Министерство образования и науки Российской Федерации

Ростовский государственный экономический университет (РИНХ)

Л. В. Сахарова

МАТЕМАТИКА

УЧЕБНИК

Ростов-на-Дону
2017

УДК 51 (075)
С 22

С 22 Сахарова Л. В. Математика: учебник / Л. В. Сахарова. – Ростов н/Д: Издательско-полиграфический комплекс РГЭУ (РИНХ), 2017. – 116 с.

ISBN 978-5-7972-2361-0

Учебник содержит теоретический материал, а также более 500 задач по разделам «Пределы. Дифференциальное исчисление функции одной переменной», «Неопределенный и определенный интеграл» и «Функции нескольких переменных. Дифференциальные уравнения» курса математического анализа. Материал сгруппирован в параграфы по темам. В начале каждого параграфа содержится подробное изложение теоретического материала и решение некоторых типовых задач. В конце параграфов представлены задачи различного уровня сложности, начиная от простейших до повышенного уровня сложности.

Учебник предназначен для проведения занятий по математике и организации домашней самостоятельной работы студентов очной и заочной формы обучения направления подготовки «Менеджмент».

Рецензенты:
д.ф.-м. н., профессор кафедры «Дифференциальные и интегральные уравнения»
ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет» ***Боев Н. В.***

к.э.н., доцент кафедры «Фундаментальная и прикладная математика»
ФГБОУ ВПО «РГЭУ (РИНХ)» ***Алексейчик Т. В.***

Утверждено в качестве учебника
редакционно-издательским советом РГЭУ (РИНХ)

ISBN 978-5-7972-2361-0

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие соответствует программе дисциплины «Математика» для бакалавров дневного и заочного отделения подготовки направления «Менеджмент». Оно содержит обзор теории, а также задачи различных уровней сложности по разделам математического анализа «Пределы. Дифференциальное исчисление функции одной переменной», «Неопределенный и определенный интеграл» и «Функции нескольких переменных. Дифференциальные уравнения».

Раздел «Пределы. Дифференциальное исчисление функции одной переменной»» разбит на четыре параграфа, раздел «Неопределенный и определенный интеграл» на два параграфа, раздел «Функции нескольких переменных. Дифференциальные уравнения» также на два параграфа, состоящие из теоретического материала, содержащего ключевые определения и формулы, примеров решения задач, набора заданий для самостоятельного решения. Материал проиллюстрирован применениями изучаемых математических понятий в экономических расчетах.

Количество задач, содержащихся в пособии, позволяет варьировать материал, используемый преподавателем для проведения занятий, домашних заданий и подготовки к выполнению типового расчетного задания.

Нумерация задач самостоятельна в каждом параграфе. Символика и терминология соответствуют учебным пособиям, рекомендуемым программой курса дисциплины «Математика».

Часть 1. ПРЕДЕЛЫ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. Пределы

1.1. Предел последовательности

Число a называется **пределом последовательности** $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ при $n \to \infty$, $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N(\varepsilon) > 0$, что для всех $n > N(\varepsilon)$ справедливо неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Последовательность, имеющая предел, называется **сходящейся**.

Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно малой**, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ и **бесконечно большой**, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходящиеся, то:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} \quad \left(\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0\right)$.

Если $x_n \le y_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Сумма n членов арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n, \text{ где } a_n = a_1 + d \cdot (n-1).$$

Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$S = \frac{a_1}{1-q}, \text{ где } |q| < 1.$$

Пример 1. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, если $x_n = \dfrac{2n-1}{2n+1}$.

Решение. Для любого $\varepsilon > 0$ попробуем найти такое натуральное число $N(\varepsilon)$, что для всякого натурального $n > N(\varepsilon)$ выполнялось неравенство $|x_n - 1| < \varepsilon$.

Для этого найдем абсолютную величину разности

$$\left|\frac{2n-1}{2n+1}-1\right|=\left|\frac{-2}{2n+1}\right|=\frac{2}{2n+1}.$$

Значит, неравенство $|x_n-1|<\varepsilon$ выполняется, если $\frac{2}{2n+1}<\varepsilon$ выполняется, откуда $n>\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{2}$. Поэтому в качестве $N(\varepsilon)$ можно взять целую часть числа $\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{2}$.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, если $x_n=\frac{3n^2+5n+4}{2+n^2}$.

Решение. $x_n=\dfrac{3+\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}}{\frac{2}{n^2}+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n^2}+1\right)}=3$.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, если $x_n=\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{5n^3+n+1}$

Решение. $x_n=\dfrac{n(n+1)\cdot(2n+1)}{6(5n^3+n+1)}=\dfrac{2n^3+3n^2+n}{6(5n^3+n+1)}=\dfrac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{30+\frac{6}{n^2}+\frac{6}{n^3}}$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{15}$.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, если $x_n=\sqrt{2n+3}-\sqrt{n-1}$.

Решение. $x_n=\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{2+3/n}-\sqrt{1-1/n}\right)\to+\infty$ при $n\to\infty$, так как второй множитель имеет положительный предел.

1.2. Предел функции

Определение. ***Окрестность конечной точки*** $x_0\in R$ (обозначение: $U(x_0)$) – любой интервал, содержащий эту точку: $U(x_0)=\{x \mid x_1<x_0<x_2\}$. Тогда $U(x_0,\delta)=\{x \mid x_0-\delta<x<x_0+\delta\}=\{x \mid |x-x_0|<\delta\}$ – ***симметричная окрестность*** точки x_0 ***радиуса*** $\delta>0$).

Число A называется ***пределом*** функции $f(x)$ при x, стремящемся к x_0, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta>0$, что для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $0<|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

Обозначения предела функции $f(x)$ при x, стремящемся к x_0:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ или } f(x)\to A \text{ при } x\to x_0,$$

С использованием логических символов это определение компактно записывается в виде:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x\ (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon).$$

Смысл определения заключается в том, что $f(x)$ будет сколь угодно близким к A при всех x, достаточно близких к x_0.

При вычислении пределов используют следующие правила и свойства

1) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+y(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} y(x)$

2) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot y(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} y(x)$

3) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)}{y(x)}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} y(x)};$ $\qquad \left(\lim\limits_{x\to x_0} y(x) \neq 0\right)$

4) $\lim\limits_{x\to x_0} cf(x)\cdot y(x)) = c\lim\limits_{x\to x_0} f(x);(c = const);$ $\qquad$ 5) $\lim\limits_{x\to x_0} C = C;$

1.3. Бесконечно малые функции

Функция $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой** при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0$. Аналогично определяется бесконечно малая $\alpha(x)$ при $x \to \infty$.

Функция $f(x)$ называется **бесконечно большой** при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = \infty$. Аналогично определяется бесконечно большая $f(x)$ при $x \to \infty$. Величина, обратная бесконечно большой, является бесконечно малой.

Свойства бесконечно малых функций

1. Сумма и произведение любого конечного числа бесконечно малых функций при $x \to a$ также являются бесконечно малыми при $x \to a$.
2. Произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию есть бесконечно малая.

3. Величина. Обратная бесконечно малой функции, есть бесконечно большая функция.

Пусть функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c$, где c – некоторое конечное число, отличное от нуля, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются **бесконечно малыми одного порядка**. Если $c=1$, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются **эквивалентными** $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Важнейшие эквивалентности при $x \to 0$***:***

1. $\sin x \sim x$ 2. $tgx \sim x$ 3. $\arcsin x \sim x$ 4. $arctgx \sim x$

5. $1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$ 6. $e^x - 1 \sim x$ 7. $a^x - 1 \sim x \cdot \ln a$ 8. $\ln(1+x) \sim x$

9. $\log_a(1+x) \sim x \cdot \log_a e$ 10. $(1+x)^k - 1 \sim k \cdot x, \quad k > 0$ 11. $\sqrt{1+x} - 1 \sim \dfrac{x}{2}$

Пример 5. Доказать, что функция $f(x) = \dfrac{2x-4}{x^2+5}$ при $x \to 2$ является бесконечно малой.

Решение. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-4}{x^2+5} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\dfrac{2x}{x^2} - \dfrac{4}{x^2}}{\dfrac{x^2}{x^2} + \dfrac{5}{x^2}} = \dfrac{0}{1} = 0$.

