, при условии, что $|\bar{c}|$ = $\sqrt{210}$.

§2. Скалярное произведение двух векторов

Скалярным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos(\widehat{\bar{a},\bar{b}}). \qquad (1)$$

Скалярное произведение $\bar{a}\cdot\bar{b}$ положительно, если $\cos(\widehat{\bar{a},\bar{b}})>0$, т.е. если угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ острый, и $\bar{a}\cdot\bar{b}$ отрицательно, если угол между перемножаемыми векторами тупой.

Поскольку $|\bar{a}|\cos(\widehat{\bar{a},\bar{b}})=\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}$, $|\bar{b}|\cos(\widehat{\bar{a},\bar{b}})=\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b}$, то

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b}=|\bar{b}|\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a} \qquad (2)$$

Из формул (1) и (2) следуют формулы (3) и (4):

$$\cos(\widehat{\bar{a},\bar{b}})=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|} \qquad (3)$$

$$\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|} \qquad (4)$$

Свойства скалярного произведения

1) Скалярное произведение двух векторов коммутативно (переместительно): $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$.
2) Скалярное произведение ассоциативно (сочетательно) относительно умножения на число: $m\cdot(\bar{a}\cdot\bar{b})=(m\bar{a})\cdot\bar{b}=\bar{a}\cdot(m\bar{b})$.
3) Скалярное произведение дистрибутивно (распределительно) относительно сложения: $(\bar{a}+\bar{b})\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot\bar{c}+\bar{b}\cdot\bar{c}$.
4) Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы взаимно перпендикулярны:
$$\bar{a}\cdot\bar{b}=0\Leftrightarrow\bar{a}\perp\bar{b}.$$
5) Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля: $\bar{a}^2=|\bar{a}|^2$.

Механический смысл скалярного произведения

Если материальная точка под действием постоянной силы $\bar{F}$ совершила перемещение $\overline{OA}=\bar{a}$, то работа постоянной силы

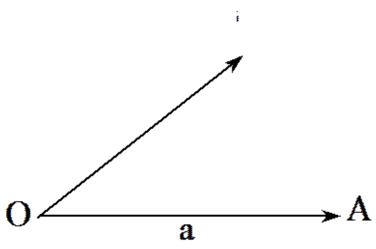


Рис. 15

$\overline{F}$ по прямолинейному перемещению материальной точки численно равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения: $W = \overline{F} \cdot \overline{a}$ (рис. 15).

Скалярное произведение двух векторов, заданных координатами

Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ заданы координатами: $\overline{a}$ = (Xa; Ya; Za) и $\overline{b}$(Xb; Yb; Zb), то их скалярное произведение вычисляется по правилу:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = Xa \cdot Xb + Ya \cdot Yb + Za \cdot Zb.$$

При этом формулы (3), (4) приобретают вид:

$$\cos(\overline{a} \,\hat{,}\, \overline{b}) = \frac{X_a X_b + Y_a Y_b + Z_a Z_b}{\sqrt{X_a^2 + Y_a^2 + Z_a^2} \cdot \sqrt{X_b^2 + Y_b^2 + Z_b^2}}; \qquad (3')$$

$$\text{пр}_{\overline{b}}\overline{a} = \frac{X_a X_b + Y_a Y_b + Z_a Z_b}{\sqrt{X_b^2 + Y_b^2 + Z_b^2}}, \qquad (4')$$

а необходимое и достаточное условие перпендикулярности векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ ($\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$) имеет вид:

$$X_a X_b + Y_a Y_b + Z_a Z_b = 0 \qquad (5)$$

Задача 1. Даны вершины 4-угольника ABCD: A(1; 3; -2), B(2α; 0; -1), C(5; α; 1), D(3; -3; 5α). При каком значении "α" диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны?

Решение

$\overline{AC}$ = (4; α-3; 3), $\overline{BD}$ = (3-2α; -3; 5α+1).

Чтобы диагонали AC и BD были перпендикулярны, потребуем, чтобы $\overline{AC} \cdot \overline{BD}$ = 0:

$4 \cdot (3 - 2\alpha) + (\alpha - 3) \cdot (-3) + 3 \cdot (5\alpha + 1) = 0 \Rightarrow 12 - 8\alpha - 3\alpha + 9 + 15\alpha + 3 = 0 \Rightarrow$

$4\alpha + 24 = 0 \Rightarrow \alpha = -6$.

Ответ: $\alpha = -6$.

Задача 1. Даны вершины ΔABC: A(2; 1; 4), B(-1; 2; 2), C(5; 1; 1). Определить его внешний угол при вершине A. (рис. 16).

Решение

Внешний угол DAC можно определить как угол между векторами $\overline{BA}$ и $\overline{AC}$:

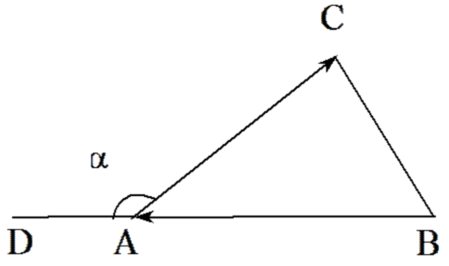


Рис. 16

$$\cos\alpha = \cos(\overline{BA} \,\hat{,}\, \overline{AC}) = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{AC}}{|\overline{BA}| \cdot |\overline{AC}|}. \quad (*)$$

$\overline{BA}$ = (3; -1; 2), $\overline{AC}$ = (3; 0; -3) $\Rightarrow$ (подставляем в (*)) $\Rightarrow$

$$\cos\alpha = \frac{3\cdot 3 + 0\cdot(-1) + 2\cdot(-3)}{\sqrt{9+1+4}\cdot\sqrt{9+0+9}} = \frac{3}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{18}} = = \frac{3}{3\cdot 2\cdot\sqrt{7}} = \frac{1}{2\sqrt{7}}.$$

Ответ: $\alpha = \arccos\frac{1}{2\sqrt{7}}$.

Задача 3. Даны 3 вектора: $\overline{a}$ (2; 2; 1), $\overline{b}$ (-1; 1; -2) и $\overline{c} = 3\overline{i} + 3\overline{j}$. Вычислить $\text{пр}_{\overline{a}+2\overline{b}}(2\overline{a} - \overline{c})$.

Решение

Обозначим $\overline{a} + 2\overline{b} = \overline{m}$; $2\overline{a} - \overline{c} = \overline{n}$. Тогда

$$\text{пр}_{\overline{m}}\overline{n} = \frac{\overline{m}\cdot\overline{n}}{|\overline{m}|}. \qquad (*)$$

Используя свойства координат векторов, находим координаты векторов $\overline{m}$ и $\overline{n}$: $\overline{m}$(0; 4; -3), $\overline{n}$(1; 1; 2). Подставляя в (*), находим:

$$\text{пр}_{\overline{m}}\overline{n} = \frac{0\cdot 1 + 4\cdot 1 - 3\cdot 2}{\sqrt{0+16+9}} = -\frac{2}{5}.$$

Задача 4. Даны 3 силы: $\overline{F}_1$(3;-4; 2), $\overline{F}_2$(2; 3; -5) и $\overline{F}_3$(-3; -2; 4), приложенные к одной точке. Вычислить работу, которую производит равнодействующая этих сил, когда её точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения M1(5; 3; -7) в положение M2(4; -1; -4).

Решение

Обозначим равнодействующую данных сил через $\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3$, тогда работа

$$\overline{W} = \overline{R}\cdot\overline{M_1M_2}. \qquad (*)$$

Находим координаты векторов: $\overline{R}$ (2; -3; 1); $\overline{M_1M_2}$ (-1; -4; 3).

По формуле (*) получаем:

$$W = 2\cdot(-1) - 3\cdot(-4) + 1\cdot 3 = 13 \text{ (ед.)}.$$

Задача 5. Найти скалярное произведение векторов $\overline{a} = 2\overline{m} - \overline{n}$ и $\overline{b} = \overline{m} + 3\overline{n}$, если $|\overline{m}|$ = 1; $|\overline{n}|$ = 2; $(\overline{m} \,\hat{,}\, \overline{n}) = \frac{\pi}{3}$.

Решение

$\bar{a}\cdot\bar{b}=(2\bar{m}-\bar{n})\cdot(\bar{m}+3\bar{n})=2\bar{m}^2-\bar{n}\cdot\bar{m}+6\bar{m}\cdot\bar{n}-3\bar{n}^2$. По свойству (1) скалярного произведения $\bar{n}\cdot\bar{m}=\bar{m}\cdot\bar{n}$, поэтому $-\bar{n}\cdot\bar{m}+6\bar{m}\cdot\bar{n}=5\bar{m}\cdot\bar{n}$. По свойству (5): $\bar{m}^2=|\bar{m}|^2$; $\bar{n}^2=|\bar{n}|^2$, так что $\bar{a}\cdot\bar{b}=2|\bar{m}|^2+5\bar{m}\cdot\bar{n}-3|\bar{n}|^2=$ $=2\cdot1+5\cdot|\bar{m}|\cdot|\bar{n}|\cos\frac{\pi}{3}-3\cdot4=2+5\cdot1\cdot2\cdot\frac{1}{2}-12=-5$.

Задача 6. Найти длину вектора $\bar{a}=\bar{p}-2\bar{q}$, если $|\bar{p}|=2$; $|\bar{q}|=1$; $(\bar{p}\,\hat{,}\,\bar{q})=\frac{2}{3}\pi$.

Решение

По свойству (5) скалярного произведения $\bar{a}^2=|\bar{a}|^2$, откуда следует: $|\bar{a}|=\sqrt{\bar{a}^2}$. Найдём $\bar{a}^2$: $\bar{a}^2=\bar{a}\cdot\bar{a}=(\bar{p}-2\bar{q})\cdot(\bar{p}-2\bar{q})=\bar{p}^2-4\bar{p}\bar{q}+4\bar{q}^2=$ $=|\bar{p}|^2-4|\bar{p}||\bar{q}|\cos(\bar{p}\,\hat{,}\,\bar{q})+4|\bar{q}|^2=4-4\cdot2\cdot1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+4\cdot1=4+4+4=12$.

Следовательно $|\bar{a}|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

Задачи для решения

2.1. При каком условии для двух ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ будет иметь место равенство: а) $\bar{a}\cdot\bar{b}=\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b}$; б) $\bar{a}\cdot\bar{b}=-|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|$; в) $\bar{a}\cdot\bar{b}=\cos(\bar{a}\,\hat{,}\,\bar{b})$.

2.2. Найти $\overline{AB}\cdot\overline{AC}$, если A(3; 2; -1), B(-1; 1; 2), C(5; 3; -3).

2.3. Вычислить $(\bar{a}+2\bar{b})\cdot\bar{a}$, если $\bar{a}$ = (3; 1; 2), $\bar{b}$ = (-2; -1; 3).

2.4. Вычислить угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $\bar{a}$ = (2; 2; 3), $\bar{b}$ = (-3; 1; -1).

2.5. Найти $\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}$, если $\bar{a}$ = (5; 3; -1), $\bar{b}$ = (1; 1; 2).

2.6. При каком значении "ℓ" векторы $\bar{a}=2\bar{i}-3\bar{j}+\bar{k}$ и $\bar{b}=3\bar{i}-\ell\bar{j}-2\bar{k}$ взаимно перпендикулярны?

2.7. Найти работу силы $\bar{F}$ = (2; 5; -3) по перемещению материальной точки из положения A(3; -1; 2) в положение B(2; 2; -3).

2.8. Даны координаты вершин ΔABC. Вычислить: а) углы треугольника, б) $\text{пр}_{\overline{AB}}(\overline{BC}-2\overline{AC})$, если

1) A(-3; 4; 1), B(0; 4; -2), C(1; 2; 2);

2) A(-1; -4; 2), B(3; 5; -1), C(2; 2; 4);

3) A(5; 1; -1), B(2; 2; 2), C(3; 0; -1);

4) A(2; 0; 1), B(1; -1; 3), C(0; 1; 2);

5) A(-3; 1; 2), B(1; 0; -1), C(2; 2; -3).

2.9. Даны 3 силы: $\bar{f}_1$ = (2; 5; -1); $\bar{f}_2$ = (1; -1; 2); $\bar{f}_3$ = (3; -2; 3). Вычислить работу равнодействующей этих сил по перемещению материальной точки из начала координат в точку A(2; -3; 4).

2.10. Даны вершины 3-угольника: A(2; -1; 4), B(-2; 5; 2) и C(4; 3; -4). Найти угол между его медианами, проведёнными из вершин A и B.

2.11. Даны вершины треугольника ABC: A(1; 1; -2), B(3; -3; 4) и C(2; 0; 3). Найти угол между медианой CD и стороной AB.

2.12. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j}$ и $\bar{b}$ = (0; -1; 1).

2.13. Зная векторы, совпадающие с двумя сторонами $\overline{AB}$ = (1; 2; -1) и $\overline{BC}$ = (2; 0; -4) треугольника ABC, найти внешний угол при вершине C.

2.14. Даны вершины 4-угольника: A(1; 2; 3), B(7; 3; 2), C(-3; 0; 6), D(9; 2; 4). Доказать, что его диагонали взаимно перпендикулярны.

2.15. Даны последовательные вершины 4-угольника: A(3; α; -1), B(2; 1; α), C(2α; -3; 0), D(1; 3; -1). При каком α его диагонали взаимно перпендикулярны?

2.16. Доказать, что 4-угольник с вершинами A(-3; 5; 6), B(1; -5; 7), C(8; -3; -1) и D(4; 7; -2) – квадрат.

2.17. Найти $\text{пр}_{(\bar{b}+2\bar{c})}(\bar{a}-\bar{b})$, если $\bar{a} = \left(\frac{1}{2}; 1; -\frac{1}{2}\right)$; $\bar{b} = \bar{i} - 2\bar{j} - 2\bar{k}$; $\bar{c}$ = (1; 1; 3).

2.18. Даны точки A(-2; 2; 3) B(-1;-3; 3). Найти проекцию вектора $\overline{AB}$ на ось, составляющую с координатными осями Oy и Oz углы β = 120°, γ = 45°, а с осью Ox – тупой угол.

2.19. Найти проекцию вектора $\bar{a}$ (2; 3; 4) на ось, образующую с координатными осями равные углы.

2.20. Под каким углом должна действовать на материальную точку постоянная сила $\bar{F}$ = (3; 5; 4), чтобы переместить её прямолинейно из положения A(1; 2; 3) в положение B(3; 1; 5)?

2.21. Сила $\bar{F}$ = (2; -1; 3) перемещает материальную точку из A(1; -2; 3) до некоторой точки B, лежащей на оси Oz. Найти координаты точки B, если известно, что работа, выполненная силой $\overline{F}$ по перемещению точки, равна 5 ед.

2.22. Найти единичный вектор $\overline{p}$, перпендикулярный вектору $\overline{a}$ (3; 6; 8) и к оси Ox.

2.23. В плоскости YOZ найти вектор $\overline{m}$, перпендикулярный вектору $\overline{a} = 3\overline{i} - 5\overline{j} + \overline{k}$, длина которого равна $\sqrt{13}$.

2.24. В плоскости YOZ найти вектор $\overline{m}$, перпендикулярный вектору $\overline{n}$(12; -3; 4) и имеющий одинаковую с ним длину.

2.25. Вектор $\overline{x}$, перпендикулярный к векторам $\overline{a}$ (3; 2; 2) и $\overline{b}$(18; -22; -5), образует с осью Oy тупой угол. Найти его координаты, зная, что $|\overline{x}|$ = 14.

2.26. Найти вектор $\overline{x}$, зная, что он перпендикулярен векторам $\overline{a}$ (2; 3; -1) и $\overline{b}$(1; -2; 3) и удовлетворяет условию: $\overline{x} \cdot \left(2\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}\right) = -6$.

2.27. Найти вектор $\overline{m}$, перпендикулярный векторам $\overline{a} = \overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}$ и $\overline{b} = -3\overline{j} + \overline{k}$, если $\text{пр}_{\overline{c}}\overline{m} = 3$, где $\overline{c}$ = (4; -4; 2).

2.28. Даны два вектора: $\overline{a}$ (1; 1; 1) и $\overline{b}$(1; 0; 0). Найти единичный вектор $\overline{c}$, перпендикулярный вектору $\overline{a}$ и образующий с вектором $\overline{b}$ угол в 60°.

2.29. Найти вектор $\overline{m}$, коллинеарный вектору $\overline{n}$(2; 3; 4), если $\text{пр}_{\overline{c}}\overline{m} = 16$, где $\overline{c}$ = $\overline{i} + 2\overline{j} + 2\overline{k}$.

2.30. Вектор $\overline{m}$, перпендикулярный к оси Oz и вектору $\overline{a}$ (8; -15; 3), образует острый угол с осью Ox. Найти его координаты, если $|\overline{m}|$ = 51.

2.31. Даны векторы $\overline{a}$ (m; 2; -3) и $\overline{b}$(-8; 0; 6). При каком значении "m" $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{b}|$?

2.32. Найти вектор $\overline{x}$, коллинеарный вектору $\overline{a}$ (3; 2; -1), если $\overline{x} \cdot \overline{a}$ = 4.

2.33. Даны два вектора: $\overline{a} = 3\overline{i} - \overline{j} + 5\overline{k}$ и $\overline{b} = \overline{i} + 2\overline{j} - 3\overline{k}$. Найти вектор $\overline{x}$, если $\overline{x} \perp \overline{k}$; $\overline{x} \cdot \overline{a}$ = 9; $\overline{x} \cdot \overline{b}$ = 4.