Пример 6. Определить порядок малости величины β относительно бесконечно малой величины α, если $\beta = \cos\alpha - \cos 2\alpha$.

Решение. $\beta = \cos\alpha - \cos 2\alpha = 2\sin\dfrac{3}{2}\alpha \cdot \sin\dfrac{\alpha}{2}$. Отсюда

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\beta}{\alpha^2} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{2\sin\left(\dfrac{3\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\alpha^2} = \frac{3}{2}.$$

Следовательно, β – бесконечно малая того же порядка, что и α^2, т.е. второго порядка относительно α.

Пример 7. Доказать, что бесконечно малые $\alpha = x$ и $\beta = x \cdot \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (при $x \to 0$) несравнимы между собой, т.е. предел их отношения не существует.

Решение. В самом деле, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ не существует. Значит, эти бесконечно малые функции несравнимы.

Пример 8. Заменить бесконечно малую функцию эквивалентной, если $f(\alpha)=3\sin\alpha-5\alpha^3$.

Пример 8. С помощью принципа замены эквивалентных вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\ln(1+4x)}$.

Решение. Имеем $\sin 5x\sim 5x$, $\ln(1+4x)\sim 4x$. Поэтому $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\ln(1+4x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{4x}=\dfrac{5}{4}$.

Пример 9. С помощью принципа замены эквивалентных вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}$.

Решение. Из таблицы эквивалентности бесконечно малых функций устанавливаем: $\sqrt[4]{1+x^2}-1\sim\dfrac{x^2}{4}$, $\ln\cos x\sim\ln[1+(\cos x-1)]\sim\cos x-1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{[1+(\cos x-1)]}{\dfrac{x^2}{4}}=4\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-4\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^2}{2}}{x^2}=-2.$$

1.4. Примеры вычисления пределов

Пример 10. $\lim\limits_{x\to 2}(4x^2-6x+3)=\lim\limits_{x\to 2}4x^2-\lim\limits_{x\to 2}6x+\lim\limits_{x\to 2}3=$

$=4\lim\limits_{x\to 2}x^2-6\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}3=4\cdot 2^2-6\cdot 2+3=7$.

Пример 11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-4x+7}{2x^2-5x+6}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-4x+7)}{\lim\limits_{x\to 1}(2x^2-5x+6)}=\dfrac{3\lim\limits_{x\to 1}x^2-4\lim\limits_{x\to 1}x+\lim\limits_{x\to 1}7}{2\lim\limits_{x\to 1}x^2-5\lim\limits_{x\to 1}x+\lim\limits_{x\to 1}6}=\dfrac{3\cdot 1^2-4\cdot 1+7}{2\cdot 1^2-5\cdot 1+6}=2$.

Пример 12. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x-4}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-2)\cdot(x-4)}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}(x-2)=2$.

Пример 13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+5x+4}{3x^2+7x-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{6x^2}{x^2}+\dfrac{5x}{x^2}+\dfrac{4}{x^2}}{\dfrac{3x^2}{x^2}+\dfrac{7x}{x^2}-\dfrac{2}{x^2}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(6+\dfrac{5}{x}+\dfrac{4}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3+\dfrac{7}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)}=\dfrac{6+0+0}{3+0-0}=2$.

Пример 14. $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x^2+1}-1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to+0}(x^2-9)}{\lim\limits_{x\to+0}\sqrt{x^2+1}-1}=\left[\dfrac{-9}{0}\right]=-\infty$.

Пример 15. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x-3)\cdot(x+3)\cdot(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)\cdot(\sqrt{x+1}+2)}=$

$=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x-3)\cdot(x+3)\cdot(\sqrt{x+1}+2)}{x+1-4}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x+3)\cdot(\sqrt{x+1}+2)}{1}=(3+3)\cdot(\sqrt{3+1}+2)=6\cdot(2+2)=24$.

Пример 16. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{1+2+3+\ldots+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1+(2n-1)}{2}\cdot n}{\frac{1+n}{2}\cdot n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2n-1}{1+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{1+n}=2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}=2$.

Пример 17. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{12n+5}{\sqrt[3]{27n^3+6n^2+8}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{12n}{n}+\frac{5}{n}}{\sqrt[3]{\frac{27n^3}{n^3}+\frac{6n^2}{n^3}+\frac{8}{n^3}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{12}{\sqrt[3]{27}}=\dfrac{12}{3}=4$.

Пример 18. $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}=\lim\limits_{x\to8}\dfrac{(9+2x-25)\cdot(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(x-8)\cdot(\sqrt{9+2x}+5)}=$

$=\lim\limits_{x\to8}\dfrac{(2x-16)\cdot(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(x-8)\cdot(\sqrt{9+2x}+5)}=2\cdot\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt{9+2x}+5}=\dfrac{12}{5}$.

1.5. Специальные пределы

1-й спецпредел

Пусть $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x\to x_0$, тогда $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$, неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, т.е. предел отношения синуса бесконечно малого аргумента к самому этому аргументу равен единице, например:

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{2x}=1$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\frac{x}{5}}{\frac{x}{5}}=1$; $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sin(x-2)}{(x-2)}=1$

Как следствие, получаются формулы:

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{tg\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$; $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\arcsin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$; $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{arctg\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$.

Пример 19. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x\cdot5}{x\cdot5}=5\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{5x}=5\cdot1=5$.

Пример 20. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{tg5x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot 2x}{tg5x\cdot 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot$

$$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot 5}{tg5x\cdot 5}=1\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{tg5x}\cdot\frac{2}{5}=1\cdot 1\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{5}.$$

Пример 21. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg^2 3x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\ 3x\cdot tg3x\cdot 9}{3x\cdot x\cdot 3}=9$

$$\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\ 3x}{3x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\ 3x}{3x}=9$$

Пример 22. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 3x}{x\ \sin 5x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{x\ \sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\cdot\sin\ 3x\cdot\sin 3x\cdot 3x}{3x\ \cdot\sin 5x\cdot 3x}==\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x\cdot 5}{\sin 5x\cdot 5}=\frac{9}{5}$

2-й спецпредел: $\lim\limits_{x\to x_0}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e$

Раскрывает неопределенность вида $\left(1^{\infty}\right)$

Например: $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}=e$; $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{x}}=e$; $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{-\frac{1}{\sin x}}=e.$

Пример 23. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{5}{x}}=\left(1^{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{x}}\right)^{\frac{x}{3}\frac{5}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot 5}{3\cdot x}}=e^{\frac{5}{3}}$

3-й спецпредел: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\ln(1+\alpha(x))}{\alpha(x)}=1$

Раскрывает неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$

Например: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x^2)}{3x^2}=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-7x)}{-7x}=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+tg5x)}{tg5x}=1.$

Пример 24. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{\sin 2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)\cdot 5x}{5x\cdot\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x\cdot 2}{\sin 2x\cdot 2}=\frac{5}{2}.$

Пример 25. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 3x}{\ln\left(1+5x^2\right)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x^2\sin^2 3x}{5x^2\ln\left(1+5x^2\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x\cdot 9}{5x^2\cdot 9}=\frac{9}{5}$

4-й спецпредел: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{a^{\alpha(x)}}{\alpha(x)}=\ln a$

Раскрывает неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Например: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^{2x}-1}{2x}=\ln 3$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5^{tg3x}-1}{tg3x}=\ln 5$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^{2x}-1}{2x}=\ln 3$

Пример 26. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^{5x}-1)\cdot 5}{3x\cdot 5}=\frac{5}{3}\ln e=\frac{5}{3}.$

Пример 27. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^{2x}-1}{\sin 5x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(3^{2x}-1)\cdot 2x}{2x\cdot\sin 5x}=\ln 3\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\cdot 5}{\sin 5x\cdot 5}=\frac{2}{5}\ln 3$

1.6. Непрерывность функции

Пусть функция $y=f(x)$ определена на множестве x и пусть точка $x_0\in x$ является предельной точкой этого множества. Говорят, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

Функция $f(x)$ **непрерывна в точке** x_0 тогда и только тогда, когда $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$. Функция $f(x)$ **непрерывна на множестве** x, если она непрерывна в каждой точке этого множества. Пусть точка x_0 является предельной точкой области определения x функции $f(x)$. Точка x_0 называется **точкой разрыва первого рода** функции $f(x)$, если пределы справа и слева конечны. Если при этом $f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$, то x_0 – **точка устранимого разрыва**; если же $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$, то x_0 – точка **неустранимого разрыва первого рода**, а разность $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$ называется **скачком функции** $f(x)$ в точке x_0.

Если хотя бы один из пределов $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$ не существует или бесконечен, то точка x_0 называется **точкой разрыва второго рода** функции $f(x)$.

Пример 28. Дана функция

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}\left(2x^2+3\right) & \text{при} \quad -\infty < x \le 1,\\ 6-5x & \text{при} \quad 1 < x < 3,\\ x-3 & \text{при} \quad 3 \le x < \infty.\end{cases}$$

Найти точки разрыва, если они существуют. Определить скачки функции в точках, где имеется разрыв первого рода.

Решение. Область определения функции – вся числовая ось $(-\infty; +\infty)$. На интервалах $(-\infty; 1)$, $(1; 3)$, $(3; +\infty)$ функция непрерывна. Поэтому разрывы возможны лишь в точках $x=1$, $x=3$, в которых изменяется аналитическое задание функции. Найдем односторонние пределы функции в точке $x=1$:

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{5}\left(2x^2+3\right)=1; \qquad f(1+0)=\lim_{x\to 1+0}(6-5x)=1.$$

Значение функции в точке $x=1$ определяется первым аналитическим выражением, т.е. $f(1)=\frac{2+3}{5}=1$. Так как $f(1-0)=f(1+0)=f(1)$, то в точке $x=1$ функция непрерывна. Рассмотрим точку $x=3$:

$$f(3-0)=\lim_{x\to 3-0}(6-5x)=-9; \qquad f(3+0)=\lim_{x\to 3+0}(x-3)=0.$$

Мы видим, что правый и левый пределы, хотя и конечны, не равны между собой, поэтому в точке $x=3$ функция имеет разрыв первого рода.

Скачок функции в точке разрыва $f(3+0)-f(3-0)=0-(-9)=9$.

Пример 29. Исследовать непрерывность функции $f(x)=\frac{x^3+1}{x+1}$.

Решение. $f(-1-0)=f(-1+0)=\lim_{x\to -1}\left(x^2-x+1\right)=3$, т.е. оба односторонних предела конечны и совпадают. Однако в точке $x=-1$ функция не определена и поэтому не является непрерывной. График функции представляет собой параболу $y=x^2-x+1$ с «выколотой» точкой $M(-1, 3)$. Если доопределить функцию, положив $f(-1)=3$, то функция станет непрерывной. Таким образом, при $x=-1$ функция имеет устранимый разрыв.

Пример 30. Установить характер разрыва функции $f(x)=\frac{2x+1}{x-2}$ в точке $x_0=2$.

Решение. Находим: $\lim_{x\to 2-0}=\frac{2x+1}{x-2}=-\infty$, $\lim_{x\to 2+0}=\frac{2x+1}{x-2}=+\infty$, то есть функция в точке $x_0=2$ не имеет ни одного из односторонних пределов. Отсюда следует, что $x_0=2$ – точка разрыва второго рода.

Задачи для решения

В задачах 1.1–1.64 вычислить пределы:

1.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n+1)^2}{5n^2}$.

1.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{50n^3+3n^2}{0{,}2n^4-3n^3+5}$.

1.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3-100n-3}{1000n^2+7}$.

1.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$.

1.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^4+(n-1)^4}$.

1.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^4-(n-1)^4}{(2n+1)^4+(n-1)^4}$.

1.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+10)(n+11)(n+12)}{(3n+10)(4n+11)(5n+12)}$.

1.8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2-3n+1}}{5n+2}$.

1.9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{5n^2+n}}{7n-2}$.

1.10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(n+\sqrt{n^2+3}\right)^2}{\sqrt[3]{8n^6+1}}$.

1.11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2+\sqrt{1+n^2+n^4}}{\sqrt{9n^4+1}}$.

1.12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n!-(n+1)!}$.

1.13. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+4)!}{(n+3)!+(n+2)!}$.

1.14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!-(n+1)!}{(n+2)!+(n+1)!}$.

1.15. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}$.

1.16. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$.

1.17. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2+3-4+\ldots-2n}{\sqrt{n^2+1}}$.

1.18. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{(n-1)\cdot n}\right)$.

1.19. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n-1}{5^n+1}$.

1.20. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^{\frac{1}{n}}-1}{5^{\frac{1}{n}}+1}$.

1.21. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x}{3x-2}$.

1.22. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x^2-2}{6x^3-4x+3}$.

1.23. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+4x-x^4}{x+3x^2+2x^4}$.

1.24. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5-3x^2+8}{2x^5+2x-1}$.

1.25. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$.

1.26. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^{10}+(x+2)^{10}+\ldots+(x+50)^{10}}{2x^{10}+10^{10}}$.

1.27. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$.

1.28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{x^2-4x}\right)$.

1.29. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)$.

1.30. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+3}\right)$.

1.31. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

1.32. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-1}$.

1.33. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3}{x^2-1}$.

1.34. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-4x+3}$.

1.35. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$.

1.36. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+x-6}{x^2+2x-3}$.

1.37. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{3x^2+5x-2}{6x^2+x-1}$.

1.38. $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\dfrac{10x^2+7x+1}{2x^2-5x-3}$.

1.39. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2-x-2}{x^3-8}$.

1.40. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3+2x^2-x-2}$.

1.41. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\left(x^2-x-2\right)^2}{x^3-3x-2}$.

1.42. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3-3x^2+4}$.

1.43. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+2x}-3}{5x}$.

1.44. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-x}{2-\sqrt{4-3x}}$.

1.45. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{5x+1}-1}{4-\sqrt{7x+16}}$.

1.46. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+5}-3}$.

1.47. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+4x+3}{1-\sqrt{4+3x}}$.

1.48. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{3}}$.

1.49. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

1.50. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{x}$.

1.51. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-4x+3}$.

1.52. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}$.

1.53. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$.

1.54. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$.

1.55. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}{x^1-1}$.

1.56. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{7x}$.

1.57. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{x+4}-2}{\sqrt{2x+1}-3}$.

1.58. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$.

1.59. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}$.

1.60. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$.

1.61. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1+x)^2-(1+3x)}{x^2-x^5}$.

1.62. $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$.

1.63. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{x^2}{4-x^2}\right)$.

1.64. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$.

В задачах 2.65–2.134 вычислить пределы функций, используя спецпределы:

1.65. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$.

1.66. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2 3x}{x^2}$.

1.67. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\mathrm{tg} 5x}$.

1.68. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2\frac{x}{3}}{\sin^2 2x}$.

1.69. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{x^2-3x}$.

1.70. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg} x^2}{\left(\arcsin\frac{x}{3}\right)^2}$.

1.71. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 3x}{x\sin 5x}$.

1.72. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{\mathrm{tg}^2 3x}$.

1.73. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7x}{1-\cos^2 3x}$.

1.74. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 5x}{x^3-3x^2}$.

1.75. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos 3x}}{\arcsin 2x}$.

1.76. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 5x}{(\arcsin 2x)^2}$.

1.77. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 2x-\cos^2 3x}{5x^2}$.

1.78. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$.

1.79. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-\mathrm{tg}^2 x}{x^4}$.

1.80. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-3x}-1}{\sin^3 x-\sin x}$.

1.81. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg} 2x}{3-\sqrt{9-2x}}$.

1.82. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4-\sqrt{16-\sin^2\frac{x}{5}}}{\mathrm{tg}^2 3x}$.

1.83. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2\frac{x}{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}$.

1.84. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\mathrm{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$.

1.85. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x\sin 3x}$.

1.86. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin 3x}-\sqrt{1-\sin 5x}}{\mathrm{tg}2x}$.

1.87. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$.

1.88. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

1.89. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{tg}x$.

1.90. $\lim\limits_{x\to 2}(2-x)\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{4}$.

1.91. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{2}{3}x\right)^{\frac{5}{x}}$.