2.34. Вычислить угол между векторами $\overline{a}$ = $\overline{m} - 2\overline{n}$ и $\overline{b}$ = $6\overline{m} + 4\overline{n}$, если $|\overline{m}|$ = 1; $|\overline{n}|$ = $\frac{1}{2}$; $(\overline{m} \,\widehat{,}\, \overline{n}) = \frac{\pi}{2}$.

2.35. Найти угол между единичными векторами $\overline{m}$ и $\overline{n}$, если известно, что векторы $\overline{a}$ = $5\overline{m} - 4\overline{n}$ и $\overline{b}$ = $\overline{m} + 2\overline{n}$ взаимно перпендикулярны.

2.36. Вычислить $2\overline{a}\,\overline{b} - \overline{b}^2 + 5$, если $\overline{a}$ = $5\overline{m} + 2\overline{n}$, $\overline{b}$ = $\overline{m} + 3\overline{n}$; $|\overline{m}|$ = 2; $|\overline{n}|$ = 3;

$(\overline{m}\hat{,}\overline{n}) = \frac{2}{3}\pi$.

2.37. Вычислить длину диагоналей параллелограмма построенного на векторах $\overline{a} = \overline{m} - 2\overline{n}$, $\overline{b} = 3\overline{m} + \overline{n}$, если $|\overline{m}| = \sqrt{2}$; $|\overline{n}| = 1$; $(\overline{m}\hat{,}\overline{n}) = \frac{\pi}{4}$.

2.38. Зная, что $|\overline{a}| = 3$; $|\overline{b}| = 2$; $(\overline{a}\hat{,}\overline{b}) = \frac{\pi}{3}$, определить, при каком значении коэффициента α векторы $\overline{p} = \overline{a} - 2\overline{b}$ и $\overline{q} = 2\overline{a} + \alpha \cdot \overline{b}$ окажутся перпендикулярными?

2.39. Вычислить:

а) $(\overline{a} + 2\overline{b})(2\overline{a} - \overline{b})$, если $|\overline{a}| = \sqrt{3}$; $|\overline{b}| = 2$; $(\overline{a}\hat{,}\overline{b}) = \frac{\pi}{6}$;

б) $(\overline{a} - \overline{b})(4\overline{a} + \overline{b})$, если $|\overline{a}| = 1$; $|\overline{b}| = \sqrt{2}$; $(\overline{a}\hat{,}\overline{b}) = \frac{3}{4}\pi$;

в) $(\overline{a} + \overline{b})(2\overline{a} - \overline{b})$, если $|\overline{a}| = 2$; $|\overline{b}| = \sqrt{2}$; $(\overline{a}\hat{,}\overline{b}) = \frac{\pi}{4}$;

г) $(\overline{a} + \overline{b})(\overline{a} + 3\overline{b})$, если $|\overline{a}| = 1$; $|\overline{b}| = 1$; $(\overline{a}\hat{,}\overline{b}) = \frac{2}{3}\pi$;

д) $(\overline{a} - \overline{b})(2\overline{a} + \overline{b})$, если $|\overline{a}| = 2$; $|\overline{b}| = 1$; $(\overline{a}\hat{,}\overline{b}) = \frac{\pi}{3}$.

2.40. При каком $\ell \neq 0$ вектор $\overline{a} = \ell\overline{m} + 2\overline{n}$ будет единичным, если $|\overline{m}| = 3$; $|\overline{n}| = \frac{1}{2}$; $(\overline{m}\hat{,}\overline{n}) = \frac{2}{3}\pi$.

2.41. Найти модуль вектора $\overline{p} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$, если $|\overline{a}| = 4$; $|\overline{b}| = 2$; $|\overline{c}| = 6$; $(\overline{a}\hat{,}\overline{b}) = (\overline{a}\hat{,}\overline{c}) = (\overline{b}\hat{,}\overline{c}) = 60°$.

2.42. В треугольнике ABC найти $|\overline{AC}|$, если $\overline{AB} = \frac{3}{2}\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b}$, $\overline{CB} = \overline{a} + \overline{b}$, где $|\overline{a}| = \sqrt{3}$; $|\overline{b}| = 1$; $(\overline{a}\hat{,}\overline{b}) = \frac{\pi}{6}$.

2.43. К одной и той же точке приложены две силы $\overline{P}$ и $\overline{Q}$. Найти величину равнодействующей силы $\overline{R}$, если $|\overline{P}| = 7$; $|\overline{Q}| = 4$; $(\overline{P}\hat{,}\overline{Q}) = 120°$.

2.44. При каком значении коэффициента α векторы $\bar{p} = \frac{1}{2}\bar{a} + \alpha\bar{b}$ и $\bar{q} = \bar{a} - \bar{b}$ взаимно перпендикулярны, если $|\bar{a}| = 2$; $|\bar{b}| = \sqrt{8}$; $(\bar{a}\,\hat{,}\,\bar{b}) = \frac{3}{4}\pi$.

2.45. Векторы $\overline{AB} = \bar{m} - 2\bar{n}$ и $\overline{AC} = \bar{n} - \bar{m}$ служат сторонами параллелограмма. Найти косинус угла между диагональю ВС и стороной АС, если $|\bar{m}| = \sqrt{6}$; $|\bar{n}| = \sqrt{3}$; $(\bar{m}\,\hat{,}\,\bar{n}) = \frac{\pi}{4}$.

2.46. Вычислить косинус угла α между векторами $\bar{p} = \bar{a} + \bar{b}$ и $\bar{q} = \bar{a} - \bar{b}$, если $|\bar{a}| = \sqrt{3}$; $|\bar{b}| = 1$; $(\bar{a}\,\hat{,}\,\bar{b}) = \frac{\pi}{6}$.

2.47. В ΔABC найти косинус внутреннего угла B, если $\overline{AB} = \bar{a} + 4\bar{b}$; $\overline{BC} = -\bar{a} - \bar{b}$; $|\bar{b}| = \sqrt{2}$; $|\bar{a}| = 1$; $(\bar{a}\,\hat{,}\,\bar{b}) = \frac{3}{4}\pi$.

2.48. При каком положительном значении параметра ℓ векторы $\bar{a} = \bar{p} - \bar{q}$ и $\bar{b} = \ell\bar{p} + 2\bar{q}$ имеют одинаковую длину, если $|\bar{p}| = \sqrt{3}$; $|\bar{q}| = \frac{1}{2}$ и $\bar{p} \perp \bar{q}$.

2.49. Найти $\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b}$, если $\bar{a} = \bar{s} + \bar{t}$; $\bar{b} = \bar{s} - \bar{t}$, где $|\bar{s}| = 4$; $|\bar{t}| = 2$; $(\bar{s}\,\hat{,}\,\bar{t}) = \frac{2}{3}\pi$.

2.50. Дано: $|\bar{a}| = |\bar{b}| = 1$, $(\bar{a}\,\hat{,}\,\bar{b}) = \frac{\pi}{3}$. При каком значении параметра α вектор $\bar{c} = \alpha\bar{a} - 2\bar{b}$ перпендикулярен вектору $\bar{a}$?

§3. Векторное произведение двух векторов

Векторным произведением вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется вектор, обозначаемый символом $\bar{a} \times \bar{b}$ (или $[\bar{a}\,\bar{b}]$), который определяется следующими тремя условиями:

1) модуль этого вектора $|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin(\bar{a}\,\hat{,}\,\bar{b})$;
2) вектор $\bar{a} \times \bar{b}$ перпендикулярен к каждому из векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (а значит, перпендикулярен плоскости этих векторов);
3) вектор $\bar{a} \times \bar{b}$ направлен в ту сторону, из которой кратчайший поворот от век-

тора $\bar{a}$ к вектору $\bar{b}$ выглядит происходящим против часовой стрелки.

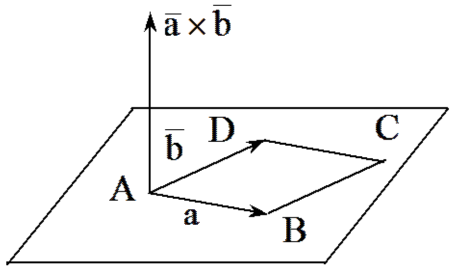


Рис. 17

Геометрический смысл векторного произведения

Поскольку

$$|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\sin(\bar{a}\,\hat{,}\,\bar{b}) = S_{ABCD},$$

то имеем: $|\bar{a}\times\bar{b}| = S_{ABCD}$, т.е. модуль векторного произведения двух векторов численно равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах как на сторонах.

Свойства векторного произведения

1. Векторное произведение двух векторов антипереместительно (антикоммутативно):

$$\bar{a}\times\bar{b} = -\bar{b}\times\bar{a}.$$

2. Векторное произведение сочетательно (ассоциативно) относительно скалярного множителя:

$$m(\bar{a}\times\bar{b}) = (m\bar{a})\times\bar{b} = \bar{a}\times(m\bar{b}).$$

3. Векторное произведение распределительно (дистрибутивно) относительно сложения:

$$(\bar{a}+\bar{b})\times\bar{c} = \bar{a}\times\bar{c} + \bar{b}\times\bar{c}$$

4. Векторное произведение двух ненулевых векторов равно нулю (нулевому вектору) тогда и только тогда, когда эти векторы коллинеарны.

Механический смысл векторного произведения

Если вектор $\bar{b}$ изображает силу, приложенную к какой либо точке М, а вектор $\bar{a}$ идёт из некоторой точки О в точку М, то вектор $\bar{a}\times\bar{b}$ представляет собой момент силы $\bar{b}$ относительно точки О.

Векторное произведение двух векторов, заданных координатами

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы координатами, например, $\bar{a}$ = (Xa; Ya; Za), $\bar{b}$ = (Xb; Yb; Zb), то их векторное произведение вычисляется по формуле:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ X_a & Y_a & Z_a\\ X_b & Y_b & Z_b\end{vmatrix}.$$

Например, если $\bar{a}$ = (3; 1; -1); $\bar{b}$ = (2; 3; -4), то

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 3 & 1 & -1\\ 2 & 3 & -4\end{vmatrix}=\bar{i}\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & -4\end{vmatrix}-\bar{j}\cdot\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & -4\end{vmatrix}+\bar{k}\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-\bar{i}+10\bar{j}+7\bar{k}.$$

Площадь параллелограмма, построенного на заданных векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, равна:

$$S=\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|=\sqrt{1+100+49}=5\sqrt{6}\ \text{(ед2).}$$

Задача 1. Вычислить $\left|\left(\bar{a}+2\bar{b}\right)\times\left(3\bar{c}-\bar{a}-\bar{b}\right)\right|$, если $\bar{a}=2\bar{i}-\bar{j}+3\bar{k}$; $\bar{b}$(-1; 1; -2); $\bar{c}=-2\bar{j}+\bar{k}$.

Решение

Имеем: $\bar{a}$ (2; -1; 3); $\bar{b}$ (-1; 1; -2); $\bar{c}$ (0; -2; 1).

Обозначим: $\bar{a}+2\bar{b}=\bar{m}$; $3\bar{c}-\bar{a}-\bar{b}=\bar{n}$, тогда $\bar{m}$ (0; 1; -1); $\bar{n}$ (-1; -6; 2). Надо найти $\left|\bar{m}\times\bar{n}\right|$.

$$\bar{m}\times\bar{n}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & -6 & 2\end{vmatrix}=-4\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}.$$

$$\left|\bar{m}\times\bar{n}\right|=\sqrt{16+1+1}=3\sqrt{2}.$$

Задача 2. Вычислить площадь ΔABC, если A(2; -1; 3), B(1; 1 ;4), C(-2; 3; 1).

Решение

Площадь треугольника ABC рана половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, а значит

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|.$$

Находим координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$: $\overline{AB}$ (-1; 2; 1), $\overline{AC}$ (-4; 4; -2).

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -1 & 2 & 1\\ -4 & 4 & -2\end{vmatrix}=-8\bar{i}-6\bar{j}+4\bar{k}.$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{64+36+16}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{29}=\sqrt{29}\ \text{(ед2)}.$$

Задача 3. Сила $\overline{F}(3; 3; -2)$ приложена к точке A(2; 1; -1). Определить момент этой силы относительно точки B(1; -2; 4).

Решение

Момент силы $\overline{F}$ относительно точки B вычисляем по формуле:

$$\overline{M}_B=\overline{BA}\times\overline{F}.$$

$\overline{BA}$ имеет координаты (1; 3; -5); $\overline{F}(3; 3; -2)$.

$$\overline{M}_B=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & 3 & -5\\ 3 & 3 & -2\end{vmatrix}=9\bar{i}-13\bar{j}-6\bar{k}\ \text{ или }\ \overline{M}_B(9; -13; -6).$$

Задача 4. Даны три последовательные вершины параллелограмма: A(5; 2; 7), B(6; 1; 9), C(5; 2; 8). Найти высоту этого параллелограмма, опущенную на сторону AB.

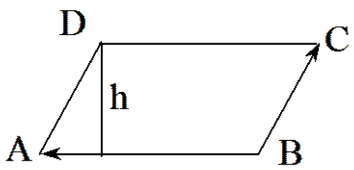


Рис. 18

Решение

С одной стороны, $S_{ABCD}=\left|\overline{BA}\times\overline{BC}\right|$, с дугой стороны $S_{ABCD}=\left|\overline{BA}\right|\cdot h$, так что $\left|\overline{BA}\times\overline{BC}\right|=\left|\overline{BA}\right|\cdot h$, откуда следует:

$$h=\frac{\left|\overline{BA}\times\overline{BC}\right|}{\left|\overline{BA}\right|}.$$

Находим координаты векторов: $\overline{BA}$ (-1; 1; -2); $\overline{BC}$ (-1; 1; -1); $\left|\overline{BA}\right|=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}$.

$$\overline{BA}\times\overline{BC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -1 & 1 & -2\\ -1 & 1 & -1\end{vmatrix}=\bar{i}+\bar{j}\quad\Rightarrow\quad\left|\overline{BA}\times\overline{BC}\right|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}\quad\Rightarrow\quad h=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Задача 5. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\bar{a}| = 5$; $|\bar{b}| = 2$, вычислить $\left|\left(3\bar{a}+2\bar{b}\right)\times\left(\bar{a}-\bar{b}\right)\right|$.

Решение

$$\left(3\bar{a}+2\bar{b}\right)\times\left(\bar{a}-\bar{b}\right)=\left(3\bar{a}\right)\times\bar{a}+\left(2\bar{b}\right)\times\bar{a}-\left(3\bar{a}\right)\times\bar{b}-\left(2\bar{b}\right)\times\bar{b}=2\left(\bar{b}\times\bar{a}\right)-$$
$$-3\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)=2\left(\bar{b}\times\bar{a}\right)+3\left(\bar{b}\times\bar{a}\right)=5\left(\bar{b}\times\bar{a}\right).$$

(Поскольку векторы $3\bar{a}$ и $\bar{a}$ коллинеарны, их векторное произведение равно нулю: $\left(3\bar{a}\right)\times\bar{a}=0$, аналогично $\left(2\bar{b}\right)\times\bar{b}=0$).

$$\left|\left(3\bar{a}+2\bar{b}\right)\times\left(\bar{a}-\bar{b}\right)\right|=\left|5\left(\bar{b}\times\bar{a}\right)\right|=5\left|\bar{b}\times\bar{a}\right|=5\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|=5|\bar{a}||\bar{b}|\sin(\bar{a}\,\hat{,}\,\bar{b})=5\cdot5\cdot2\sin\frac{\pi}{2}=$$
$= 50.$

Задача 6. В треугольнике ABC заданы $\overline{AB} = \bar{m}-6\bar{n}$ и $\overline{BC} = 3\bar{m}+2\bar{n}$, где $|\bar{m}| = 1$; $|\bar{n}| = \sqrt{3}$; $(\bar{m}\,\hat{,}\,\bar{n})=\frac{\pi}{6}$. Найти высоту этого треугольника, опущенную на сторону AC.

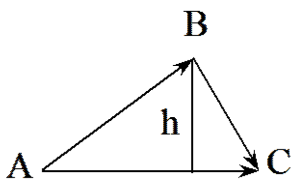


Рис. 19

Решение

Для площади ΔABC имеем две формулы: $S=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{BC}\right|$ и $S=\frac{1}{2}\left|\overline{AC}\right|h$. Приравнивая правые части, получаем формулу:

$$h=\frac{\left|\overline{AB}\times\overline{BC}\right|}{\left|\overline{AC}\right|} \qquad (*)$$

$$\overline{AB}\times\overline{BC}=\left(\bar{m}-6\bar{n}\right)\times\left(3\bar{m}+2\bar{n}\right)=\bar{m}\times\left(3\bar{m}\right)-\left(6\bar{n}\right)\times\left(3\bar{m}\right)+\bar{m}\times\left(2\bar{n}\right)-\left(6\bar{n}\right)\times\left(2\bar{n}\right)=$$
$$=-18\bar{n}\times\bar{m}+2\bar{m}\times\bar{n}=20\bar{m}\times\bar{n}.$$

$$\left|\overline{AB}\times\overline{BC}\right|=\left|20\bar{m}\times\bar{n}\right|=20|\bar{m}||\bar{n}|\sin(\bar{m}\,\hat{,}\,\bar{n})=20\cdot1\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}=10\sqrt{3}.$$

$\left|\overline{AC}\right|$ найдём с помощью скалярного произведения.

$$\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}=\left(\bar{m}-6\bar{n}\right)+\left(3\bar{m}+2\bar{n}\right)=4\bar{m}-4\bar{n}.$$

$$\left|\overline{AC}\right|=\sqrt{\overline{AC}^2}=\sqrt{\left(4\bar{m}-4\bar{n}\right)^2}=4\sqrt{\bar{m}^2-2\bar{m}\cdot\bar{n}+\bar{n}^2}=$$
$$=4\sqrt{|\bar{m}|^2-2|\bar{m}||\bar{n}|\cos(\bar{m}\,\hat{,}\,\bar{n})+|\bar{n}|^2}=4\sqrt{1-2\cdot1\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+3}=4\sqrt{1-3+3}=4.$$

Подставляя полученные результаты в формулу (*), имеем:

$$h = \frac{10\sqrt{3}}{4} = \frac{5}{2}\sqrt{3} \text{ (ед).}$$

Задачи для решения

3.1. Упростить выражение, задающее вектор $\bar{c}$, найти модуль вектора $\bar{c}$, если:

а) $\bar{c} = (2\bar{a} - \bar{b}) \times (\bar{a} - \bar{b})$; $|\bar{a}| = \sqrt{2}$; $|\bar{b}| = 2$; $(\bar{a} \hat{,} \bar{b}) = \frac{\pi}{4}$;

б) $\bar{c} = (\bar{a} - 3\bar{b}) \times (\bar{a} - 2\bar{b})$; $|\bar{a}| = \sqrt{3}$; $|\bar{b}| = 2$; $(\bar{a} \hat{,} \bar{b}) = \frac{2}{3}\pi$;

в) $\bar{c} = (2\bar{a} + 3\bar{b}) \times (\bar{a} - \bar{b})$; $|\bar{a}| = 1$; $|\bar{b}| = \sqrt{2}$; $(\bar{a} \hat{,} \bar{b}) = \frac{3}{4}\pi$;

г) $\bar{c} = (3\bar{a} + 2\bar{b}) \times (\bar{a} + \bar{b})$; $|\bar{a}| = 2$; $|\bar{b}| = \sqrt{3}$; $(\bar{a} \hat{,} \bar{b}) = \frac{\pi}{3}$;

д) $\bar{c} = (\bar{a} - 3\bar{b}) \times (\bar{a} - \bar{b})$; $|\bar{a}| = 2$; $|\bar{b}| = 2$; $(\bar{a} \hat{,} \bar{b}) = \frac{5}{6}\pi$.

3.2. Дан треугольник ABC. Найти площадь треугольника и длину высоты, опущенной на сторону AC, если:

а) A(0; -1; -2), B(-4; 3; 0), C(2; 3; -6);

б) A(1; -1; -1), B(3; 3; 3), C(-3; 3; -3);

в) A(-2; 0; -1), B(-1; 2; -3), C(0; 1; 1);

г) A(1; 0; -2), B(5; 2; 2), C(-1; -4; 2);

д) A(1; 0; -2), B(5; 3; -4), C(5; -3; 2).

3.3. Сила $\bar{F}$ приложена к точке A. Определить момент этой силы относительно точки N, если:

а) $\bar{F}$(3; 4; -2), A(2; -1; 2), N(0; 0; 0);

б) $\bar{F}$(1; -2; 4), A(1; 2; 3), N(3; 2; 1);

в) $\bar{F}$(1; -2; 5), A(2; -1; 3), N(-1; 3; 2);

г) $\bar{F}$(2; -4; 5), A(4; -2; 3), N(3; 2; -1);

д) $\bar{F}$(2; 2; 9), A(4; 2; -3), N(2; 4; 0).

3.4. Найти единичный вектор, перпендикулярный векторам $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$ и $\bar{b} = 2\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$.

3.5. Найти единичный вектор, параллельный вектору $(2\bar{a} + \bar{b}) \times (\bar{a} - \bar{b})$, где $\bar{a}\left(-1; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$, $\bar{b}\left(0; \frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

3.6. Найти длину и направление вектора $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$, если $\bar{a}$ (2; -1; 1), $\bar{b} = \bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k}$.

3.7. Найти $\left|\left(\bar{a} + \bar{b}\right) \times \left(\bar{b} - 2\bar{c}\right)\right|$, если $\bar{a}$ (1; 1; -2), $\bar{b} = \bar{i} - 2\bar{j} - 2\bar{k}$, $\bar{c}$ (1; -2; 1).

3.8. В параллелограмме ABCD даны $\overline{AB} = 3\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$ и $\overline{AD}$ = (2; 1; -2). Найти длину и направляющие косинусы вектора $\overline{AC} \times \overline{CD}$.

3.9. Найти $\text{пр}_{\bar{c}}\left(\bar{a} \times \bar{b}\right)$, если $\bar{a}$ (-8; 2; 3), $\bar{b}$ (1; 1; -5), $\bar{c} = 2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$.

3.10. Найти $\text{пр}_{\bar{b} \times \bar{a}}\left(\bar{a} + 2\bar{b}\right)$, если $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$; $\bar{b}$ = (0; 1; 2).

3.11. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} + \bar{b}$ и $\bar{c}$, если $\bar{a}$ (3; 3; -1), $\bar{b}$ (1; 0; -1), $\bar{c} = 2\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$.

3.12. Векторы $\bar{a}$ (3; -1; 3) и $\bar{b}$ (-2; 3; 1) являются сторонам параллелограмма. Найти площадь параллелограмма, построенного на его диагоналях.

3.13. Найти площадь параллелограмма ABCD, если его тремя последовательными вершинами являются точки A(3; 2; -2), B(0; 1; -3), C(2; -2; 1).

3.14. Найти высоту параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ (2; 1; -3) и $\bar{b} = \bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$, опущенную на вектор $\bar{b}$.

3.15. Проверить, что векторы $\bar{a}$ (6; -2; -9) и $\bar{b}$ (-7; 6; -6) могут быть приняты за рёбра куба. Найти третье ребро куба.

3.16. Даны три силы: $\bar{F}_1$ (1; -4; 2), $\bar{F}_2$ (3; 1; 0) и $\bar{F}_3$ (-2; 3; 1), приложенные к точке C(2; 1; 1). Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно начала координат.

3.17. На оси Oy найти точку, относительно которой момент силы $\bar{F}$ (2; 2; 2), приложенной к точке B(1; 1; 1) по величине равен 8 ед.

3.18. Найти точку, относительно которой момент силы $\bar{F}$ (1; -2; 3), приложенной к точке B(3; 2; 1), есть вектор $\overline{M} = 6\bar{i} - 2\bar{k}$.

3.19. Даны 3 вершины параллелограмма: A(3; -2; 4), B(4; 0; 3), C(7; 1; 5). Найти длину его высоты, опущенной из вершины C на сторону AD.

3.20. На двух векторах: $\bar{m} = \bar{i} + 4\bar{j} + 2\bar{k}$ и $\bar{n} = 3\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}$, как на диагоналях построен параллелограмм. Найти его стороны и площадь.

3.21. Дан треугольник с вершинами:

а) A(1; 2; 0), B(3; 0; -3), C(5; 2; 6);

б) A(3; 2; -3), B(5; 1; -1), C(1; -2; 1);

в) A(4; 2; 5), B(0; 7; 1), C(0; 2; 7);

г) A(-1; -2; 4), B(-4; -2; 0), C(3; -2; 1);

д) A(3; -1; 2), B(3; 0; 3), C(-2; 1; 1).

Найти:

а) внутренний угол B, $\text{пр}_{\overline{CA}}\overline{BC}$, длину высоты, опущенной на AB;

б) внутренний угол A, $\text{пр}_{\overline{BC}+2\overline{AC}}\overline{AB}$, длину высоты, опущенной на AC;

в) внутренний угол при вершине C, площадь треугольника и длину его высоты AD;

г) $\text{пр}_{\overline{CB}}\overline{AB}$, внешний угол при вершине B, длину высоты CM.

3.22. Даны вершины 4-угольника: A(5; 2; -1), B(1; -3; 4), C(-2; 1; 3), D(2; 6; -2). Доказать, что 4-угольник есть параллелограмм, найти его площадь, длины диагоналей, острый угол между диагоналями.

3.23. Определить момент силы величиной 5 ед, направленной по одному из рёбер куба, относительно его вершин.

3.24. Вектор $\bar{a}$ перпендикулярен векторам $\bar{b}$(4; -2; -3) и $\bar{c}$(0; 1; 3) и образует с осью Oy острый угол. Найти координаты вектора $\bar{a}$, если $|\bar{a}|$ = 26.

3.25. Даны разложения векторов, служащих сторонами треугольника, по двум взаимно перпендикулярным ортам: $\overline{AB} = 5\bar{a} + 2\bar{b}$; $\overline{BC} = 2\bar{a} - 4\bar{b}$ и $\overline{CA} = -7\bar{a} + 2\bar{b}$. Найти длину медианы AM и высоты AD треугольника ABC.

3.26. Даны три последовательные вершины параллелограмма: A(5; 2; 7), B(6; 1; 9), C(5; 2; 8). Найти высоту этого параллелограмма, опущенную на сторону $\overline{AB}$.

3.27. Вектор $\bar{m}$, перпендикулярный к оси Oz и к вектору $\bar{a}$(8; -15; 3), образует острый угол с осью Ox. Найти координаты вектора $\bar{m}$, если $|\bar{m}|$ = 51.

3.28. При каких значениях "ℓ" площадь треугольника, построенного на векторах $\bar{a}$(ℓ-1; 1; -1), $\bar{b}$(0; -1; 1), не меньше $\sqrt{2}$?

3.29. Даны точки: A(-1; 4; 3); B(-1; 20; 13); C(-1; 10; 7). Найти $|\overline{AC} \times \overline{CE}|$, где E – середина AB.

3.30. Дано: $\bar{a}$ = (4; -1; -1); $\bar{b} = \bar{i} + 2\bar{k}$; $\bar{c}$(1; 2m; 5). Найти значение "m", при котором $|\bar{a} \times \bar{b}| = \bar{a} \cdot \bar{c}$.

3.31. При каком значении α векторы $\bar{p} = 3\bar{a} + 2\bar{b}$ и $\bar{q} = \bar{a} - \alpha\bar{b}$ окажутся коллинеарными, если $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – неколлинеарные векторы.

3.32. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{p} = 5\overline{a} - 2\overline{b}$ и $\overline{q} = 2\overline{a} - 3\overline{b}$, где $|\overline{a}| = 2$; $|\overline{b}| = 3$; $(\overline{a} \,\hat{,}\, \overline{b}) = \dfrac{\pi}{6}$.

3.33. Вычислить синус угла между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a} = 2\overline{m} - 3\overline{n}$ и $\overline{b} = -\overline{m} + \overline{n}$, если $|\overline{m}| = 1$; $|\overline{n}| = \dfrac{1}{2}$; $(\overline{m} \,\hat{,}\, \overline{n}) = \dfrac{\pi}{2}$.

3.34. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют угол $\varphi = \dfrac{2}{3}\pi$. Зная, что $|\overline{a}| = 3$; $|\overline{b}| = \dfrac{2}{3}$, вычислить $\left[(\overline{a} + 2\overline{b})(2\overline{a} - 3\overline{b})\right]^2$.

3.35. Зная две стороны треугольника $\overline{AB} = 3\overline{p} - 2\overline{q}$ и $\overline{BC} = -\overline{p} + 2\overline{q}$, вычислить длину его высоты CD при условии, что $|\overline{p}| = 1$; $|\overline{q}| = \sqrt{3}$; $(\overline{p} \,\hat{,}\, \overline{q}) = \dfrac{\pi}{6}$

3.36. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\overline{a} = 2\overline{m} - 5\overline{n}$ и $\overline{b} = 3\overline{m} + \overline{n}$, если $|\overline{m}| = 1$; $|\overline{n}| = \sqrt{3}$; $(\overline{m} \,\hat{,}\, \overline{n}) = \dfrac{\pi}{6}$.

3.37. Дано: $\overline{AB} = \overline{m} - 6\overline{n}$; $\overline{BC} = 3\overline{m} + 2\overline{n}$, где $|\overline{m}| = 1$; $|\overline{n}| = \sqrt{3}$; $(\overline{m} \,\hat{,}\, \overline{n}) = \dfrac{\pi}{6}$. Найти $\left|\overline{AB} \times \overline{CA}\right|$ (рис. 20).

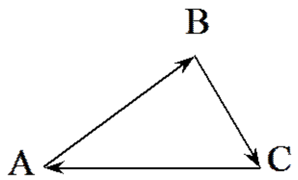


Рис. 20

3.38. Векторы $\overline{AB} = \overline{n} - 0{,}5\overline{m}$ и $\overline{AD} = 5{,}5\overline{m}$ являются сторонами параллелограмма. Найти площадь параллелограмма, построенного на его диагоналях, если $|\overline{m}| = 1$; $|\overline{n}| = \sqrt{3}$; $(\overline{m} \,\hat{,}\, \overline{n}) = \dfrac{\pi}{6}$.

§4. Смешанное произведение трёх векторов

Пусть даны три вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, из которых $\overline{a}$ будем считать первым, $\overline{b}$ – вторым, $\overline{c}$ – третьим (такая тройка векторов называется упорядоченной).

Тройка некомпланарных векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ называется правой, если кратчайший поворот от первого вектора ($\overline{a}$) ко второму ($\overline{b}$) виден с конца третьего вектора ($\overline{c}$) совершающимся против часовой стрелки; если же кратчайший поворот от $\bar{a}$ к $\bar{b}$ с конца вектора $\bar{c}$ выглядит происходящим по часовой стрелке, то тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ называется левой.

Если умножить вектор $\bar{a}$ векторно на $\bar{b}$, а полученный при этом вектор $\bar{a}\times\bar{b}$ умножить скалярно на вектор $\bar{c}$, то получится число, которое называется смешанным (или векторно-скалярным) произведением векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ и обозначается символами: $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$; $[\bar{a}\,\bar{b}]\cdot\bar{c}$; $(\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c})$.

Смешанное произведение трёх векторов, образующих правую тройку, положительно, левую – отрицательно.

Геометрический смысл смешанного произведения трёх векторов

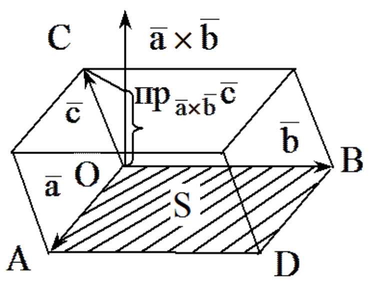


Рис. 21

Поскольку $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c} = |\bar{a}\times\bar{b}|\cdot \text{пр}_{\bar{a}\times\bar{b}}\bar{c}$, а $|\bar{a}\times\bar{b}| = S_{OADB}$, $\text{пр}_{\bar{a}\times\bar{b}}\bar{c} = \pm H_{\text{парал-да}}$ (рис. 21), то

$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c} = \pm S_{OADB}\cdot H = \pm V_{\text{парал-да}}$,

$|(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}| = V_{\text{парал-да}}$, т.е. модуль смешанного произведения трёх векторов численно равен объёму параллелепипеда, построенного на этих векторах как на рёбрах.

Свойства смешанного произведения

1. Круговая перестановка трёх сомножителей смешанного произведения не меняет его величины, т.е.

$$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c} = (\bar{b}\times\bar{c})\cdot\bar{a} = (\bar{c}\times\bar{a})\cdot\bar{b}.$$

2. Смешанное произведение трёх ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы компланарны, т.е. необходимым и достаточным условием компланарности ненулевых векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ является равенство нулю их смешанного произведения:

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = 0.$$

Если векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ заданы координатами: $\bar{a}$ = (X1; Y1; Z1), $\bar{b}$ = (X2; Y2; Z2), $\bar{c}$ = (X3; Y3; Z3), то их смешанное произведение вычисляется по формуле:

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}.$$

Задача 1. Выяснить, является правой или левой тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, если $\bar{a} = \bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{i} + 3\bar{j}$, $\bar{c}$ (3; -2; 1).

Решение

Находим смешанное произведение векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$:

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 8 - 18 + 2 = -21.$$

Поскольку $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} < 0$, тройка векторов – левая.

Задача 2. Даны 4 точки: A(2; -1; -1), B(1; 4; 3), C(0; -2; 1) и D(3; 2; -2). Найти объём тетраэдра ABCD.

Решение

Объём тетраэдра ABCD, как известно из элементарной геометрии, равен одной шестой объёма параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$, поэтому искомый объём найдём как одну шестую модуля смешанного произведения векторов $\overline{AB}$ (-1; 5; 4), $\overline{AC}$ (-2; -1; 2) и $\overline{AD}$ (1; 3; -1):

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} = \begin{vmatrix} -1 & 5 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -15;$$

$$V_{тетр.} = \frac{1}{6}\left|\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD}\right| = \frac{1}{6} \cdot 15 = 2{,}5 \text{ (ед}^3\text{)}.$$

Задача 3. Найти значение параметра "ℓ", при котором точки A(1; -1; 2), B(ℓ; 1; 1), C(2; -1; 0) и D(3; 0; 3) лежат в одной плоскости.

Решение

Если точки A, B, C, D лежат в одной плоскости, то векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$ компланарны, а значит их смешанное произведение равно нулю. Находим координаты векторов: $\overline{AB}$ (ℓ-1; 2; -1), $\overline{AC}$ (1; 0; -2) и $\overline{AD}$ (2; 1; 1). Их смешанное произведение:

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}=\begin{vmatrix}\ell-1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & -2\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=2\ell-13.$$

Приравнивая его к нулю, находим ℓ:

$$2\ell-13=0 \Rightarrow \ell=\frac{13}{2}.$$

Задача 4. На векторах $\bar{a}=2\bar{i}+\bar{k}$, $\bar{b}=2\bar{i}-3\bar{j}-2\bar{k}$ и $\bar{c}=-2\bar{i}+4\bar{j}+3\bar{k}$ построен параллелепипед. найти длину его высоты, опущенной на грань, в которой лежат векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Решение

Объём параллелепипеда равен модулю смешанного произведения векторов, являющихся его рёбрами, т.е. $V_{пар-да}=\left|\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\right|$.