1.92. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{x}{7}\right)^{\frac{2}{3x}}$.

1.93. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{2x+1}$.

1.94. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{3x+1}{x-1}\right)^{x}$.

1.95. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x+2}{5x-1}\right)^{x}$.

1.96. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x+3}\right)^{x-1}$.

1.97. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+3}\right)^{3x+7}$.

1.98. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-5}\right)^{\frac{2x+1}{3}}$.

1.99. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x}{x^2+3}\right)^{2x}$.

1.100. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2-2x+3}\right)^{x+1}$.

1.101. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 3x)^{\frac{5}{x}}$.

1.102. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\mathrm{tg}^2 5x\right)^{\frac{1}{\sin 3x}}$.

1.103. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{\mathrm{tg}3x}}$.

1.104. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x^2]{2-\cos x}$.

1.105. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

1.106. $\lim\limits_{x\to -1}(5+4x)^{\frac{3}{2x+2}}$.

1.107. $\lim\limits_{x\to 2}(7-3x)^{\frac{3}{x^2-4}}$.

1.108. $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{3x}{x-2}}$.

1.109. $\lim\limits_{x\to 8}\left(\dfrac{2x-7}{x+1}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-2}}$.

1.110. $\lim\limits_{x\to 0}\left(5-\dfrac{4}{\cos x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 3x}}$.

1.111. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+3)-\ln 3}{x}$.

1.112. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-\sin 5x)}{3x}$.

1.113. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+3)-\ln 3}{x}$.

1.114. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}5x}{\ln 2-\ln(2+x)}$.

1.115. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x}{\ln(e-x)-1}$.

1.116. $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$.

1.117. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\left(\ln(x+5)-\ln x\right)\right)$.

1.118. $\lim\limits_{x\to-\infty}(3-x)\left(\ln(1-x)-\ln(2-x)\right)$.

1.119. $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-2)\left(\ln(2x-1)-\ln(2x+1)\right)$.

1.120. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-x\sin^2 x\right)^{\frac{1}{\ln\left(1+\pi x^2\right)}}$.

1.121. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}$.

1.122. $\lim\limits_{x\to\infty}(n+5)\ln\frac{2n+3}{2n}$.

1.123. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{2x}$.

1.124. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^{2x}-1}{\sin 5x}$.

1.125. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^{\operatorname{tg}3x}-1}{\arcsin\frac{x}{2}}$.

1.126. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin^2 2x}-1}{\operatorname{tg}^2 3x}$.

1.127. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5^{\sin 2x}-1}{1-e^{\operatorname{tg}3x}}$.

1.128. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-3^{\operatorname{tg}5x}}{\ln(1+\sin 2x)}$.

1.129. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\operatorname{tg}\frac{3}{x}}{e^{\frac{2}{x}}-1}$.

1.130. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(x+2)-\ln 3}{e^x-e}$.

1.131. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{2x}}{5x}$.

1.132. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x-2^x}{\operatorname{tg}\frac{x}{5}}$.

1.133. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\sin 3x}}{5x}$.

1.134. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$.

Вычислить односторонние пределы функций:

1.135. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\ln\left(1+e^x\right)}{x}$.

1.136. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

1.137. $\lim\limits_{x\to\pm 0}\frac{1}{1+e^{1/x}}$.

1.138. $\lim\limits_{x\to-3\pm 0}\frac{1}{2^{\frac{1}{x+3}}-1}$.

1.139. $\lim\limits_{x\to 1\pm 0}\frac{x-1}{|x-1|}$.

1.140. $\lim\limits_{x\to\pm 0}\frac{|\sin x|}{x}$.

1.141. $\lim\limits_{x\to\pm 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{x}\right)^{\frac{2}{x}}$.

Сравнить функции α и β, бесконечно малые при $x\to 0$:

1.142. $\alpha = 2^{5x} - 1$; $\beta = \sin^2\dfrac{x}{3}$.

1.143. $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{\pi}$; $\beta = e^{\sin 2x} - 1$.

1.144. $\alpha = \ln\left(1 - \operatorname{tg}^2 2x\right)$; $\beta = 3 - \sqrt{24x^2 + 9}$.

1.145. $\alpha = \sqrt{1 + \sin^2\dfrac{x}{2}} - 1$; $\beta = \ln(1 - 3x)$.

1.146. $\alpha = e^{\operatorname{tg} 3x} - \cos 2x$; $\beta = \ln\left(1 + \sin^2\dfrac{x}{3}\right)$.

1.147. $\alpha = \sqrt{5x^2 + 4} - 2$; $\beta = \ln\left(1 - 3x^2\right)$.

1.148. $\alpha = x \arcsin\dfrac{x}{4}$; $\beta = \cos\dfrac{x}{2} - \cos^3\dfrac{x}{2}$.

Исследовать на непрерывность функции. Сделать чертеж:

1.149. $f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ при } x < 0; \\ x^2 - 2 \text{ при } 0 \le x \le 2; \\ x \text{ при } x > 2. \end{cases}$

1.150. $f(x) = \begin{cases} x + 4, \ x < -2; \\ 2, \ -2 \le x < 1; \\ x^2 - 1, \ x \ge 1. \end{cases}$

1.151. $f(x) = \begin{cases} 3, \ x \le -1; \\ 4 - x^2, \ -1 < x \le 2; \\ x - 3, \ x > 2. \end{cases}$

1.152. $f(x) = \begin{cases} 2^x, \ x < -1; \\ x + 1, \ -1 \le x < 0; \\ 1, \ > 0. \end{cases}$

1.153. $f(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{x}, \ x < 0; \\ x + 2, \ x \ge 0. \end{cases}$

1.154. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, \ x < 0; \\ 2^x, \ x \ge 0. \end{cases}$

1.155. $f(x) = \begin{cases} \sin x, \ x < 0; \\ x, \ 0 \le x \le 2; \\ 0, \ x > 2. \end{cases}$

1.156. $f(x) = \begin{cases} |x| \cdot x + 2, \ x \ne 0; \\ 1, \ x = 0. \end{cases}$

1.157. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + 2|x|}{|x|}, \ x \ne 0; \\ 0, \ x = 0. \end{cases}$

1.158. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2x}{|x|}, \ x \ne 0; \\ 2, \ x = 0. \end{cases}$

1.159. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x^3|-2x}{|x|}, & x\neq 0;\\ -2, & x=0.\end{cases}$

1.160. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{|x+1|}-x, & x\neq -1;\\ 2, & x=-1.\end{cases}$

1.161. $y=\dfrac{x}{x^2-4}$.

1.162. $y=5^{\frac{1}{x+3}}$

1.163. $y=3^{\frac{1}{1-2x}}$.

1.164. $y=\dfrac{1}{2^{\frac{1}{1-x}}+1}$

§ 2. Производная

2.1. Определение производной

Пусть на множестве X задана функция $y=f(x)$. Фиксируем точку $x\in X$ и задаем приращение аргумента Δx. Тогда точка $x+\Delta x$ соответствует $f(x+\Delta x)$ и $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ называется приращением функции.

Если существует предел

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

то он называется производной функции $f(x)$ в точке x.

Существуют и другие обозначения производной: $\dot{x}$, $\dfrac{dy}{dx}$.

Операция вычисления производной функции называется операцией дифференцирования, а если $f'(x)$ конечна, то функция $f(x)$ называется дифференцируемой.

Прежде чем воспользоваться таблицами производных, надо установить, является функция простой или сложной. Функция $y=f(u)$ называется сложной, если u есть функция от x: $u=u(x)$, т. е. $y=f(u(x))$. Производная сложной функции вычисляется по формуле

$$y'=\left[f(u(x))\right]'=f'_u\cdot u'_x,$$

т. е. сначала вычисляется производная функции $f(u)$ по переменной u, и затем она умножается на производную функции $u(x)$ по переменной x.

Правила дифференцирования

1. $c' = 0 \qquad (c$ – const)

2. $\left(f_1(x) + f_2(x)\right)' = f_1'(x) + f_2'(x)$

3. $\left(f_1(x) \cdot f_2(x)\right)' = f_1'(x) \cdot f_2(x) + f_1(x) \cdot f_2'(x)$

   3а. $\left(cf(x)\right)' = c \cdot f'(x)$

4. $\left(\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}\right)' = \dfrac{f_1'(x) f_2(x) - f_1(x) f_2'(x)}{f_2^2(x)}$ $(f_2(x) \neq 0)$

5. $y_x' = y_u' \cdot u_x'$, если $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$.

Для справедливости этих правил необходимо существование производных $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f(x)$, $\varphi(x)$.

Таблица производных

1. $\left(u^n\right)' = nu^{n-1} \cdot u' \ (n \in R)$

2. $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2} \cdot u'$

3. $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$

4. $\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$

5. $\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$

6. $\left(\mathrm{tg} u\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$

7. $\left(\mathrm{ctg} u\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$

8. $\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u' \qquad (|u| < 1)$

9. $\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}} \cdot u' \qquad (|u| < 1)$

10. $\left(\mathrm{arctg} u\right)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$

11. $\left(\mathrm{arcctg} u\right)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$

12. $\left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u' \qquad (a > 0, \ a \in R)$

13. $e^u = e^u \cdot u'$

14. $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{1}{u \ln a} \cdot u'$

15. $\left(\ln u\right)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$

Пример 1. Найти производные функций:

а) $y = \cos x \cdot 3^x$; б) $y = 2\ln x + \sin x$; в) $y = \dfrac{x^2 + \sqrt{x}}{\mathrm{tg} x}$.

Решение. а) Функция y – это произведение двух функций $f_1 = \cos x$ и $f_2 = 3^x$, поэтому по третьему правилу дифференцирования:

$$y' = \left(\cos x \cdot 3^x\right)' = \left(\cos x\right)' \cdot 3^x + \cos x \cdot \left(3^x\right)'.$$

Из таблицы производных находим, что $\left(\cos x\right)' = -\sin x \cdot x'$, и так как $x' = 1$, то $\left(\cos x\right)' = -\sin x$; $\left(3^x\right)' = 3^x \ln 3 \cdot x' = 3^x \ln 3$.

Значит, $y' = -\sin x \cdot 3^x + \cos x \cdot 3^x \ln 3 = 3^x\left(\ln 3 \cos x - \sin x\right)$.

б) $y' = \left(2\ln x + \sin x\right)' = \left(2\ln x\right)' + \left(\sin x\right)' = 2\left(\ln x\right)' + \left(\sin x\right)' = 2 \cdot \dfrac{1}{x} \cdot x' + \cos x \cdot x' =$

$$= \frac{2}{x} + \cos x.$$

в) $y' = \left(\dfrac{x^2 + \sqrt{x}}{\operatorname{tg} x}\right)' = \dfrac{\left(x^2 + \sqrt{x}\right)' \operatorname{tg} x - \left(x^2 + \sqrt{x}\right)\left(\operatorname{tg} x\right)'}{\operatorname{tg}^2 x} =$

$$= \frac{\left(2x + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\operatorname{tg} x - \left(x^2 + \sqrt{x}\right)\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x}.$$

Пример 2. Найти производные функций:

а) $y = \operatorname{ctg}^2 x$;б) $y = 3\sin^5 x$; в) $y = \sqrt[3]{\dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}}$.

Решение. а) Функция y – это сложная функция $u = \operatorname{ctg} x$, $y = u^2$. Тогда по формуле 1 таблицы производных $y'_x = 2u \cdot u' = 2\operatorname{ctg} x\left(\operatorname{ctg} x\right)'$, а по формуле 5 $\left(\operatorname{ctg} x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} \cdot x' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.Таким образом, $y' = 2\operatorname{ctg} x \cdot \left(-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$.

б) Используем правило дифференцирования 3а: $y' = \left(3\sin^5 x\right)' = 3\left(\sin^5 x\right)'$. Функция $\sin^5 x$ – сложная $u = \sin x$, $\sin^5 x = u^5$. Поэтому

$$y' = 3 \cdot 5u^4 = 15\sin^4 x\left(\sin x\right)' = 15\sin^4 x \cdot \cos x.$$

в) $y' = \left(\sqrt[3]{\dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}}\right)' = \left(\left(\dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)^{\frac{1}{3}}\right)' = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)^{\frac{1}{3} - 1} \cdot \left(\dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)' =$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)^{-\frac{2}{3}} \frac{\left(e^x + 1\right)'\left(e^x - 1\right) - \left(e^x + 1\right)\left(e^x - 1\right)'}{\left(e^x - 1\right)^2} =$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{e^x\left(e^x-1\right)-\left(e^x+1\right)e^x}{\left(e^x-1\right)^2}=\frac{1}{3}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{e^x\left(e^x-1-e^x-1\right)}{\left(e^x-1\right)^2}=$$

$$-\frac{2}{3}\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(e^x-1\right)^{\frac{4}{8}}}.$$

Задания для решения

Продифференцировать заданные функции:

2.1. $y=\frac{1-2x}{3x+5}$. 2.2. $y=\frac{x^2+3}{x^2+1}$. 2.3. $y=\frac{x^3-2x+1}{\sqrt{3}+1}$.

2.4. $y=\frac{\pi}{2x+3}$. 2.5. $y=\frac{2}{x^2+3x-1}$. 2.6. $y=\sqrt{1+3x^2}$.

2.7. $y=\frac{1}{(3x+2)^3}$. 2.8. $y=\frac{3}{\sqrt{x^2+2}}$. 2.9. $y=\sqrt{\frac{2x+1}{2x-1}}$.

2.10. $y=\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$. 2.11. $y=\frac{1+2x}{\sqrt{1+3x}}$. 2.12. $y=x^3\sqrt{2x+1}$.

2.13. $y=\sin\frac{2}{x}$. 2.14. $y=\cos\frac{2x+1}{3}$. 2.15. $y=\mathrm{tg}x^2$.

2.16. $y=\mathrm{ctg}\frac{2x}{3}$. 2.17. $y=\sin\sqrt{3x+1}$. 2.18. $y=\cos^2 3x$.

2.19. $y=\mathrm{tg}^3\frac{x}{3}$. 2.20. $y=\sqrt{\sin 5x}$. 2.21. $y=\left(1+\sin\frac{x}{2}\right)^4$.

2.22. $y=\sin(\cos 3x)$. 2.23. $y=\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$. 2.24. $y=\cos^2\left(\sin\frac{1}{x}\right)$.

2.25. $y=\sin^2\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$. 2.26. $y=\mathrm{tg}^2x-\mathrm{tg}x$. 2.27. $y=x^2\arcsin x$.

2.28. $y=(\arcsin x)^2$. 2.29. $y=\arccos(3x+1)$. 2.30. $y=\mathrm{arctg}x^2$.

2.31. $y=\arcsin\frac{3x+1}{\sqrt{2}}$. 2.32. $y=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$. 2.33. $y=\frac{x^2}{\mathrm{arctg}x}$.

2.34. $y=\arccos\frac{2}{x}$. 2.35. $y=\arcsin\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. 2.36. $y=\mathrm{arctg}^2\frac{1}{x}$.

2.37. $y=\sqrt{1-(\arccos x)^2}$. 2.38. $y=x^2\ln x$. 2.39. $y=\ln^2 x$.

2.40. $y=\sqrt{\ln x}$. 2.41. $y=\frac{1}{\ln x}$. 2.42. $y=\frac{1-\ln x}{1+\ln x}$.

2.43. $y=\ln\left(x^2+2x\right)$. 2.44. $y=\sqrt{1+\ln^2 x}$. 2.45. $y=\ln\arcsin 3x$.

2.46. $y=\log_3\left(x^3+3x\right)$. 2.47. $y=\ln^5\sin 3x$. 2.48. $y=\sin^3\ln x$.

2.49. $y=\ln\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+3}$. 2.50. $y=\arccos(\ln x)$. 2.51. $y=x^3 5^x$.

2.52. $y=e^{3x}\sin 2x$. 2.53. $y=\frac{2^x}{\sin 3x}$. 2.54. $y=3^{\frac{x}{\ln x}}$.

2.55. $y=\frac{1+e^{2x}}{1-e^{2x}}$. 2.56. $y=5^{x^2-1}$. 2.57. $y=10^{\sqrt{2x+1}}$.