С другой стороны, из элементарной геометрии известно, что $V_{пар-да}=S_{осн.}\cdot H$, так что $\left|\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\right|=S_{осн.}\cdot H$, откуда следует, что

$$H=\frac{\left|\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\right|}{S_{осн.}}.$$

Площадь основания, т.е. площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, найдём с помощью векторного произведения этих векторов, а именно: $S_{осн.}=\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|$, так что окончательно:

$$H=\frac{\left|\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\right|}{\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|}. \qquad (*)$$

Имеем: $\bar{a}$ (0; 2; 1), $\bar{b}$ (2; -3; -2), $\bar{c}$ (-2; 4; 3).

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}=\begin{vmatrix}0 & 2 & 1\\ 2 & -3 & -2\\ -2 & 4 & 3\end{vmatrix}=-2; \qquad \left|\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\right|=2;$$

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 0 & 2 & 1\\ 2 & -3 & -2\end{vmatrix}=-\bar{i}+2\bar{j}-4\bar{k}; \qquad \left|\bar{a}\times\bar{b}\right|=\sqrt{1+4+16}=\sqrt{21}.$$

Подставляя в формулу (*), находим H:

$$H=\frac{2}{\sqrt{21}}\ (\text{ед}).$$

Задача 5. Вычислить объём параллелепипеда, построенного на векторах $\bar a = \bar p + \bar q$, $\bar b = 2\bar p + \bar r$ и $\bar c = 3\bar p - \bar r$, где $\bar p$, $\bar q$, $\bar r$ – взаимно перпендикулярные орты, образующие правую тройку.

Решение

Поскольку $V = \left|\bar a\,\bar b\,\bar c\right|$, найдём $\left(\bar a \times \bar b\right)\cdot \bar c$. При этом учитываем свойства смешанного векторного и скалярного произведений, а также то, что $\bar p \times \bar p = \bar q \times \bar q = \bar r \times \bar r = 0$.

$\bar a\,\bar b\,\bar c = \left(\bar a \times \bar b\right)\cdot \bar c$.

$\bar a \times \bar b = \left(\bar p + \bar q\right)\times\left(2\bar p + \bar r\right) = 2\bar p \times \bar p + 2\bar q \times \bar p + \bar p \times \bar r + \bar q \times \bar r = 2\bar q \times \bar p + \bar p \times \bar r + \bar q \times \bar r$.

$\bar a\,\bar b\,\bar c = \left(2\bar q \times \bar p + \bar p \times \bar r + \bar q \times \bar r\right)\cdot\left(5\bar q - \bar r\right) =$

$= 10\left(\bar q \times \bar p\right)\cdot \bar q + 5\left(\bar p \times \bar r\right)\cdot \bar q + \left(\bar q \times \bar r\right)\cdot \bar q - 2\left(\bar q \times \bar p\right)\cdot \bar r - \left(\bar p \times \bar r\right)\cdot \bar r - \left(\bar q \times \bar r\right)\cdot \bar r =$

$= 10\bar p \cdot\left(\bar q \times \bar q\right) + 5\bar r \cdot\left(\bar q \times \bar p\right) + \bar r \cdot\left(\bar q \times \bar q\right) + 2\left(\bar p \times \bar q\right)\cdot \bar r - \bar p \cdot\left(\bar r \times \bar r\right) - \bar q\left(\bar r \times \bar r\right) =$

$= -5\bar p\,\bar q\,\bar r + 2\bar p\,\bar q\,\bar r = -3\bar p\,\bar q\,\bar r$.

Поскольку векторы $\bar p$, $\bar q$, $\bar r$ – единичные и взаимно перпендикулярны, имеем:

$$\left|\bar p \times \bar q\right| = \left|\bar p\right|\cdot\left|\bar q\right|\sin(\bar p \,\hat{,}\, \bar q) = 1\cdot 1\cdot \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

$$\bar p\,\bar q\,\bar r = \left(\bar p \times \bar q\right)\cdot \bar r = \left|\bar p \times \bar q\right|\cdot\left|\bar r\right|\cos(\bar p \times \bar q \,\hat{,}\, \bar r).$$

Вектор $\bar p \times \bar q$ перпендикулярен к векторам $\bar p$ и $\bar q$, а, значит, коллинеарен вектору $\bar r$, а поскольку векторы $\bar p$, $\bar q$ и $\bar r$ образуют по условию правую тройку, то угол между $\bar p \times \bar q$ и $\bar c$ равен 0°. Поэтому $\bar p\bar q\,\bar r = \; = 1\cdot 1\cdot \cos 0° = 1$, следовательно $\bar a\,\bar b\,\bar c = -3$, тогда $V = \left|\bar a\,\bar b\,\bar c\right| = 3$ (ед3).

Задачи для решения

4.1. Даны 3 вектора: $\bar a$ (1; 2; -3), $\bar b$ (2; 0; -2), $\bar c$ (1; 1; 1). Выяснить, какую тройку – правую или левую – они образуют.

4.2. Проверить, являются ли компланарными векторы $\bar a$ (3; 3; 1), $\bar b$ (-1; 1; 1) и $\bar c$ (2; 4; -1).

4.3. На векторах $\bar a$ (2; 1; -4), $\bar b = \bar i - \bar j + \bar k$ и $\bar c$ (3; 3; 2) как на рёбрах построен параллелепипед. Найти его объём.

4.4. Даны векторы: $\bar a$ (2; 2; 3), $\bar b$ (-1; 2; 1) и $\bar c$ (0; ℓ; 5). Найти значение "ℓ", при котором векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{a}+\bar{c}$ компланарны.

4.5. Лежат ли в одной плоскости точки A, B, C, и D, если

а) A(1; 2; -1); B(0; 1; 5); C(-1; 2; 1); D(2; 1; 3);

б) A(2; 1; -2); B(1; 2; 1); C(2; 3; 0); D(5; 0; -6);

в) A(-1; 2; 1); B(-3; 1; 2); C(3; -2; 2); D(3; -4; 3);

г) A(2; 3; -4); B(3; -1; -2); C(1; 4; 0); D(1; 3; 2);

д) A(0; -4; 1); B(-1; -21; 5); C(2; -2; 1); D(3; 3; 0).

4.6. Найти значение "ℓ", при котором точки A(2; -1; 3); B(ℓ; 1; 1); C(2; 1; 0) и D(-1; -1; 1) лежат в одной плоскости.

4.7. При каком значении "ℓ" $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=|\bar{b}|$, если $\bar{a}$(2; -1; ℓ), $\bar{b}=12\bar{i}+4\bar{j}-3\bar{k}$ и $\bar{c}$(5; 0; 9)?

4.8. При каком значении "ℓ" $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\bar{a}\,\bar{c}$, если $\bar{a}$(1; -2; ℓ), $\bar{b}$(1; 3; -4) и $\bar{c}=\bar{i}-2\bar{j}+\bar{k}$?

4.9. При каком значении "ℓ" $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=|\bar{b}|\cdot|\bar{c}|$, если $\bar{a}$(2; -1; ℓ), $\bar{b}$(2; -2; 1) и $\bar{c}=3\bar{i}-4\bar{k}$?

4.10. При каком значении "ℓ" тройка векторов $\bar{a}$(-2; 3; ℓ), $\bar{b}$(1; 1; 2) и $\bar{c}$(5;0; 2) будет левой и объём параллелепипеда, на них построенного, равен 5 ед3?

4.11. Найти значении "ℓ", при котором $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\bar{b}\cdot\bar{c}-\bar{a}\cdot\bar{c}$, если $\bar{a}$(2; 1; -3), $\bar{b}$(3; ℓ; -1) и $\bar{c}=\bar{i}-\bar{j}-\bar{k}$?

4.12. Найти значении "ℓ", при котором $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=|\bar{a}\times\bar{b}|$, если $\bar{a}$(0; 2; 2), $\bar{b}=2\bar{i}-\bar{k}$, $\bar{c}$(ℓ; 3; 1)?

4.13. При каком значении "ℓ" векторы $\bar{a}$(1; 1; 1), $\bar{b}$(-1; 1; ℓ) и $\bar{c}$(-1;-1; ℓ) удовлетворяют соотношению $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=|\bar{a}|+|\bar{c}|$?

4.14. На векторах $\overline{OA}$(1; -2; 3), $\overline{OB}$(4; 0; 2) и $\overline{OC}$(3; 4; 5) построен параллелепипед. Найти длину его высоты, опущенной из вершины C на грань векторов $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$.

4.15. Даны вершины треугольной пирамиды: A(2; -1; -1), B(5; -1; 2), C(3; 0; -3) и D(13; -1; -1). Найти длину её высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

4.16. Даны 3 вершины одного основания параллелепипеда: A(2; 1; -1), B(3; 0; -1), C(2; -1; 3) и вершина F(0; -9; 0) другого основания. Найти длину высоты параллелепипеда, опущенной из точки F на плоскость ABC.

4.17. Дана пирамида ABCD. Найти объём пирамиды и длину высоты, опущенной на основание ABC:

а) A(1; 2; -3); B(2; 2; -2); C(2; 2; -4); D(-2; -2; -1);

б) A(-1; 1; 1); B(-2; 0; 1); C(-2; 2; 1); D(2; 2; -4);

в) A(-1; 3; 2); B(-1; 5; 3); C(-1; 4; -4); D(2; 2; 5);

г) A(3; 2; -1); B(5; 3; -1); C(2; 4; -1); D(4; 3; 4);

д) A(0; 1; -2); B(2; 1; -1); C(1; 1; -4); D(3; -1; -3);

е) A(7; 1; 3); B(3; 1; -5); C(1; 3; 2); D(-1; 0; 2);

ж) A(2; 0; 1); B(-1; 1; 2); C(3; 1; -1); D(2; 2; 4);

з) A(-1; 3; 4); B(2; 0; 1); C(1; 1; -1); D(0; 3; 1);

и) A(0; 2; 1); B(1; -1; 2); C(3; 3; 0); D(-1; -1; 2);

к) A(1; 2; 3); B(-1; 2; 4); C(3; 3; 1); D(-2; 0; 1).

4.18. Объём тетраэдра ABCD равен 12 ед3. Найти координаты вершины D, если A(2; 1; 1), B(0; -1; 3), C(1; 2; -2), а точка D лежит на оси Oy, причём векторы AB, AC и AD образуют правую тройку.

4.19. Даны два вектора $\bar{a}$ (8; 4; 1) и $\bar{b}$ (2; -2; 1), исходящие из общей точки. Найти вектор $\bar{c}$, исходящий из той же точки, перпендикулярный к вектору $\bar{a}$, равный ему по модулю, компланарный с векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и образующий с вектором $\bar{b}$ острый угол.

4.20. Векторы $\bar{a} = 6\bar{i} + \bar{j} + 5\bar{k}$, $\bar{b} = 3\bar{i} - 2\bar{j} + 7\bar{k}$ и $\bar{c}$ образуют левую тройку и служат рёбрами параллелепипеда, объём которого 45 ед3. Найти вектор $\bar{c}$, если известно, что он перпендикулярен плоскости xOy.

4.21. При каком значении ℓ объём параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, не больше 3, если $\bar{a}$ (1; ℓ; -1), $\bar{b}$ (2; 1; 1), $\bar{c}$ (-5;-1;0)?

4.22. Даны векторы:

а) $\bar{m}$(3; ℓ; -2), $\bar{n}$(1; 2; -2), $\bar{p}$(3; 0; -6);

б) $\bar{m}$(2; 2; -1), $\bar{n}$(0; 3; -4), $\bar{p}$(ℓ; 2; -1);

в) $\bar{m}$(ℓ; 1; -1), $\bar{n}$(3; -4; 12), $\bar{p}$(1; -1; 2);

г) $\bar{m}$(-1; 2; ℓ), $\bar{n}$(-2; 1; 2), $\bar{p}$(3; 1; -1);

д) $\bar{m}$(2; 2; ℓ), $\bar{n}$(-2; 1; 2), $\bar{p}$(3; 1; -1).

Найти значение "ℓ", при котором

а) $\bar{m}\,\bar{n}\,\bar{p} = \bar{m} \cdot \bar{p}$;

б) $\bar{m}\,\bar{n}\,\bar{p} = |\bar{n}|$;

в) векторы $\overline{m}$, $\overline{n}$, $\overline{p}$ компланарны;

г) векторы $\overline{m}$, $\overline{n}$, $\overline{p}$ образуют левую тройку, а объём параллелепипеда, на них построенного, равен 40 ед3.

4.23. Модули взаимно перпендикулярных векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ образующих левую тройку, известны: $|\overline{a}|$ = a, $|\overline{b}|$ = b, $|\overline{c}|$ = c. Найти $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$.

4.24. Объём параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{p}$, $\overline{q}$ и $\overline{r}$, образующих левую тройку, равен V. Найти объём параллелепипеда, построенного на векторах а) $\overline{p}+\overline{q}$, $\overline{q}+\overline{r}$ и $\overline{r}+\overline{p}$; б) $\overline{r}$, $2\overline{p}-3\overline{q}$ и $\overline{r}-2\overline{p}$.

4.25. Упростить:

а) $\left(\left(\overline{a}-\overline{b}\right)\times\left(3\overline{c}+\overline{b}\right)\right)\cdot\overline{c}+\overline{b}\cdot\left(\overline{a}\times\overline{c}\right)$;

б) $\left(\left(2\overline{c}+\overline{a}\right)\times\left(\overline{b}-\overline{a}\right)\right)\cdot\overline{b}+2\left(\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{a}\right)$;

в) $\left(\overline{a}\times\left(\overline{b}+2\overline{c}\right)\right)\left(3\overline{a}-\overline{c}\right)+\left(\overline{a}+\overline{b}+2\overline{c}\right)\cdot\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)$;

г) $\left(\left(2\overline{a}-\overline{c}\right)\times\left(\overline{a}+3\overline{b}\right)\right)\cdot\left(\overline{a}-2\overline{b}\right)$;

д) $\left(\overline{a}+3\overline{b}-\overline{c}\right)\cdot\left(\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\times\overline{c}\right)$.

4.26. Объём параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{p}$, $\overline{q}$, $\overline{r}$, образующих левую тройку, равен 10. Найти объём параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{p}+\overline{q}$, $\overline{q}+\overline{r}$, $\overline{r}+\overline{p}$. Какую тройку векторов образуют эти векторы, левую или правую?

4.27. Вектор $\overline{r}$ перпендикулярен векторам $\overline{p}$ и $\overline{q}$, $(\overline{p}\,\widehat{,}\,\overline{q})=\dfrac{\pi}{6}$. Вычислить $\overline{p}\,\overline{q}\,\overline{r}$, если $|\overline{p}|$ = 1, $|\overline{q}|$ = 2, $|\overline{r}|$ = 5.

4.28. Векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ взаимно перпендикулярны и образуют правую тройку, $|\overline{a}|$ = $|\overline{c}|$ = 2; $|\overline{b}|$ = 1. При каком значении α смешанное произведение векторов $\alpha\overline{a}+\overline{b}+2\overline{c}$; $3\overline{a}+(\alpha-1)\overline{b}+4\overline{c}$ и $(\alpha+2)\overline{a}+\overline{b}-\overline{c}$ равно 68?

4.29. Даны точки A(1; -1; 0), B(2; 1; t), C(-1; 0; -3), D(4; -5; 2). При каком наибольшем целом t тройка векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ будет левой?

4.30. Найти наименьшее ℓ, при котором точки A(0; 1; 3), B(ℓ^2; 4; 5), C(ℓ; 0; 4) и D(0; 2; 7) лежат в одной плоскости.

§5. Прямая на плоскости

Прямая на плоскости может быть задана различными способами. Соответственно каждому из способов задания уравнение прямой имеет один из следующих видов:

1) $Ax + By + C = 0$ – общее уравнение прямой, в котором коэффициенты A и B при текущих координатах являются координатами вектора нормали $\overline{N}(A, B)$ этой прямой, т.е. вектора, перпендикулярного к этой прямой (рис. 22);
2) $A(x - x_o) + B(y - y_o) = 0$ – уравнение прямой, проходящей через заданную точку Mo(xo, yo) с заданным вектором нормали $\overline{N}(A, B)$;
3) $\frac{x - x_o}{m} = \frac{y - y_o}{n}$ – уравнение прямой, проходящей через заданную точку Mo(xo, yo) с заданным направляющим вектором $\overline{\ell}(m; n)$, т.е. вектором, параллельным прямой;
4) $\begin{cases} x = x_o + mt; \\ y = y_o + nt \end{cases}$ – параметрические уравнения прямой; t - параметр, принимающий любые значения;
5) $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ – уравнение прямой, заданной двумя точками: M1(x1; y1), M2(x2; y2);

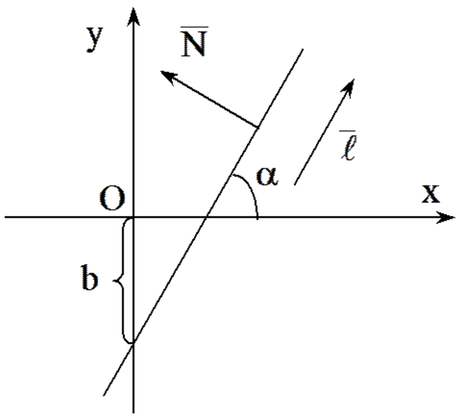


Рис. 22

6) $y = kx + b$ – уравнение прямой с угловым коэффициентом k; угловой коэффициент k – это тангенс угла, образованного прямой с положительным направлением оси Ox; b – величина отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy;
7) $y - y_o = k(x - x_o)$ – уравнение прямой, проходящей через заданную точку Mo(xo, yo) с заданным угловым коэффициентом; это уравнение называется также уравнением пучка прямых.

Для нахождения угла между двумя прямыми существуют две формулы.

Если прямые заданны общими уравнениями:

$\ell_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0;$

$\ell_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0,$

то угол между ними определяется как угол между их векторами нормалей $\overline{N}(A_1, B_1)$ и $\overline{N}(A_2, B_2)$ (рис. 23):

$$\cos\varphi = \cos(\overline{N}_1 \hat{,} \overline{N}_2) = \frac{\overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2}{|\overline{N}_1| \cdot |\overline{N}_2|} =$$

$$= \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \qquad (5.1)$$

В этом случае условие параллельности двух прямых имеет вид:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}. \qquad (5.2)$$

Условие перпендикулярности двух прямых имеет вид:

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0. \qquad (5.3)$$

Если прямые заданы уравнениями с угловым коэффициентом:

$$\ell_1 : y = k_1x + b_1; \ \ell_2 : y = k_2x + b_2,$$

то угол между ними находятся по формуле:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}. \qquad (5.4)$$

В этом случае условие параллельности двух прямых имеет вид:

$$k_1 = k_2, \qquad (5.5)$$

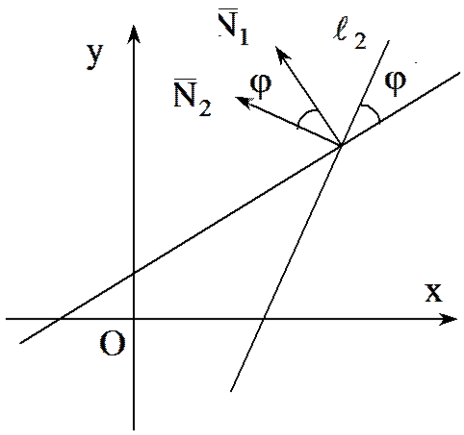


Рис. 23

а условие перпендикулярности:

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}. \qquad (5.6)$$

Расстояние d от точки Mo(xo, yo) до прямой $Ax + By + C = 0$ вычисляется по формуле:

$$d = \frac{|Ax_o + By_o + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (5.7)$$

Для решения задач полезно также знать следующие правила.

Чтобы найти угловой коэффициент прямой, заданной общим уравнением

($Ax + By + C = 0$), надо это уравнение разрешить относительно y (т.е. привести к виду $y = kx + b$) и взять коэффициент, стоящий перед x.

Чтобы проверить, лежит ли заданная точка на заданной прямой, надо координаты этой точки подставить в уравнение прямой вместо текущих координат; если при этом получается тождество, точка лежит на прямой, если тождество не получается, точка на прямой не лежит.

Чтобы найти точку пересечения прямой с осью Ox, надо в уравнении прямой положить y = 0 и найти соответствующее значение x, чтобы найти точку пересечения прямой с осью Oy, надо в её уравнении положить x = 0 и найти соответствующее значение y.

Уравнение прямой, параллельной оси Oy, имеет вид x = a, а прямой, параллельной оси Ox: y = b (a и b – константы).

Задача. Составить уравнение прямой, проходящей через точку P(1; -2) и при этом

а) перпендикулярной вектору $\overline{m}$(3; 2);

б) параллельной вектору $\overline{a}$ (-5; 4);

в) параллельной биссектрисе I-III координатных углов;

г) параллельной оси Ox;

д) параллельной оси Oy;

е) параллельной прямой $2x + 5y - 3 = 0$;

ж) перпендикулярной этой прямой;

з) проходящей через точку Q(3; 5);

и) образующей угол в 45° с прямой $3x - 2y + 1 = 0$.

Решение

а) Вектор $\overline{m}$(3; 2), перпендикулярный прямой, можно принять за вектор нормали. Используя уравнение (2), получим:

$3 \cdot (x - 1) + 2 \cdot (y + 2) = 0$, откуда следует:

$3x + 2y + 1 = 0$ – общее уравнение искомой прямой.

б) Вектор $\overline{a}$ (-5; 4), параллельный прямой, является её направляющим вектором. Используем уравнение (3):

$$\frac{x-1}{-5} = \frac{y+2}{4} \Rightarrow 4x + 5y + 6 = 0.$$

в) Биссектриса I-III координатных углов образует с положительным направлением оси Ox угол 45°, следовательно её угловой коэффициент

$k = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$, а поскольку искомая прямая параллельна биссектрисе, её угловой коэффициент будет такой же. Используем уравнение (7):

$$y + 2 = 1 \cdot (x - 1) \Rightarrow x - y - 3 = 0.$$

г) Прямая, параллельная оси Ox, имеет уравнение вида y = b, а для того, чтобы эта прямая проходила через точку P(1; -2), необходимо, чтобы b = –2, т.е. уравнение прямой имеет вид: y = –2.

д) Прямая, параллельная оси Oy, имеет уравнение вида x = a – const, а чтобы она проходила через точку P(1; 2), уравнение должно иметь вид: x = 1.

е) Заданная прямая ℓ_1 имеет вектор нормали $\overline{N}(2;\,5)$. Поскольку искомая прямая ℓ_2 её параллельна, вектор $\overline{N}$ будет вектором нормали и для искомой прямой (рис. 24), поэтому, используя уравнение (2), получаем:

$$2(x - 1) + 5(y + 2) = 0 \Rightarrow 2x + 5y + 8 = 0.$$

Возможно и иное решение. Находим угловой коэффициент заданной прямой. Для этого разрешаем уравнение $2x + 5y - 3 = 0$ относительно y:

$$5y = -2x + 3 \Rightarrow y = -\frac{2}{5}x + \frac{3}{5}, \text{ следовательно, } k = -\frac{2}{5}.$$

Искомая прямая имеет тот же угловой коэффициент. Используем уравнение (7):

$$y + 2 = -\frac{2}{5}(x - 1) \Rightarrow 5y + 10 = -2x + 2 \Rightarrow 2x + 5y + 8 = 0.$$

ж) Заданная прямая имеет вектор нормали $\overline{N}(2;\,5)$. Поскольку искомая прямая (ℓ_3) ей перпендикулярна, то вектор $\overline{N}$ будет параллелен искомой прямой, т.е. будет для неё направляющим вектором, поэтому используем уравнение (3):

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 2}{5} \Rightarrow 5x - 5 = 2y + 4 \Rightarrow$$

$$5x - 2y - 9 = 0.$$

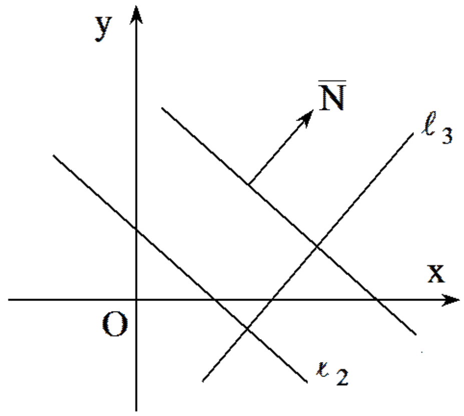


Рис. 24

Возможно иное решение. Угловой коэффициент заданной прямой был найден в предыдущей задаче: $k_1 = -\frac{2}{5}$.

Для перпендикулярной ей прямой угловой коэффициент находим по формуле (5.6): $k_2 = \frac{2}{5}$, так что для искомой прямой имеем угловой коэффициент $k_2 = \frac{2}{5}$ и точку P(1; -2). Используем уравнение (7):

$$y + 2 = \frac{5}{2}(x-1) \Rightarrow 2y + 4 = 5x - 5 \Rightarrow 5x - 2y - 9 = 0.$$

з) Прямая должна проходить через две точки: P(1; -2) и Q(3; 5). Используем уравнение (5):

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y+2}{5+2} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{7} \Rightarrow 7x - 7 = 2y + 4 \Rightarrow 7x - 2y - 11 = 0.$$

и) Находим угловой коэффициент заданной прямой:

$$3x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow 2y = 3x + 1;\ y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}, \text{ так что } k = \frac{3}{2}.$$

Угловой коэффициент искомой прямой найдём, используя формулу (5.4):

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}.$$

Поскольку угол между прямыми $\varphi = 45^\circ$, то $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}45^\circ = 1$. Принимая угловой коэффициент заданной прямой за $k_1 = \frac{3}{2}$, из формулы (5.4), получаем:

$$1 = \frac{k_2 - \frac{3}{2}}{1 + \frac{3}{2}k_2}, \text{ откуда следует: } 1 + \frac{3}{2}k_2 = k_2 - \frac{3}{2},$$

$\frac{1}{2}k_2 = -\frac{5}{2} \Rightarrow k_2 = -5$ – угловой коэффициент искомой прямой. Воспользовавшись уравнением (7), имеем:

$$y + 2 = -5 \cdot (x-1) \Rightarrow 5x + y - 3 = 0 \text{ – искомая прямая.}$$

Однако, применяя формулу (5.4), угловой коэффициент заданной прямой $\left(k = \frac{3}{2}\right)$ можно принять и за k2 $\left(k_2 = \frac{3}{2}\right)$. Тогда из формулы (5.4) следует:

$$1 = \frac{\frac{3}{2} - k_1}{1 + k_1\frac{3}{2}}, \text{ откуда находим: } 1 + k_1\frac{3}{2} = \frac{3}{2} - k_1 \Rightarrow \frac{5}{2}k_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow\ k_1 = \dfrac{1}{5}$ – угловой коэффициент искомой прямой. Подставляя его и координаты точки P в уравнение (7), получаем:

$$y + 2 = \frac{1}{5}(x - 1) \Rightarrow 5y + 10 = x - 1 \Rightarrow$$

$x - 5y - 11 = 0$ – искомая прямая.

То, что получены два уравнения, соответствует тому, что через точку P можно провести две прямые, образующие с заданной прямой угол 45° (рис. 25). Между собой эти прямые взаимно перпендикулярны, что подтверждается и соотношением, связывающим их угловые коэффициенты: $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$.

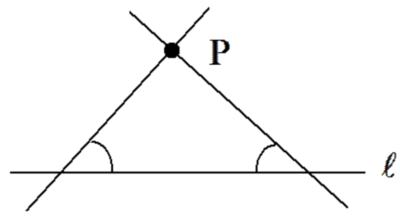


Рис. 25

Задачи для решения

5.1. Найти площадь треугольника, заключённого между осями координат и прямой $2x + 5y - 20 = 0$.

5.2. Даны вершины 4-угольника ABCD: A(2; 2), B(5; 1), C(3; 6), D(0; 3). Найти точку пересечения его диагоналей.

5.3. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из точки A(3; 2) на прямую, проходящую через точки B(5; 3) и C(-2; 1).

5.4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(2; -1) параллельно прямой, проходящей через точки B(1; 1) и C(-2; 3).

5.5. Прямая $2x - 3y + 12 = 0$ пересекает оси Ox и Oy в точках A и B. Составить уравнение перпендикуляра, проведённого к отрезку AB через его середину.

5.6. Составить уравнение перпендикуляра, проведённого к отрезку AB через его середину, если A(3; -5), B(-1; 1).

5.7. Составить уравнения перпендикуляров к прямой $3x - 2y + 6 = 0$ в точках её пересечения с осями координат.

5.8. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из точки K(-1; 3) на прямую, отсекающую на осях Ox и Oz соответственно отрезки 5 и -3.

5.9. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(1; -3) и точку пересечения прямых $3x - y - 3 = 0$ и $3x + 2y - 12 = 0$.

5.10. Составить уравнение прямой, соединяющей точку пересечения прямых $2x - 3y + 8 = 0$ и $x + y - 1 = 0$ с началом координат.

5.11. Вершины треугольника находятся в точках A(-4; -5), B(4; 1) и C($-\frac{1}{2}$; 7). Составить:

а) уравнения сторон треугольника;

б) уравнение высоты, опущенной из вершины C на сторону AB;

в) уравнение медианы, проведённой из вершины C.

5.12. Найти прямую, проходящую через точку пересечения прямых $x + 2y + 3 = 0$, $2x + 3y + 4 = 0$ и

а) параллельную прямой $5x + 8y = 0$;

б) перпендикулярную этой прямой;

в) параллельную оси Ox;

г) параллельную оси Oy;

д) параллельную биссектрисе I-III координатных углов;

е) через начало координат;

ж) через точку (1; 1).

5.13. Точка B(-1; 1) – проекция точки A(1; 3) на прямую ℓ. Составить уравнение прямой ℓ.

5.14. Найти точку пересечения медиан треугольника ABC, если A(-4; 2), B(2; -5), C(5; 0).

5.15. Найти точку пересечения высот треугольника ABC, если A(-3; 0), B(2; 5), C(3; 2).

5.16. Найти проекцию точки A(2; 3) на прямую $2x - y + 4 = 0$.

5.17. Найти проекцию точки A(-6; 6) на прямую, проходящую через точки M(3; -1) и N(1; 2).

5.18. Найти точку Q, симметричную точке P(6; -4) относительно прямой $4x - 3y - 11 = 0$.

5.19. Найти точку M1, симметричную точке M2(8; -9) относительно прямой, проходящей через точки A(3; -4) и B(-1; -2).

5.20. Найти расстояние от точки A(1; -1) до прямой $4x - 3y + 3 = 0$.

5.21. Найти расстояние между двумя параллельными прямыми: $4x - 3y + 3 = 0$ и

$4x - 3y - 2 = 0$.

5.22. Найти расстояние от точки от точки A(0; -2) до прямой, проходящей через точки M(2; 1) и N(-10; -4).

5.23. Даны вершины треугольника ABC. Составить уравнение стороны AC, медианы BE и высоты BD, если

а) A(2; 4), B(-2; 0), C(4; 0),

б) A(1; 3), B(4; 2), C(-1; -2),

в) A(-1; 2), B(4; 2), C(2; 1),

г) A(-3; 4), B(-1; 0), C(1; 2),

д) A(-2; 0), B(2; 6), C(4; 2).

5.24. Даны точки P и Q. Составить уравнение прямой, проходящей через точку Q перпендикулярно вектору $\overline{PQ}$, если:

а) P(5; -4), Q(-1; 3); б) P(-2; -1), Q(2; 1);

в) P(1; -3), Q(2; 1); г) P(2; 3), Q(-1; 0).

5.25. Найти угол, образованный прямыми:

а) $3x - y + 5 = 0$ и $2x + y - 7 = 0$;

б) $x\sqrt{2} - y\sqrt{3} - 5 = 0$ и $(3 + \sqrt{2})x + (\sqrt{6} - \sqrt{3})y + 7 = 0$;

б) $x\sqrt{3} - y\sqrt{2} - 2 = 0$ и $x\sqrt{6} + 3y + 3 = 0$.

5.26. Даны уравнения двух сторон прямоугольника: $5x + 2y - 7 = 0$; $5x + 2y - 36 = 0$ и одной из его диагоналей: $3x + 7y - 10 = 0$. Составить уравнения двух других сторон и второй диагонали.

5.27. Даны уравнения двух сторон прямоугольника: $x - 2y = 0$, $x - 2y + 15 = 0$ и уравнение одной из его диагоналей: $7x + y - 15 = 0$. Найти вершины прямоугольника.

5.28. Даны уравнения двух сторон прямоугольника $2x - 3y + 5 = 0$, $3x + 2y - 7 = 0$ и одна из его вершин A(2; -3). Составить уравнения двух других сторон этого прямоугольника.

5.29. Зная уравнения двух сторон параллелограмма: $x - 3y = 0$, $2x + y - 7 = 0$ и одну из его вершин C(2; 10), составить уравнения двух других сторон параллелограмма и его диагоналей.

5.30. Даны уравнения двух сторон параллелограмма: $8x + 3y + 1 = 0$, $2x + y - 1 = 0$ и одной из его диагоналей: $3x + 2y + 3 = 0$. Определить координаты его вершин.

5.31. Две стороны параллелограмма заданы уравнениями: $x-y-2=0$ и $x-5y+6=0$. Диагонали его пересекаются в начале координат. Составить уравнения двух других сторон параллелограмма.

5.32. Даны две смежных вершины параллелограмма: A(-3; -1), B(2; 2) и точка Q(3; 0) пересечения его диагоналей. Составить уравнения сторон параллелограмма.

5.33. Даны две стороны ромба: $x+2y-4=0$; $x+2y-10=0$ и уравнение одной из его диагоналей $x-y+2=0$. Составить уравнения двух других сторон ромба.

5.34. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин A(3; -4) и уравнения двух его высот: $7x - 2y-1=0$ и $2x-7y-6=0$.

5.35. Даны две вершины треугольника: A(2; -3), B(5; 1), уравнение высоты BD: $x+2y-7=0$ и медианы AM: $5x-y-13=0$. Составить уравнение высоты, опущенной из вершины C на сторону AB.

5.36. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину C(4; -1), а также уравнения высоты $2x-3y+12=0$ и медианы $2x+3y=0$, проведённых из одной вершины.

5.37. Даны две вершины треугольника: A(-6; 2), B(2; -2) и точка H(1; 2) пересечения его высот. Найти координаты третьей вершины C.

5.38. Точка пересечения высот треугольника лежит в начале координат. Уравнения двух сторон этого треугольника: $x+3y-1=0$ и $3x+5y-6=0$. Составить уравнение третьей стороны.

5.39. Дана вершина C(-1; 3) прямого угла равнобедренного прямоугольного треугольника и его гипотенуза: $3x-4y-12=0$. Составить уравнения его катетов.

5.40. Точки A(1; 2) и C(3; 6) являются противоположными вершинами квадрата. Определить координаты двух других вершин квадрата.

5.41. Даны вершины треугольника A(1; -1), B(-2; 1), C(3; 5). Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины A на медиану, проведённую из вершины B.

5.42. Найти длину высоты BD в треугольнике с вершинами A(-3; 0), B(2; 5), C(3; 2).

5.43. Даны уравнения двух сторон квадрата $2x-y+7=0$; $2x-y+2=0$ и одна из его вершин A(-1; 0). Составить уравнения двух других сторон этого квадрата.