2.58. $y=2^{\sin\frac{x}{3}}$. 2.59. $y=\operatorname{tg}e^{x^2+1}$. 2.60. $y=10^{1-\sin^3 2x}$.

2.61. $y=\sqrt[3]{\arcsin e^{2x}}$. 2.62. $y=\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}$.

2.63. $y=\arcsin\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{5x}}$. 2.64. $y=\sqrt{1+2x}-\ln\left(x+\sqrt{1+2x}\right)$.

2.65. $y=\operatorname{tg}^3 2x\cos^2 2x$. 2.66. $y=\frac{\cos x}{\sin^2 x}-2\cos x-3\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

2.67. $y=\ln\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}$. 2.68. $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}$.

2.69. $y=e^{2x}\sin 3x\cos^3 3x$. 2.70. $y=\sin^2\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)$.

2.71. $y=x\sqrt{1+x^2}\sin 5x$. 2.72. $y=\frac{1+x\operatorname{arctg}x}{\sqrt{1+x^2}}$.

2.73. $y=x^3\arccos x-\frac{x^2+2}{3}\sqrt{1-x^2}$.

2.2. Дифференцирование функций, заданных неявно и параметрически

Если функция $y=f(x)$ такова, что при подстановке ее в уравнение $F(x,y)=0$ последнее обращается в тождество, то говорят о ***неявном задании функции*** $y=f(x)$. Например, уравнение $x^2+y^2=1$ неявно задает функцию

$y=\sqrt{1-x^2}$ (а также функцию $y=-\sqrt{1-x^2}$). Однако не всегда удается перейти от неявного задания функции к явному.

Пусть дифференцируемая функция $y=f(x)$ задана уравнением $F(x,y)=0$. Тогда дифференцируем левую и правую часть уравнения, считая y сложной функцией, и выражаем из уравнения y'.

Пример 3. Найти производную функции $\sin\frac{x}{y}+x^3=e^{xy}+y^2$.

Решение. $\left(\sin\frac{x}{y}+x^3\right)'=\left(e^{xy}+y^2\right)'$; $\left(\sin\frac{x}{y}\right)'+\left(x^3\right)'=\left(e^{xy}\right)'+\left(y^2\right)'$.

Так как $\left(\sin\frac{x}{y}\right)'=\left(\cos\frac{x}{y}\right)\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'=\left(\cos\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{x'y-xy'}{y^2}=\left(\cos\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{y-xy'}{y^2}$,

$\left(e^{xy}\right)'=e^{xy}\left(y+xy'\right)$, $\left(x^3\right)'=3x^2$, $\left(y^2\right)'=2yy'$,

то $\left(\cos\frac{x}{y}\right)\frac{y-xy'}{y^2}+3x^2=e^{xy}\left(y+xy'\right)+2yy'$.

Слагаемые, содержащие y', переносим в левую часть, а все остальное – в правую:

$$y'\left(\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}+xe^{xy}+2y\right)=\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}+3x^2-ye^{xy},\quad y'=\frac{\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}+3x^2-ye^{xy}}{\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}+xe^{xy}+2y}.$$

Пусть даны две функции $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$, (1)

где $t\in[t_1;t_2]$ назовем параметром. Причем $\varphi(t)$ имеет обратную функцию $t=\varphi^{-1}(x)$. Тогда из (1) $y=\psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)=f(x)$, т. е. y является функцией от x. Задание функции $y=f(x)$ через $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$ называется ***параметрическим.***

Если функции $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ имеют производные $\varphi'(t)\neq 0$ и $\psi'(t)$, то функция $y=f(x)$ также имеет производную, вычисляемую по формуле

$$\frac{dy}{dx}=y'_x=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}=\frac{y'_t}{x'_t}. \qquad (2)$$

Вторая производная вычисляется по формуле

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y''_{xx} = \frac{\psi''(t)\cdot\varphi'(t) - \psi'(t)\cdot\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3}. \qquad (3)$$

Пример 7. Функция y задана параметрически: $x = \cos 4t$, $y = t - 2\ln t$, $0 < t < +\infty$. Найти y'_x и y''_{xx}.

Решение. Найдем $x'_t = \varphi'(t) = (\cos 4t)' = (-\sin 4t)\cdot 4$

$$y'_t = \psi'(t) = (t - 2\ln t)' = 1 - \frac{2}{t}.$$

Тогда по формуле (2) $y'_x = \dfrac{1 - \frac{2}{t}}{-4\sin 4t} = \dfrac{t-2}{-4t\sin 4t}$.

Для вычисления y''_{xx} найдем $\psi''(t) = \left(1 - \dfrac{2}{t}\right)' = -2\cdot(-1)t^{-2} = \dfrac{2}{t^2}$.

$$\varphi''(t) = (-4\sin 4t)' = -4(\cos 4t)\cdot 4 = -16\cos 4t.$$

Подставим в формулу (3): $y''_{xx} = \dfrac{\frac{2}{t^2}\cdot(-4\sin 4t) - \left(1 - \frac{2}{t}\right)(-16\cos 4t)}{(-4\sin 4t)^3} =$

$$\frac{-8\sin 4t - t^2\left(1 - \frac{2}{t}\right)(-16)\cos 4t}{t^2(-4\sin 4t)^3} = \frac{-8\left(\sin 4t - 2\left(t^2 - 2t\right)\cos 4t\right)}{t^2(-4)^3(\sin 4t)^3} =$$

$$\frac{\sin 4t - \left(2t^2 - 4t\right)\cos 4t}{8t^2\sin^3 4t}.$$

Задания для решения

В задачах 2.1–2.14 продифференцировать функции, заданные неявно:

2.1. $x^3 + y^3 - 6xy = 0$.

2.2. $y^3 - 3y = 4x$.

2.3. $y^2\cos x = \sin 2y$.

2.4. $5^{x+y} = 5^x + 5^y$.

2.5. $3x - y\ln y = 0$.

2.6. $y = \sin(xy) - 2x = y^2$.

2.7. $y = 3 + xe^y$.

2.8. $y = \sin(2x + 3y)$.

2.9. $y = x\sin y + y\sin x + \cos y = 0$.

2.10. $y = x - y + \mathrm{arctg} y = 1$.

2.11. $y = x\sin y + \cos(x - y) = 0$.

2.12. $y = (3x + 5y)^4 - \sin(xy) = 3$.

2.13. $y = e^{3y} - x^2 + \left(2x + y^2\right)^{10} = 4$.

2.14. $y = \sin\left(xy^2\right) + \ln\left(x^2 - 3y\right) - 5x = 0$.

В задачах 2.15–2.14 продифференцировать функции, заданные параметрически:

2.15. $x = 2\cos t$; $y = 3\sin t$.

2.16. $x = 2\cos^3 t$; $y = 3\sin^3 t$.

2.17. $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$.

2.18. $x = \dfrac{t+1}{t}$; $y = \dfrac{t-1}{t}$.

2.19. $x = \ln(1 + t^2)$; $y = t - \operatorname{arctg} t$.

2.20. $x = \dfrac{1+t^3}{t^2-1}$; $y = \dfrac{1}{t^2-1}$.

2.21. $x = e^t \sin t$; $y = e^t \cos t$.

2.22. $x = \dfrac{3at}{1+t^3}$; $y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}$.

2.23. $x = 2\ln \operatorname{ctg} t$; $y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t$.

2.24. $x = a\cos^2 t$; $y = b\sin^2 t$.

2.25. $x = t(1 - \sin t)$; $y = t\cos t$.

2.26. $x = \cos t + t\sin t$; $y = \sin t - t\cos t$.

2.27. $x = \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right)$; $y = t\sqrt{1+t^2}$.

2.28. $x = \arcsin(t^2 - 1)$; $y = \arccos 2t$.

2.29. $x = a(\sin t - t\cos t)$; $y = a(\cos t + t\sin t)$.