§6. Плоскость и прямая в пространстве

Плоскость определяется одним из следующих уравнений:

1) $Ax + By + Cz + D = 0$ – общее уравнение плоскости, для которой вектор $\overline{N}$ (A; B; C) является вектором нормали (т.е. перпендикулярен этой плоскости);
2) $A \cdot (x - x_o) + B \cdot (y - y_o) + C \cdot (z - z_o) = 0$ – уравнение плоскости, проходящей через точку Mo(xo, yo, zo), с вектором нормали $\overline{N}$ (A; B; C);
3) $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$ – уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки M1(x1, y1, z1), M2(x2, y2, z2), и M3(x3, y3, z3).

Угол между двумя плоскостями: α1: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и α2: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, – определяется как угол между их векторами нормалей $\overline{N}_1$ (A1; B1; C1) и $\overline{N}_2$ (A2; B2; C2), а именно:

$$\cos\varphi = \cos(\overline{N}_1 \hat{,} \overline{N}_2) = \frac{\overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2}{|\overline{N}_1| \cdot |\overline{N}_2|}, \text{ так что}$$

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (6.1)$$

Условие параллельности двух плоскостей:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \qquad (6.2)$$

Условие перпендикулярности двух плоскостей:

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0. \qquad (6.3)$$

Расстояние от точки Mo(xo, yo, zo) до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ определяется по формуле:

$$d = \frac{|Ax_o + By_o + Cz_o + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (6.4)$$

Прямая в пространстве определяется следующими уравнениями:

4) $\frac{x - x_o}{m} = \frac{y - y_o}{n} = \frac{z - z_o}{p}$ – уравнение прямой, проходящей через заданную точку Mo(xo, yo, zo) с заданным направляющим вектором $\overline{\ell}(m; n; p)$. (в та-

ком виде уравнения прямой называются каноническими);

5) если каждое из равных отношений в канонических уравнениях обозначить через t и выразить через t текущие координаты x, y и z, то получим параметрические уравнения прямой в пространстве:

$$\begin{cases} x = x_o + mt; \\ y = y_o + nt; \quad t \in (-\infty, \infty); \\ z = z_o + pt, \end{cases}$$

6) $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ – уравнение прямой, проходящей через две заданные точки M1(x1, y1, z1) и M2(x2, y2, z2);

7) $\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0; \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$ – уравнение прямой, заданной как пересечение двух плоскостей.

Чтобы перейти от такого задания прямой к её каноническим уравнениям, надо найти точку, принадлежащую этой прямой и направляющий вектор. Найти координаты точки – значит найти какое-либо (из бесконечного множества) решение системы уравнений; для этого достаточно задать произвольно числовое значение одной из трёх переменных (например, положить z = 0), и решив получившуюся при этом систему двух уравнений с двумя неизвестными, найти две остальные координаты точки. Направляющий вектор $\overline{\ell}$ прямой, по которой пересекаются две плоскости, перпендикулярный к векторам нормалей этих плоскостей, можно получить как векторное произведение векторов нормалей $\overline{N}_1$ (A1; B1; C1) и $\overline{N}_2$ (A2; B2; C2), т.е. $\overline{\ell} = \overline{N}_1 \times \overline{N}_2$.

Пусть заданы две прямые в пространстве:

$$\ell_1: \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \text{ и } \ell_2: \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

Угол между двумя прямыми определяется как угол между их направляющими векторами ℓ_1(m1; n1; p1) и ℓ_2(m2; n2; p2), т.е.

$$\cos\varphi = \cos(\overline{\ell}_1 \hat{,} \overline{\ell}_2) = \frac{\overline{\ell}_1 \cdot \overline{\ell}_2}{|\overline{\ell}_1| \cdot |\overline{\ell}_2|}, \text{ так что}$$

$$\cos\varphi = \frac{m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \qquad (6.5)$$

Условие параллельности двух прямых в пространстве:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}. \qquad (6.6)$$

Условие перпендикулярности двух прямых в пространстве:

$$m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2 = 0 \qquad (6.7)$$

При решении задач полезно знать условие пересечения двух прямых в пространстве. Если прямые ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются (рис. 26), то будут компланарными векторы ℓ_1(m1; n1; p1), ℓ_2(m2; n2; p2) и $\overline{M_1M_2}(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1)$, а значит, их смешанное произведение равно нулю, следовательно условие пересечения двух прямых в пространстве имеет вид:

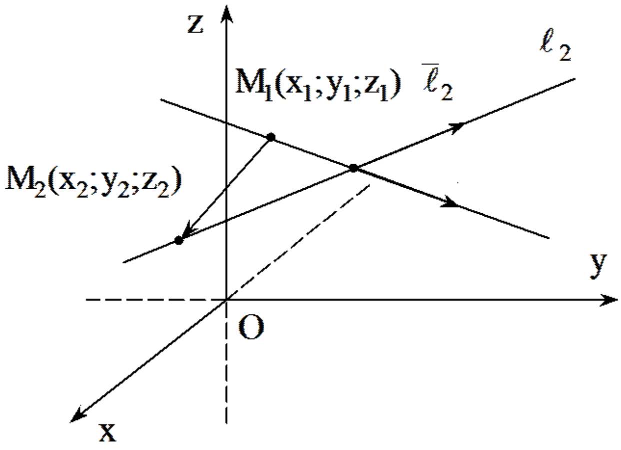


Рис. 26

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (6.8)$$

Пусть задана плоскость α: $Ax+By+Cz+D=0$ с вектором нормали $\overline{N}$ (A; B; C) и прямя ℓ:

$$\frac{x-x_o}{m}=\frac{y-y_o}{n}=\frac{z-z_o}{p}$$

с направляющим вектором $\overline{\ell}(m;\ n;\ p)$ (рис. 27).

Углом φ между прямой и плоскостью называют угол между прямой и её проекцией на эту плоскость. Угол между направляющим вектором $\overline{\ell}$ и вектором нормали плоскости $\overline{N}$ дополняет угол φ до 90°, т.е. $\varphi = 90^\circ - (\overline{N}\,\hat{,}\,\overline{\ell})$, поэтому $\cos(\overline{N}\,\hat{,}\,\overline{\ell}) = \cos(90^\circ - \varphi) = \sin\varphi$, а значит

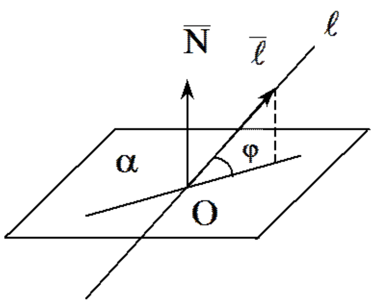


Рис. 27

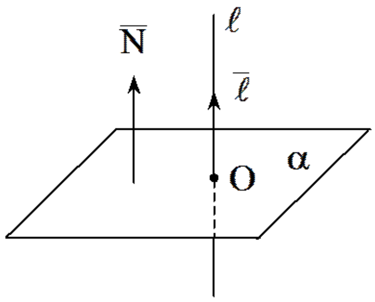


Рис. 28

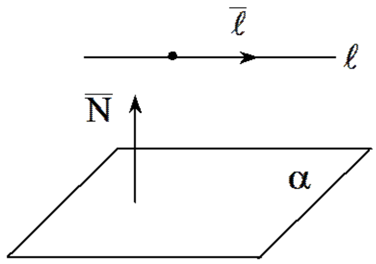


Рис. 29

$$\sin\varphi = \frac{\overline{N}\cdot\overline{\ell}}{|\overline{N}|\cdot|\overline{\ell}|} = \frac{A\cdot m + B\cdot n + C\cdot p}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \qquad (6.9)$$

формула угла между прямой в пространстве и плоскостью.

Условие перпендикулярности прямой и плоскости (рис. 28): $\overline{N}\,||\,\overline{\ell}$, а значит

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p} \qquad (6.10)$$

Условие параллельности прямой и плоскости (рис. 29): $\overline{N}\perp\overline{\ell}$, следовательно

$$A\cdot m + B\cdot n + C\cdot p = 0 \qquad (6.11)$$

Наконец, надо знать правило, по которому находится точка пересечения прямой $\frac{x-x_o}{m} = \frac{y-y_o}{n} = \frac{z-z_o}{p}$ с плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$ (если они не параллельны). Чтобы найти точку пересечения, надо:

1) уравнение прямой записать в параметрическом виде:

$$x = x_o + mt;\ y = y_o + nt;\ z = z_o + pt;$$

2) выражения x, y и z подставить в уравнение плоскости, при этом получается уравнение, содержащее одно неизвестное t:

$$A(x_o + mt) + B(y_o + nt) + C(z_o + pt) + D = 0;$$

3) решив это уравнение, находим значение параметра t, соответствующее точке пересечения прямой и плоскости;

4) подставив найденное значение t в параметрические уравнения прямой, получаем координаты точки пересечения прямой и плоскости.

Задача 1. Даны две точки: P(3; -1; 2) и Q(2; 2; -1). Составить уравнение плоскости, проходящей через точку P перпендикулярно вектору $\overline{PQ}$.

Решение

Вектор $\overline{PQ}$ (-1; 3; -3), перпендикулярный плоскости, является для неё вектором нормали, следовательно, для составления её уравнения имеем вектор нормали и точку P(3; -1; 2), через которую эта плоскость проходит. Используя уравнение (2), получаем:

$$-1\cdot(x-3)+3\cdot(y+1)-3\cdot(z-2)=0 \Rightarrow -x+3+3y+3-3z+6=0.$$

Окончательно: $x-3y+3z-12=0$.

Задача 2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки P(1; 1; -2), Q(2; 3; 4) и R(-2; 4; 1).

Решение

Плоскость задана тремя точками, поэтому используем уравнение (3):

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+2 \\ 2-1 & 3-1 & 4+2 \\ -2-1 & 4-1 & 1+2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+2 \\ 1 & 2 & 6 \\ -3 & 3 & 3 \end{vmatrix}=0.$$

Разлагая определитель по элементам первой строки, имеем:

$$-12(x-1)-21(y-1)+9(z+2)=0.$$

После преобразований получаем:

$$4x+7y-3z-17=0.$$

Задача 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки P(3; -1; -2), Q(2; 0; 1) и перпендикулярной плоскости $x+3y-2z+5=0$.

Решение

Плоскость должна проходить через точку P(3; -1; -2). Подставляя её координаты в уравнение (2), для искомой плоскости получаем:

$$A\cdot(x-3)+B\cdot(y+1)+C\cdot(z+2)=0,$$

где коэффициента A, B, C подлежат определению.

Поскольку точка Q должна лежать в искомой плоскости, её координаты должны удовлетворять уравнению этой плоскости. Подставляя в уравнение плоскости вместо текущих координат координаты точки Q(2; 0; 1), получаем:

$$A\cdot(2-3)+B\cdot(0+1)+C\cdot(-1+2)=0 \Rightarrow -A+B+C=0.$$

Поскольку искомая плоскость перпендикулярна плоскости $x+3y-2z+5=0$, коэффициенты при текущих координатах их уравнений должны удовлетворять условию (6.3) (скалярное произведение векторов нормалей равно нулю):

$$A\cdot 1 + B\cdot 3 + C\cdot(-2) = 0 \Rightarrow A + 3B - 2C = 0.$$

Для определения коэффициентов A, B и C получили систему уравнений:

$$\begin{cases} -A + B + C = 0; \\ A + 3B - 2C = 0, \end{cases}$$

решая которую, находим:

$$A = t\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -5t;\ B = t\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -t;\ A = t\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4t.$$

Поскольку вектором нормали может быть любой вектор, перпендикулярный плоскости, задаём параметру t любое числовое значение, например t = –1, в результате получаем: A = 5; B = 1; C = 4. Подставляя найденные значения A, B, C в уравнение искомой плоскости, окончательно имеем:

$$5\cdot(x-3) + 1\cdot(y+1) + 4\cdot(z+2) = 0 \Rightarrow 5x + y + 4z - 6 = 0.$$

Задача 4. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точки P(3; -2; -1) и Q(2; 1; 4).

Решение

Прямая задана двумя точками, поэтому используем уравнение (6):

$$\frac{x-3}{2-3} = \frac{y+2}{1+2} = \frac{z+1}{4+1} \Rightarrow \frac{x-3}{-1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{5}$$

канонические уравнения искомой прямой. Чтобы перейти к параметрическим уравнениям, приравняем эти отношения параметру t:

$$\frac{x-3}{-1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{5} = t,$$

откуда находим:

$$\frac{x-3}{-1} = t \Rightarrow x = 3 - t;$$

$$\frac{y+2}{3} = t \Rightarrow y = -2 + 3t;$$

$$\frac{z+1}{5} = t \Rightarrow z = -1 + 5t,$$

так что параметрические уравнения прямой имеют вид:

$$\begin{cases} x = 3 - t; \\ y = -2 + 3t; \\ z = -1 + 5t. \end{cases}$$

Задача 5. Составить канонические уравнения прямой, заданной как пересечение плоскостей:

$$\begin{cases} x - y + 3z - 1 = 0; \\ 2x + y - 2z - 5 = 0. \end{cases}$$

Решение

Ищем точку, принадлежащую прямой, т.е. какое-либо решение системы уравнений. Для этого положим z = 0:

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0; \\ 2x + y - 5 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим: x = 2; y = 1, так что, точка P, принадлежащая прямой, имеет координаты P(2; 1; 0).

Направляющий вектор $\overline{\ell}$ искомой прямой найдём как векторное произведение векторов нормалей заданных плоскостей: $\overline{N}_1$(1; -1; 3) и $\overline{N}_2$(2; 1; -2):

$$\overline{\ell} = \overline{N}_1 \times \overline{N}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -\overline{i} + 8\overline{j} + 3\overline{k}, \text{ иначе } \overline{\ell} = (-1; 8; 3).$$

Подставляя координаты точки P и направляющего вектора $\overline{\ell}$ в уравнение (4), получаем:

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{3} \text{ – каноническое уравнение искомой прямой.}$$

Задача 6. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{-2}$ с плоскостью $2x - y + z - 1 = 0$.

Решение

Записываем уравнения прямой в параметрическом виде: $x = 1 + 2t$; $y = -2 - t$; $z = 3 - 2t$.

Подставляем эти выражения в уравнение плоскости:

$$2(1+2t) - (-2-t) + (3-2t) - 1 = 0 \Rightarrow 2 + 4t + 2 + t + 3 - 2t - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3t + 6 = 0 \Rightarrow t = -2.$$

Подставляя найденное значение t = –2 в параметрические уравнения прямой, получаем:

x = –3; y = 0; z = 7, т.е. P(-3; 0; 7) – точка пересечения прямой и плоскости.

Задача 7. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые:

$$\ell_1: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z+3}{1} \text{ и } \ell_2: \frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+2}{1}.$$

Решение

Чтобы воспользоваться уравнением плоскости $A\cdot(x-x_o)+$ $+B\cdot(y-y_o)+C\cdot(z-z_o)=0$, надо найти для этой плоскости вектор нормали $\overline{N}$ (A; B; C) и точку (xo; yo; zo), через которую она проходит (рис. 30).

Прямая ℓ_1 проходит через точку P(1; 0; -3) и имеет направляющий вектор $\overline{\ell}$(2; -1; 1). Эта прямая целиком лежит в искомой плоскости α, следовательно плоскость α проходит через точку P, а вектор нормали $\overline{N}$ перпендикулярен $\overline{\ell}$. Это позволяет записать уравнение плоскости в виде:

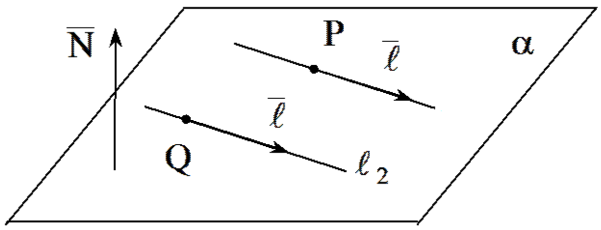


Рис. 30

$$A\cdot(x-1)+B\cdot(y-0)+C\cdot(z+3)=0 \text{ и при этом}$$

$$A\cdot 2+B\cdot(-2)+C\cdot 1=0 \text{ (условие того, что } \overline{N}\perp\overline{\ell}\text{).}$$

Прямая ℓ_2 проходит через точку Q(-3; 1; -2) и имеет тот же, что и ℓ_1, направляющий вектор. Чтобы она тоже лежала в плоскости α, достаточно потребовать, чтобы координаты точки Q удовлетворяли уравнению плоскости:

$$A\cdot(-3-1)+B\cdot(1-0)+C\cdot(-2+3)=0 \Rightarrow -4A+B+C=0.$$

Для определения A, B и C получили систему уравнений:

$$\begin{cases} 2A-2B+C=0; \\ -4A+B+C=0, \end{cases}$$

решая которую находим:

$$A=t\cdot\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-3t;\; B=t\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -4\end{vmatrix}=-6t;\; C=t\cdot\begin{vmatrix}2 & -2\\ -4 & 1\end{vmatrix}=-6t.$$

Положив $t = -\frac{1}{3}$, получаем: A = 1; B = 2; C = 2.

Подставляя найденные значения A, B, C в уравнение плоскости, имеем:

$$1 \cdot (x-1) + 2 \cdot (y-0) + 2 \cdot (z+3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 2y + 2z + 5 = 0 \text{ – уравнение искомой плоскости.}$$

Задачи для решения

6.1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку K(3; -1; 2) и параллельной а) плоскости xOy; б) плоскости xOz; в) плоскости yOz.

6.2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку K(3; 1; -4) и через а) ось Ox; б) ось Oy; в) ось Oz.