2.3. Производные высших порядков

Если производная $f'(x)$ функции $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в этой точке производную, то эта производная от $f'(x)$ называется второй производной (или производной второго порядка) функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначается одним из следующих символов:

$$f''(x_0), \quad f^{(2)}(x_0), \quad y''(x_0), \quad y^{(2)}(x_0), \quad \frac{d^2 y}{dx^2}(x_0), \quad \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) \quad y''_{xx}.$$

Третья производная определяется как производная от второй производной и т. д. Если уже введено понятие $(n-1)$-й производной и если $(n-1)$-я производная имеет производную в точке x_0, то указанная производная называется n-й производной (или производной n-го порядка) и обозначается

$$f^{(n)}(x_0),\ y^n(x_0) \text{ или } \frac{d^n f}{dx^n}(x_0),\ \frac{d^n y}{dx^n}(x_0).$$

Таким образом, производные высших порядков определяются индуктивно по формуле:

$$y^{(n)}(x)=\left[y^{(n-1)}(x)\right]'.$$

Функция, имеющая n-ю производную в точке x_0, называется n раз дифференцируемой в этой точке.

Пример 5. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ функции $y=\arcsin e^x$.

Решение. $y'=\dfrac{dy}{dx}=\left(\arcsin e^x\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}\cdot\left(e^x\right)'=\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy'}{dx}=\left(\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\right)'=\frac{\left(e^x\right)'\sqrt{1-e^{2x}}-e^x\left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)'}{1-e^{2x}}=$$

$$\frac{e^x\sqrt{1-e^{2x}}+e^x\cdot\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}}{1-e^{2x}}=\frac{e^x}{\left(1-e^{2x}\right)^2}.$$

Пример 6. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $y=x^x$.

Решение. Находим $\dfrac{dy}{dx}$:

$$\ln y=x\ln y \quad\Rightarrow\quad (\ln y)'=(x\ln x)' \quad\Rightarrow\quad \frac{y'}{y}=\ln x+1 \quad\Rightarrow\quad y'=x^x(\ln x+1).$$

Теперь найдем вторую производную $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. Имеем $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dy'}{dx}=$

$$\left(x^x(\ln x+1)\right)'=\left(x^x\right)'(\ln x+1)+x^x(\ln x+1)^2+x^{x-1}.$$

Вторая производная функции, заданной параметрически, вычисляется по формуле

$$\frac{d^2y}{dx^2}=y'_{xx}=\frac{\psi''(t)\cdot\varphi'(t)-\psi'(t)\cdot\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3}. \qquad (3)$$

Пример 7. Функция y задана параметрически: $x=\cos 4t$, $y=t-2\ln t$, $0<t<+\infty$. Найти y'_x и y''_{xx}.

Решение. Найдем $x'_t=\varphi'(t)=(\cos 4t)'=(-\sin 4t)\cdot 4$

$$y'_t=\psi'(t)=(t-2\ln t)'=1-\frac{2}{t}.$$

Тогда по формуле (2) $y'_x=\dfrac{1-\dfrac{2}{t}}{-4\sin 4t}=\dfrac{t-2}{-4t\sin 4t}$.

Для вычисления y''_{xx} найдем $\psi''(t)=\left(1-\dfrac{2}{t}\right)'=-2\cdot(-1)t^{-2}=\dfrac{2}{t^2}$.

$$\varphi''(t)=(-4\sin 4t)'=-4(\cos 4t)\cdot 4=-16\cos 4t.$$

Подставим в формулу (3): $y''_{xx}=\dfrac{\dfrac{2}{t^2}\cdot(-4\sin 4t)-\left(1-\dfrac{2}{t}\right)(-16\cos 4t)}{(-4\sin 4t)^3}=$

$$\frac{-8\sin 4t-t^2\left(1-\frac{2}{t}\right)(-16)\cos 4t}{t^2(-4\sin 4t)^3}=\frac{-8\left(\sin 4t-2\left(t^2-2t\right)\cos 4t\right)}{t^2(-4)^3(\sin 4t)^3}=$$

$$\frac{\sin 4t-\left(2t^2-4t\right)\cos 4t}{8t^2\sin^3 4t}.$$

Задания для решения

3.1. Для заданных функций найти производные второго порядка:

1) $y=\left(x^2+2\right)e^{4x+4}$; 2) $y=\operatorname{tg}\ln 3x$;

3) $y=\left(1+x^2\right)\operatorname{arctg}x$; 4) $y=\sqrt{4-x^2}$;

5) $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$; 6) $y=\sqrt{1-x^2}\arcsin x$.

3.2. $y=\cos^2 x$; $y'''=?$. 3.3. $y=x^3\ln x$; $y^{IV}=?$.

3.4. $f(x)=e^{2x-1}$; $f''(0)=?$. 3.5. $f(x)=\operatorname{arctg}x$; $f''(1)=?$.

3.6. $y=xe^{3x}$; $y'''=?$. 3.7. $y=\left(2x^2-7\right)\ln(x-1)$; $y'''=?$.

3.8. $y=x\ln(1-3x)$; $y^{IV}=?$. 3.9. $y=\sin 2x+\cos(x+1)$; $y^{V}=?$.

3.10. Для заданных функций найти производные n-го порядка:

1) $y=e^{-3x}$; 2) $y=\dfrac{1}{5x+1}$; 3) $y=\sin^2 x$;

4) $y=\ln(3x+2)$; 5) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$; 6) $y=\sqrt{3x-1}$.

<u>Функции, заданные в неявном виде</u>

3.11. $y=\sin(x+y)$; $\dfrac{d^2y}{dx^2}=?$. 3.12. $x^3+y^3-3xy=0$; $\dfrac{d^2y}{dx^2}=?$.

3.13. $e^{x+y}=xy$; $\dfrac{d^2y}{dx^2}=?$. 3.14. $x^2+y^2=4$; $\dfrac{d^3y}{dx^3}=?$. 3.15. $y=1+xe^y$; $\dfrac{d^2y}{dx^2}=?$.

В задачах 4.141–4.151 для функций, заданных параметрически, найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

3.16. $x=a\cos^2 t$; $y=a\sin^2 t$.

3.17. $x=\ln t$; $y=t^2-1$.

3.18. $x=\arcsin t$; $y=\ln(1-t^2)$.

3.19. $x=t\cos t$; $y=t\sin t$.

3.20. $x=a(t-\sin t)$; $y=a(1-\cos t)$.

3.21. $x=\sin t$; $y=\ln\cos t$.

3.22. $x=\operatorname{arctg} t$; $y=\ln(1+t^2)$.

3.23. $x=e^t\cos t$; $y=e^t\sin t$.

3.24. $x=\cos^2 t$; $y=\operatorname{tg}^2 t$.

3.25. $x=t-\sin t$; $y=t-\cos t$.

3.26. $x=\sqrt{t^3+1}$; $y=\ln t$.

3.27. $x=\sin t-t\cos t$; $y=\cos t-t\sin t$.

3.28. $x=a\cos t$; $y=b\sin t$. Найти $\dfrac{d^3y}{dx^3}$.

3.29. $x=a\cos^3 t$; $y=a\sin^3 t$. Найти $\dfrac{d^3y}{dx^3}$.

2.4. Уравнение касательной к кривой

Касательной к линии L в точке M (рис. 1) называется прямая $T'MT$, с которой стремится совпасть секущая MM', когда точка M', оставаясь на L, стремится M – будь то справа или слева. Если линия L есть график функции $y=f(x)$, то угловой коэффициент касательной равен значению производной функции в соответствующей точке. Если график не имеет касательной, функция $f(x)$ не имеет производной и наоборот.

Эти видно из рисунка 39. Угловой коэффициент k секущей равен $m=\dfrac{QM'}{MQ}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Если M' стремится к M, то m имеет пределом угловой коэффициент k касательной. Значит, $k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, т. е. $k=f'(x)$.

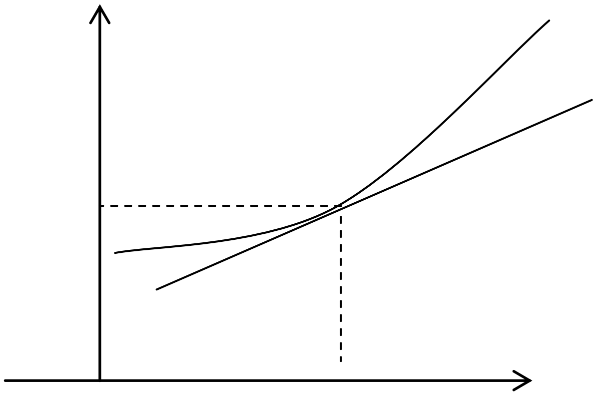


Рисунок 39

Уравнение прямой, проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом: $y-y_0=k(x-x_0)$, значит, уравнение касательной к кривой $y=f(x)$ в точке x_0 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$, где $y_0=f(x_0)$.