6.3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки M(1; -1; 2), N(3; 2; -1) и параллельной а) оси Ox; б) оси Oy; в) оси Oz.

6.4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку P(-3; 5; 1) и параллельной плоскости а) $2x - y + 3z = 0$; б) $7y - 3z + 1 = 0$; в) $3y - 1 = 0$.

6.5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки M1, M2, M3, если
а) M1(2; 2; 0); M2(-1; 3; 5); M3(1; -1; 3);
б) M1(1; 0; -3); M2(2; -2; 1); M3(3; 5; 2);
в) M1(0; 2; 3); M2(5; 1; -1); M3(2; 3; 4).

6.6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M1 и перпендикулярной вектору $\overline{M_1M_2}$, если
а) M1(1; -1; 2); M2(2; 1; 0);
б) M1(2; -3; 4); M2(3; 3; -3);
в) M1(0; 2; 3); M2(1; -1; 5).

6.7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M(3; 3; 5) и параллельной плоскости, которая проходит через точки A(2; 0; 1), B(1; 1; -1) и C(0; 2; 3).

6.8. Составить уравнение плоскости, которая отсекает на осях Ox, Oy, Oz соответственно отрезки 3; -2 и -4.

6.9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M перпендикулярно плоскостям α1 и α2, если
а) M(3; -1; 2), α1: $2x - y + z - 3 = 0$, α2: $x + 3y + 5z = 0$;
б) M(1; -1; 3), α1: $x + 3y + 2z - 5 = 0$, α2: $2x + 2y - z + 3 = 0$;

в) M(2; 0; -1), $\alpha 1$: $3x - y - z + 2 = 0$, $\alpha 2$: $2x - 3y + 1 = 0$.

6.10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки M и N перпендикулярно плоскости α, если

а) M(2; 1; -1), N(1; 2; -3), α: $3x - y - 2z + 5 = 0$;

б) M(-1; 3; 0), N(1; 2; -3), α: $x - 2y + 3z - 4 = 0$;

в) M(3; -1; 2), N(1; 1; 1), α: $5x + 2y - z = 0$.

6.11. Найти угол между плоскостями:

а) $x - 2y + 2z - 8 = 0$ и $x + z - 6 = 0$;

б) $x - y - 4z + 5 = 0$ и $2x + y - 2z + 1 = 0$;

в) $3x - 3z - 4 = 0$ и $x - 2y - 2z + 3 = 0$.

6.12. Найти углы, которые образует плоскость α с координатными плоскостями, если

а) α: $x - 2y + 2z - 3 = 0$;

б) α: $3x + 4y - 12z + 1 = 0$;

в) α: $3x - 4y + 1 = 0$.

6.13. Написать в каноническом и параметрическом виде уравнение прямой, проходящей через точку A параллельно вектору $\overline{\ell}$, если

а) A(3; -1; 2), $\overline{\ell}$ = (2; -2; 1);

б) A(-1; 0; 5), $\overline{\ell}$ = (3; 1; 2);

в) A(-1; 2; 3), $\overline{\ell}$ = (2; -2; 4).

6.14. Написать в каноническом и параметрическом виде уравнение прямой, проходящей через точки M1 и M2, если:

а) M1(1; 2; -1), M2(3; 5; 0);

б) M1(3; 3; 1), M2(-1; 3; 2);

в) M1(-1; 2; 3), M2(2; -2; 4).

6.15. Составить уравнение прямой, проходящей через точку K(3; -5; 1) параллельно а) оси Ox, б) оси Oy, с) оси Oz.

6.16. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(3; -2; 0) параллельно прямой

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z+2}{5}.$$

6.17. На прямой $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+2}{-3}$ найти три различные точки.

6.18. Записать в каноническом и параметрическом виде уравнения прямой, заданной как пересечение плоскостей:

а) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0; \\ x + y - 3z + 1 = 0, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y - z - 3 = 0; \\ 2x + y + 3z = 0, \end{cases}$

в) $\begin{cases} 5x + 2y - z + 3 = 0; \\ x - 3y + 2z + 4 = 0. \end{cases}$

6.19. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M параллельно прямой ℓ, если:

а) M(3; 1; -2), $\ell : \begin{cases} x - 3y + z - 2 = 0; \\ 2x + y - 2z + 1 = 0; \end{cases}$

б) M(1; -2; 1), $\ell : \begin{cases} 3x - 2y + z + 5 = 0; \\ 2x + y - 3z - 1 = 0; \end{cases}$

в) M(5; 0; 3), $\ell : \begin{cases} x - y - 2z + 3 = 0; \\ 2x - y + 5z - 1 = 0. \end{cases}$

6.20. Найти угол между прямыми:

а) $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+3}{2}$ и $\dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y+3}{0} = \dfrac{z-4}{1}$;

б) $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z+1}{4}$ и $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+2}{-2}$;

в) $\begin{cases} x - y + z - 4 = 0; \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x + y + z - 4 = 0; \\ 2x + 3y - z - 6 = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x - y - 7 = 0; \\ 2x - z + 5 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 3x - 2y + 8 = 0; \\ z = 3x; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x = t; \\ y = -t - 3; \\ z = -4t + 1 \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 2t - 1; \\ y = t; \\ z = -2t - 2; \end{cases}$

е) $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{1}$ и $\begin{cases} x = z + 1; \\ y = 1 - z. \end{cases}$

6.21. Выяснить взаимное расположение прямых в пространстве:

а) $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z+1}{4}$ и $\dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-2}{-3}$;

б) $\begin{cases} x+y-z+3=0; \\ 2x-y+4z-15=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 7x+5y-3z+13=0; \\ x+3y+z+14=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x+y+z-2=0; \\ 2x-y-3z+6=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x-3y+2z+2=0; \\ x+3y+z+14=0. \end{cases}$

6.22. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из точки A(3; -1; 2) на прямую

$$\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{3}.$$

6.23. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M перпендикулярно плоскости α, если

а) M(1; -2; 4), α: $3x-2y+5z-1=0$;

б) M(3; 1; 0), α: $2x+y-3z+2=0$;

в) M(-2; 3; 5), α: $x+3z-2=0$.

6.24. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M перпендикулярно прямой ℓ, если

а) M(5; -1; 2), ℓ: $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+3}{2}$;

б) M(3; 0; -1), ℓ: $\begin{cases} x=2t-3; \\ y=t+2; \\ z=-3t; \end{cases}$

в) M(-2; 1; 3), ℓ: $\begin{cases} x+2y-5z=0; \\ 2x-y+z=0. \end{cases}$

6.25. Найти точку пересечения прямой ℓ с плоскостью α, если:

а) ℓ: $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-5}{2}$; α: $2x+3y-2z+2=0$;

б) ℓ: $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{1}$; α: $x+y+z=0$;

в) ℓ: $\frac{x+4}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+2}{1}$; α: $x+2y+z=0$.

6.26. При каких значениях M и N плоскость $2x+My+Nz-15=0$ перпендикулярна прямой $x=-3t-4$; $y=2t+1$; $z=-5t-2$?

6.27. При каких C и D прямая $\frac{x}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{1}$ лежит в плоскости

$2x+y+Cz+D=0$?

6.28. При каких A и B прямая $\begin{cases} x+y-2=0; \\ x+2y+1=0 \end{cases}$ лежит в плоскости $Ax+By+z-3=0$?

6.29. При каком α плоскость $\alpha x+y-2z-7=0$ параллельна прямой $\begin{cases} x-2y+3z-4=0; \\ 4x-3y+4z+6=0 \end{cases}$?

6.30. Найти точки пересечения прямой $\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z}{3}$ с координатными плоскостями.

6.31. Найти угол между прямой ℓ и плоскостью α, если

а) ℓ: $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-6}=\frac{z+1}{3}$; α: $2x+y+z+4=0$;

б) ℓ: $\begin{cases} x=t+3; \\ y=-2t+1; \\ z=-t-1; \end{cases}$ α: $4x-2y+2z=6$;

в) ℓ: $\begin{cases} x+y-z=0; \\ 2x-3y+z=0; \end{cases}$ α: $3x+5y-4z=0$.

6.32. Найти проекцию точки M на плоскость α, если

а) M(3; 1; -2), α: $2x-y-5z+15=0$;

б) M(1; -2; 1); α: $2x+y+z-7=0$;

в) M(-2; 0; 3); α: $3x+y-5z-14=0$.

6.33. Найти точку M2, симметричную точке M1 относительно плоскости α, если:

а) M1(2; -2; 1), α: $x-4y-2z+13=0$;

б) M1(3; 1; 0), α: $5x-2y+14=0$;

в) M1(-2; 0; 3), α: $2x-2y-3z+6=0$.

6.34. Найти расстояние от точки M(1; -5; 3) до плоскости $x+4y-2z+4=0$.

6.35. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки M1(2; 3; -1), M2(1; 1; 2), M3(3; 0; 4).

6.36. Найти расстояние от точки Mo(1; 6; -3) до плоскости, проходящей через точки M1(0; -5; -2), M2(1; 4; 1) и C(3; 2; -5).

6.37. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точки пересечения плоскости $2x - y - 3z + 1$ с прямыми $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z+1}{2}$ и $\frac{x-5}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+4}{-6}$.

6.38. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M параллельно прямым ℓ_1 и ℓ_2, если

а) M(1; -1; 4), $\ell_1: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+2}{3}$; $\ell_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{4}$;

б) M(1; 0; -4), $\ell_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{8}$; $\ell_2: \frac{x+1}{0} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+5}{2}$;

в) M(2; -3; 1), $\ell_1: \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{1}$; $\ell_2: \frac{x+3}{0} = \frac{y}{4} = \frac{z-5}{3}$.

6.39. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку K(3; 1; -2) и через прямую $\frac{x-4}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$.

6.40. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $x = 2t + 1$; $y = -2t - 1$; $z = t + 3$ перпендикулярно плоскости $5x - y + z - 3 = 0$.

6.41. Составить уравнение плоскости, проектирующей прямую $\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{2}$ на плоскость $x + 4y - 3z + 7 = 0$.

6.42. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые: $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{1}$ и $\frac{x+1}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z}{1}$.

6.43. Составить уравнение плоскости, проходящей через перпендикуляры, опущенные из точки M(-3; 2; 5) на плоскости $4x + y - 3z + 13 = 0$ и $x - 2y + z - 11 = 0$.

6.44. Через прямую $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{3}$ провести плоскость, параллельную прямой $\frac{x}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-3}$.

6.45. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $x = 2t + 1$; $y = -3t + 2$; $z = 2t - 3$ и через точку M(2; -2; 1).

6.46. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат параллельно плоскости $2x - y + 3z - 5 = 0$ и перпендикулярно прямой $x = 2t + 1$; $y = 3t$; $z = -t - 2$.

6.47. Составить канонические уравнения прямой, которая проходит через точку M(3; -2; -4) параллельно плоскости $3x - 2y - 3z - 7 = 0$ и пересекает прямую $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}$.

6.48. Найти расстояние от точки P(2; 4; -5) до прямой $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{-1}$.

6.49. Лежит ли прямая ℓ в плоскости α, если

а) ℓ: $x = 2t$; $y = -t + 3$; $z = t - 1$; α: $x + 2y - z + 1 = 0$;

б) ℓ: $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-2}{2}$; α: $x + y - 3z + 4 = 0$;

в) ℓ: $x = t$; $y = t - 2$; $z = 4t + 1$; α: $2x + 2y - z + 5 = 0$.

§7. Кривые второго порядка

К кривым второго порядка относятся окружность, эллипс, гипербола и парабола.

Окружность. Уравнение окружности с центром в точке C(xo; yo) радиуса R имеет вид

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = R^2. \tag{1}$$

Если центр окружности совпадает с началом координат, то уравнение (1) принимает вид:

$$x^2 + y^2 = R^2 \tag{2}$$

Уравнение второй степени с двумя переменными, в котором отсутствует произведение $x \cdot y$, а коэффициенты при x2 и y2 равны, т.е. уравнение вида

$$Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0 \tag{3}$$

также определяет окружность. Чтобы найти центр и радиус этой окружности, надо привести уравнение (3) к виду (1), сгруппировав члены, содержащие x и y и выделив полные квадраты.

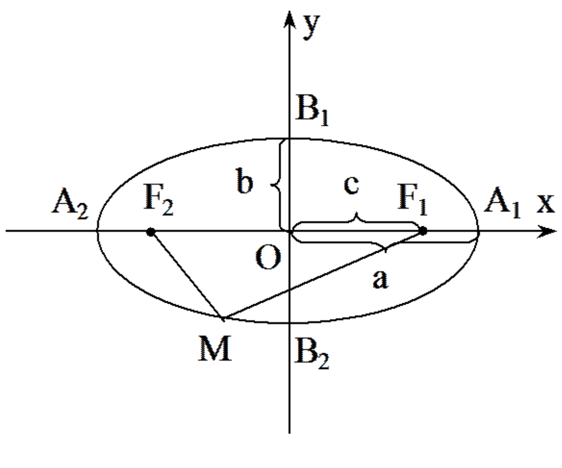


Рис. 31

Эллипс. Каноническое (т.е. простейшее) уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (4)$$

Числа a и b называются полуосями эллипса (a – большая полуось, b – малая полуось). Так же называются и отрезки соответствующей длины: OA1 – большая полуось, OB1 – малая полуось. Число 2a и отрезок A1A2 – большая ось; число 2b и B1B2 – малая ось.

Точки F1(c; 0) и F2(-c; 0) – фокусы эллипса. Параметры a, b и c связаны соотношением:

$$b^2=a^2-c^2 \qquad (5)$$

Число 2c (и отрезок F1F2) называется межфокусным расстоянием.

Все точки M эллипса удовлетворяют условию:

$$MF_1+MF_2=2a\,. \qquad (6)$$

Эксцентриситетом эллипса называют число

$$\varepsilon=\frac{c}{a}. \qquad (7)$$

Поскольку c < a, то эксцентриситет эллипса меньше единицы (ε < 1). Если ε = 0, то c = 0, т.е. фокусы эллипса сливаются и эллипс обращается в окружность.

Уравнение эллипса, центр которого находится в точке C(xo; yo), а оси параллельны осям координат, имеет вид:

$$\frac{(x-x_o)^2}{a^2}+\frac{(y-y_o)^2}{b^2}=1 \qquad (8)$$

Гипербола. Каноническое уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (9)$$

Число a и отрезок OA1 называются действительной полуосью гиперболы; число b и отрезок OB1 – мнимая полуось. Соответственно 2a и отрезок A1A2 – действительная ось, 2b

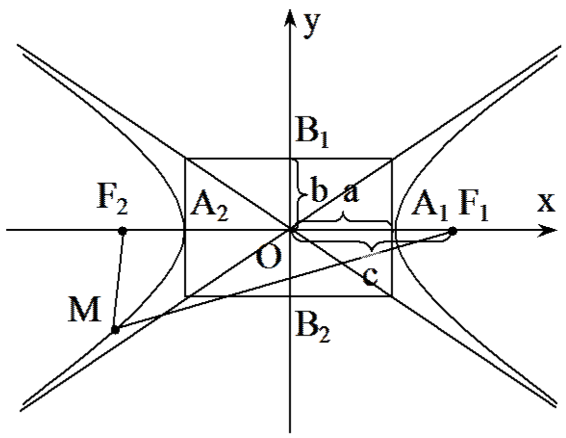


Рис. 32

и отрезок B1B2 – мнимая ось гиперболы, причём параметры a, b и c связаны соотношением:

$$b^2 = c^2 - a^2. \qquad (10)$$

Все точки M гиперболы удовлетворяют условию

$$MF_1 - MF_2 = \pm 2a. \qquad (11)$$

Эксцентриситет гиперболы определяется по формуле

$$\varepsilon = \frac{c}{a},$$

как и для эллипса, но поскольку для гиперболы c > a, то эксцентриситет гиперболы больше единицы.

Гипербола имеет две прямые – асимптоты, – с которыми неограниченно сближаются (но не пересекают) её ветви. Уравнения асимптот:

$$y = \pm\frac{b}{a}x, \qquad (12)$$

т.е. асимптоты гиперболы являются диагоналями прямоугольника со сторонами 2a и 2b.

Уравнение гиперболы с центром в точке C(xo; yo), оси которой параллельны осям координат, имеет вид:

$$\frac{(x - x_o)^2}{a^2} - \frac{(y - y_o)^2}{b^2} = 1 \qquad (13)$$

Парабола. Каноническое уравнение параболы имеет вид:

$$y^2 = 2px. \qquad (14)$$

Точка F($\frac{p}{2}$; 0) – фокус параболы, а прямая $x = -\frac{p}{2}$ – её директриса.

Все точки M параболы удовлетворяют условию:

$$MF = MN. \qquad (15)$$

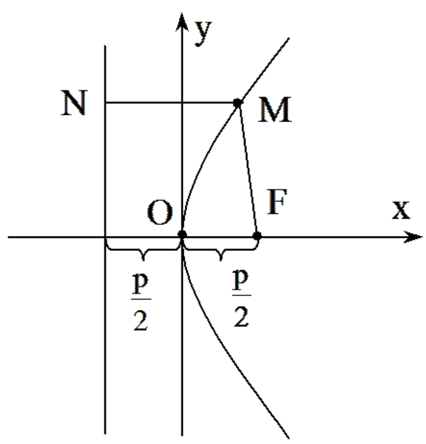


Рис. 33

Уравнение параболы, вершина которой находится в точке C(xo; yo), а ось параллельна оси Ox (рис. 34), имеет вид:

$$(y - y_o)^2 = 2p(x - x_o) \qquad (16)$$

Следует также знать уравнения парабол, расположенных в системе координат не каноническим образом, а именно: $y^2 = -2px$ (рис. 35), $x^2 = 2py$ (рис. 36) и $x^2 = -2py$ (рис. 37).

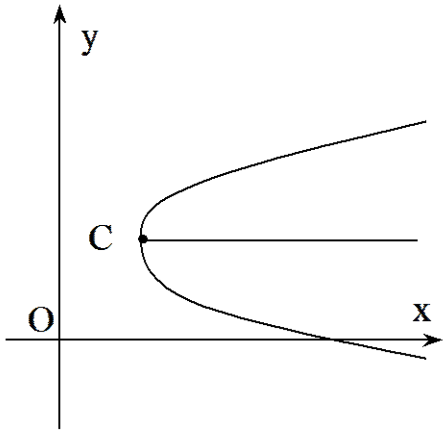


Рис. 34

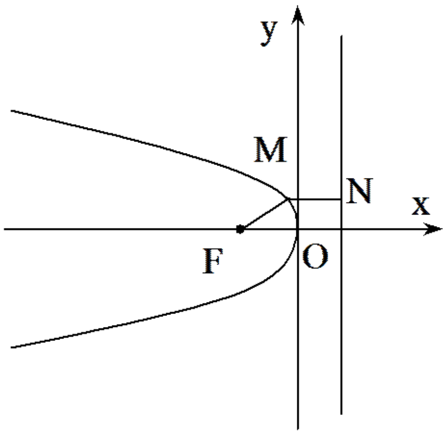


Рис. 35

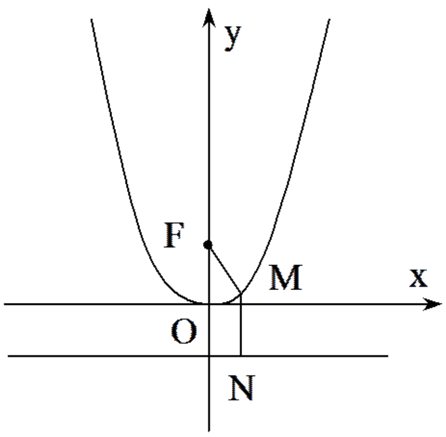


Рис. 36

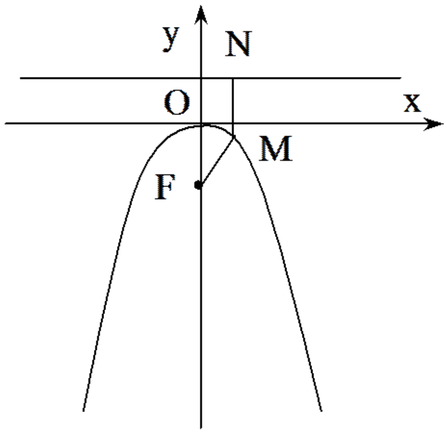


Рис. 37

Задача 1. Составить уравнение диаметра окружности

$$x^2 - 4x + y^2 + 6y - 12 = 0,$$

параллельного прямой $5x - 2y + 7 = 0$.

Решение

Чтобы составить уравнение диаметра окружности надо найти координаты её центра. Для этого приведём уравнение окружности к виду (1):

$$\left(x^2 - 4x + 4\right) - 4 + \left(y^2 + 6y + 9\right) - 9 - 12 = 0 \Rightarrow$$

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25,$$

т.е. центром окружности является точка C(2; -3), а её радиус R = 5.

Составляем уравнение прямой, проходящей через точку C параллельно прямой $5x - 2y + 7 = 0$. Вектор нормали $\overline{n}(5;\ -2)$ данной прямой будет вектором нормали и для искомой прямой, поэтому уравнение диаметра имеет вид:

$$5 \cdot (x-2) - 2 \cdot (y+3)^2 = 0 \Rightarrow 5x - 2y - 16 = 0.$$

Задача 2. Составить уравнение эллипса, каноническим образом расположенного в системе координат по следующим данным:

а) 2a = 8; 2c = 6;

б) 2c = 8; $\varepsilon = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$;

в) a = 6 и точка M(2; $2\sqrt{3}$) лежит на эллипсе;

г) $\varepsilon = \dfrac{3}{4}$ и точка M($4\sqrt{3}$; $\sqrt{7}$) лежит на эллипсе.

Решение

Чтобы составить уравнение эллипса, надо найти его полуоси a и b.

а) По условию a = 4; c = 3. Поскольку a, b и c связаны соотношением $b^2 = c^2 - a^2$, то $b^2 = 16 - 9 = 7$. Подставляя в уравнение эллипса (4) $a^2 = 16$, $b^2 = 7$, получаем: $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{7} = 1$.

б) По условию c = 4, а так как $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$, то из условия имеем $\dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, откуда получаем: $\dfrac{4}{a} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow a = 4\sqrt{2}$. Параметр b находим из соотношения $b^2 = c^2 - a^2$: $b^2 = 32 - 16 = 16$, так что уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

в) По условию точка M(3; $2\sqrt{3}$) лежит на эллипсе, следовательно её координаты удовлетворяют уравнению эллипса. Подставляя в уравнение эллипса вместо текущих координат координаты точки M и положив a = 6, имеем:

$$\frac{9}{36} + \frac{12}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{12}{b^2} = 1 - \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{12}{b^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow b^2 = 16.$$

Следовательно, уравнение этого эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1.$$

г) $\varepsilon=\frac{3}{4}$ означает, что $\frac{c}{a}=\frac{3}{4}$.

Координаты точки M удовлетворяют уравнению эллипса, т.е. $\frac{48}{a^2}+\frac{7}{b^2}=1$.

Для определения параметров a, b и c имеем систему уравнений:

$$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{3}{4};\\ \frac{48}{a^2}+\frac{7}{b^2}=1;\\ b^2=a^2-c^2.\end{cases}$$

Из первого уравнения имеем: $c=\frac{3}{4}a$. Подставляя это выражение в третье уравнение, получаем: $b^2=a^2-\frac{9}{16}a^2 \Rightarrow b^2=\frac{7}{16}a^2$.

Подставляем найденное b^2 во второе уравнение:

$$\frac{48}{a^2}+\frac{7\cdot 16}{7a^2}=1 \Rightarrow \frac{48}{a^2}+\frac{16}{a^2}=1 \Rightarrow \frac{64}{a^2}=1 \Rightarrow a^2=64.$$

Тогда $b^2=\frac{7}{16}\cdot 64 \Rightarrow b^2=28$, следовательно, уравнение эллипса имеет вид: $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{28}=1$.

Задача 3. Для гиперболы $9x^2-16y^2-18x+64y-199=0$ найти полуоси, фокусы, эксцентриситет, уравнения асимптот. Сделать чертёж.

Решение

Приведём уравнение гиперболы к виду $\frac{(x-x_o)^2}{a^2}-\frac{(y-y_o)^2}{b^2}=1$. Для этого сгруппируем члены, содержащие x и y, вынося при этом коэффициенты при x^2 и y^2 за скобки, и дополним выражения в скобках до полного квадрата:

$$9\left(x^2-2x+1-1\right)-16\left(y^2-4y+4-4\right)-199=0 \Rightarrow$$

$$9(x-1)^2-9-16(y-2)^2+64-199=0 \Rightarrow$$

$$9(x-1)^2-16(y-2)^2=144.$$

Разделив левую и правую части уравнения на 144, получаем:

$$\frac{(x-1)^2}{16}-\frac{(y-2)^2}{9}=1.$$

Гипербола имеет центр в точке C(1; 2); её полуоси: a = 4; b = 3. Из соотношения $b^2=c^2-a^2$ находим c: $c^2=a^2+b^2 \Rightarrow c^2=16+9$, т.е. c = 5, а значит эксцентриситет гиперболы $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$. Чтобы было легче найти координаты фокусов и уравнения асимптот, целесообразно сначала построить гиперболу, помня при этом, что её асимптоты проходят через центр C(1; 2) и является диагоналями прямоугольника со сторонами 2a и 2b (рис. 38).

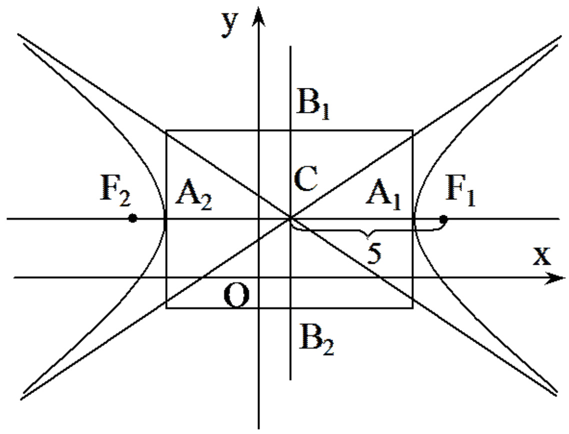


Рис. 38

С помощью чертежа нетрудно усмотреть, что фокусы гиперболы находятся в точках F1(6; 2) и F2(-4; 2).

Угловые коэффициенты асимптот гиперболы

$$k=\pm\frac{b}{a}=\pm\frac{3}{4}.$$

Обе прямые проходят через точку C(1; 2). Используя уравнение вида

$$y-y_o=k(x-x_o)^2,$$

находим: $y-2=\pm\frac{3}{4}(x-1)^2$, откуда после преобразований получаем уравнения асимптот:

$$3x-4y+5=0 \text{ и } 3x+4y-11=0.$$

Задачи для решения

7.1. Найти центр и радиус окружности:

а) $x^2+y^2+12x-4y-7=0$;

б) $x^2-2x+y^2-3y+1=0$;

в) $x^2+y^2+6y+5=0$;

г) $x^2+3x+y^2=0$.

7.2. Составить уравнение окружности, для которой точки A(3; 2) и B(-1; 6) являются концами одного диаметра.

7.3. Составить уравнение окружности, для которой концами одного диаметра являются начало координат и точка пересечения прямых $2x - y = 7$ и $3x + y = 3$.

7.4. Составить уравнение окружности, проходящей через три точки: A(0; 2), B(1; 1) и C(2; -2).

7.5. Составить уравнение окружности, если её центр совпадает с началом координат, а прямая $3x - 4y + 20 = 0$ является касательной к окружности.

7.6. Составить уравнение окружности с центром в точке C(2; 3), касающейся прямой $x - 2y - 1 = 0$.

7.7. Найти кратчайшее расстояние от точки C(6; -8) до окружности $x^2 - 4x + y^2 + 10y + 25 = 0$.

7.8. Найти расстояние от центра окружности $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$ до прямой $y - 6{,}5 = 0$.

7.9. Составить уравнение линии центров окружностей $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$ и $x^2 + y^2 - 6x = 0$.

7.10. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и центр окружности $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$.

7.11. Составить уравнение диаметра окружности $x^2 + y^2 + 8x - 6y - 17 = 0$,

а) параллельного прямой $5x + 3y - 1 = 0$;

б) перпендикулярного прямой $7x - 2y + 3 = 0$;

в) параллельного биссектрисе I-III координатных углов;

г) проходящего через точку пересечения прямых $x + 2y = 0$ и $2x - 3y + 7 = 0$.

7.12. Составить уравнения касательных к окружности $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0$ в точках её пересечения с осью Ox.

7.13. Составить уравнения касательных к окружности $x^2 + y^2 = 8$ в точках её пересечения с биссектрисой II-IV координатных углов.

7.14. Для эллипса $4x^2 + 9y^2 = 36$ найти полуоси, фокусы, эксцентриситет. Сделать чертёж

7.15. Составить уравнение эллипса, каноническим образом расположенного в системе координат, по следующим данным:

а) 2a = 10; 2c = 8; б) 2c = 6; $\varepsilon = \frac{3}{5}$;

в) 2a = 10; $\varepsilon = \frac{3}{5}$; г) 2b = 10; $\varepsilon = \frac{12}{13}$;

д) a = 4, а точка M(2; -2) лежит на эллипсе;

е) $\varepsilon = \frac{2}{3}$, точка M($-2\sqrt{5}$; 2) лежит на эллипсе;

ж) c = 2, точка M(2; 3) лежит на эллипсе;

з) точки M1(4; $-\sqrt{3}$) и M2($2\sqrt{3}$; 3) лежат на эллипсе;

и) в = 3, точка M(2; $-\frac{5}{3}$) лежит на эллипсе.

7.16. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и через центр эллипса $2x^2 + 3y^2 + 4x - 12y - 10 = 0$.

7.17. Для эллипса $4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$ найти полуоси, фокусы, эксцентриситет. Сделать чертёж.

7.18. Для гиперболы $16x^2 - 20y^2 = 320$ найти полуоси, фокусы, эксцентриситет, асимптоты. Сделать чертёж.

7.19. Найти координаты центра, полуоси, фокусы, эксцентриситет эллипса $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$. Сделать чертёж.

7.20. Вычислить площадь 4-угольника, две вершины которого лежат в фокусах эллипса $5x^2 + 9y^2 = 45$, а две другие совпадают с концами его малой оси.

7.21. Составить уравнение гиперболы, каноническим образом расположенной в системе координат, по следующим данным:

а) a = 4; $\varepsilon = \frac{3}{2}$;

б) в = 4; $\varepsilon = \sqrt{\frac{5}{3}}$;

в) c = 10; y = $\pm\frac{3}{4}x$ – уравнения асимптот;

г) $\varepsilon = \sqrt{2}$, точка M(-5; 3) лежит на гиперболе;

д) $y = \pm\frac{x}{2}$ – асимптоты, точка M(12; $3\sqrt{3}$) лежит на гиперболе;

е) точки M1(6; -1), M2(-8; $2\sqrt{2}$) лежат на гиперболе;

ж) $2c = 8\sqrt{3}$, а угол между асимптотами равен 120°.

7.22. Найти центр, полуоси, фокусы, эксцентриситет, асимптоты гиперболы:

а) $9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y - 124 = 0$;

б) $3x^2 - 4y^2 - 12x - 8y - 40 = 0$;

в) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$.

Сделать чертёж.

7.23. Фокусы гиперболы совпадают с фокусами эллипса $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$. Составить уравнение гиперболы, если её эксцентриситет $\varepsilon = 2$.

7.24. Найти точки с абсциссой $x_o = \frac{3}{4}$ на параболе, фокус которой находится в точке (3; 0), а вершина – в начале координат.

7.25. Через фокус параболы $y^2 = 8x$ проведена хорда, перпендикулярная к её оси. Определить длину этой хорды.

7.26. Составить уравнение прямой, проходящей через вершину параболы $y^2 = 2x + 4$ перпендикулярно прямой $5x - 2y + 3 = 0$.

7.27. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что:

а) парабола расположена в правой полуплоскости симметрично оси Ox и её параметр p = 4;

б) парабола расположена в правой полуплоскости симметрично оси Ox и проходит через точку C(3; $3\sqrt{2}$);

в) парабола расположена в правой полуплоскости и имеет фокус в точке F($\frac{3}{2}$; 0);

г) парабола расположена в левой полуплоскости симметрично оси Ox и проходит через точку Q(-4; $2\sqrt{3}$);

д) парабола расположена в верхней полуплоскости симметрично оси Oy и имеет параметр p = $\frac{1}{4}$;

е) парабола имеет осью ось Oy, а фокусом – точку F(0; -3).

7.28. Найти координаты вершины параболы

а) $y = 4x^2 - 8x + 7$; б) $y = \frac{1}{4}x^2 + x + 2$.

7.29. Составить уравнение параболы, если дан её фокус F(-5; 0) и уравнение директрисы $x - 5 = 0$.

7.30. Найти фокус и уравнение директрисы параболы $y^2 = 24x$.

7.31. Построить замкнутую область, ограниченную линиями:

а) $y = 4 - x^2$; $2x + y + 4 = 0$;

б) $y = -\sqrt{9 - x^2}$; $x + 2y = 0$; $2x - y = 0$;

в) $x = -\sqrt{16 - y^2}$; $x = -\sqrt{4y - y^2}$; $x - 3y = 0$;

г) $x = \sqrt{4y - y^2}$; $y = 4$; $3x + 4y = 0$;

д) $y = -\sqrt{x + 4}$; $-x + y - 2 = 0$; $2x + y - 2 = 0$;

е) $x = -\sqrt{y - 1}$; $x + y - 1 = 0$; $y = 0$; $x = -2$;

ж) $y = -\sqrt{\frac{4}{9}\left(9 - x^2\right)}$; $x = -\sqrt{9 - \frac{3}{2}y}$; $2x + y = 6$;

з) $y = \sqrt{\frac{4x + 12}{3}}$; $y = \sqrt{4 - 2x}$; $y = 4$;

и) $xy = -3$; $x = -\sqrt{\frac{y}{3}}$; $x = -3$; $y = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демидович Б.П., Кудрявцев В.А. Краткий курс высшей математики. М.:АСтрель:АСТ,2007. -.425 с.
2. Высшая математика для экономистов. Учеб. Для вузов/под ред. Н.Ш. Кремера. М.: ЮНИТИ-ДАНА,2008.-.342 с.
3. Карасев А.И., Аксютина З.М., Савельева Т.И. Курс высшей математики для экономических вузов. Часть 1,2: М.: Высшая школа. 1982.-.272, 320 с.
4. Практикум по высшей математике для экономистов. Учебное пособие для вузов/под ред.Н.Ш. Кремера. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. -354с.
5. Высшая математика для экономических специальностей (ч.1,2) учеб. и практикум/ под ред.Н.Ш. Кремера. М.: Высш. образование, 2008. – 344,410 с.
6. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах в 2 ч. М.:ОНИКС-21 век. Мир и образование, 2005.- 304,415 с.
7. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.- М.: Изд-во Физико-мат. лит., 2005.-.352 с.
8. Самаров К.Л. Задачи с решениями по высшей математике и математическим методам в экономике. М: Дашков и К,2007. -424 с.

СОДЕРЖАНИЕ