Нормалью к кривой $y=f(x)$ в точке x_0 называется прямая, перпендикулярная касательной. Условие перпендикулярности двух прямых: $k_1=-\frac{1}{k_2}$, значит уравнение нормали будет иметь вид: $y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$.

Пример 8. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $f(x)=-x^2-4x$ в точке $x_0=-1$. Сделать чертеж.

Решение. $f(-1)=-(-1)^2-4(-1)=-1+4=3$

$$f'(x)=-2x-4, \qquad f'(-1)=-2(-1)-4=2-4=-2.$$

Уравнение касательной: $y-3=-2(x+1)$ $\quad y=-2x+1$.

Уравнение нормали: $y-3=\frac{1}{2}(x+1)$; $\qquad y=0{,}5x+3{,}5$.

Сделаем чертеж. $y=-x^2-4x$ – парабола, ветви направлены вниз. Вершина $x_0=-\frac{b}{2a}$, $x_0=\frac{4}{-2}=-2$, $y_0=-4+8=4$.

Точки пересечения с осью OX :

$-x^2-4x=0$

$-x(x+4)=0$

$x_1=0$, $x_2=-4$

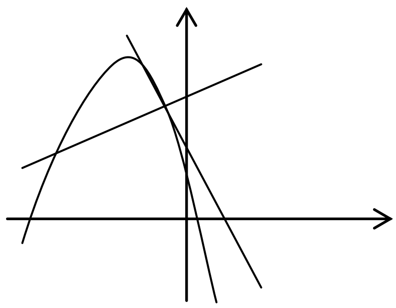


Рисунок 40

$y = -2x + 1$ $\qquad\qquad$ $y = 0{,}5x + 3{,}5$

x	0	1
y	1	-1

x	0	1
y	3,5	4

Задания для решения

В задачах 4.1–4.8 написать уравнения касательной и нормали к графику функции y = f(x) в заданной точке.

4.1. $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$; $x_o = -2$. 4.2. $y = e^{1-x^2}$; $x_o = -1$.

4.3. $y = \dfrac{8a^3}{4a^2 + x^2}$; $x_o = 2a$. 4.4. $y = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x^2}$; $x_o = 3$.

4.5. $x = \sin t$; $y = \cos 2t$; $t_o = \dfrac{\pi}{6}$. 4.6. $x = 2e^t$; $y = e^{-t}$; $t_o = 0$.

4.7. $x = \dfrac{3at}{1+t^2}$; $y = \dfrac{3at^2}{1+t^2}$; $t_o = 2$. 4.8. $x = 2\ln \operatorname{ctg} t + 1$; $y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t$; $t_o = \dfrac{\pi}{4}$.

4.9. Составить уравнения касательных к линии $y = x - \dfrac{4}{x}$ в точках ее пересечения с осью Ox.

4.10. Составить уравнение касательной к линии $y = x^3 + 3x^2 - 5$, перпендикулярной к прямой $2x - 6y + 1 = 0$.

4.11. Составить уравнение нормали к линии $y = x \ln x$, параллельной прямой $2x - 2y + 3 = 0$.

4.12. Хорда параболы $y = x^2 - 2x + 5$ соединяет точки $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$. Составить уравнение касательной к параболе, параллельной хорде.

4.13. Составить уравнение нормали к параболе $y = x^2 - 6x + 6$, перпендикулярной к прямой, соединяющей начало координат с вершиной параболы.

4.14. Составить уравнения нормалей к параболе $y = x^2 - 4x + 5$ в точках ее пересечения с прямой $x - y + 1 = 0$.

4.15. Составить уравнение касательной к линии $x = 2\cos t$, $y = \sin t$ в точке $\left(1; \sqrt{3}/2\right)$.

4.16. Составить уравнение касательной к линии $x = t^3 + 1$; $y = t^2 + t + 1$ в точке (1; 1).

§ 3. Исследование поведения функции

3.1. Возрастание и убывание функции

Определение. Если функция $y = f(x)$ такова, что большему значению аргумента x соответствует большее значение функции, то функция $y = f(x)$ называется *возрастающей*. Аналогичным образом определяется убывающая функция.

Пример 9. Функция $Q = \pi R^2$ при $0 < R < \infty$ есть возрастающая функция, так как большему значению R соответствует большее значение Q.

Применим понятие производной для исследования возрастания и убывания функции.

Теорема 1. Если функция $f(x)$, имеющая производную на отрезке $[a,b]$, возрастает на этом отрезке, то ее производная на отрезке $[a,b]$ не отрицательна, то есть $f'(x) \geq 0$.

Теорема 2. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема в промежутке (a,b), причем $f'(x) > 0$ для $a < x < b$, то эта функция возрастает на отрезке $[a,b]$.

Геометрически: если на $[a,b]$ функция $f(x)$ возрастает, то касательная к кривой $y = f(x)$ в каждой точке на этом отрезке образует с осью Ox угол φ: $f'(x) = \mathrm{tg}\varphi \geq 0$. Если $f(x)$ убывает на отрезке $[a,b]$, то угол наклона касательной – тупой.

3.2. Максимум и минимум функций

Определение максимума. Функция $f(x)$ в точке x_1 имеет *максимум*, если значение функции $f(x)$ в точке x_1 больше, чем ее значение во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_1. Иначе: функция $f(x)$ имеет максимум при $x = x_1$, если $f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$ при любых Δx (положительных и отрицательных), достаточно малых по абсолютной величине.

Определение минимума. Функция $f(x)$ имеет *минимум* при $x = x_2$, если $f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$ при любых Δx – как положительных, так и отрицательных, достаточно малых по абсолютной величине.

Сформулируем необходимое условие существования экстремума.

Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет в точке $x = x_1$ максимум или минимум, то ее производная обращается в нуль в этой точке, то есть $f'(x_1) = 0$. Функция может иметь экстремум (максимум или минимум) лишь в двух случаях: либо в тех точках, где производная существует и равна нулю, либо в тех точках, где производная не существует или бесконечна. Значения аргумента, при которых производная обращается в нуль, бесконечность или не существует, называются *критическими точками*.

Не всякая критическая точка является точкой экстремума. Для отыскания экстремумов функции поступают следующим образом: находят все критические точки, а затем, исследуя отдельно каждую критическую точку, выясняют, будет ли в этой точке максимум или минимум функции.

Исследование функций в критических точках опирается на следующие теоремы.

Теорема 3. Достаточные условия существования экстремума.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некотором интервале, содержащем критическую точку x_1, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, может быть, самой точки x_1). Если при переходе слева направо через эту точку производная меняет знак с плюса на минус, то при $x = x_1$ функция имеет максимум. Если же при переходе через точку x_1 слева направо производная меняет знак с минуса на плюс, то функция имеет в этой точке минимум.

Правило исследования на экстремум функции $y = f(x)$:

1. Находим область определения функции.
2. Ищем первую производную функции, т. е. $f'(x)$.
3. Находим критические значения аргумента x:

а) приравниваем первую производную нулю и находим действительные корни уравнения $f'(x) = 0$;

б) находим значения x, при которых производная $f'(x)$ терпит разрыв.

4. Проверяем, входит ли критическая точка в область определения функции.
5. Исследуем знак производной слева и справа от критической точки.

6. Вычисляем значение функции $f(x)$ при каждом критическом значении аргумента.

Исследование на экстремум можно провести с помощью второй производной.

<u>Теорема 4.</u> Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = x_0$, причем $f'(x_0) = 0$ и выполняется условие: $f''(x)$ существует и непрерывна в окрестности точки $x = x_0$ и $f''(x_0) \neq 0$. Тогда функция $f(x)$ имеет в точке $x = x_0$ экстремум: если $f''(x_0) > 0$, то x_0 является точкой минимума функции, если $f''(x_0) < 0$ – точка x_0 является точкой максимума функции $f(x)$.

Пример 10. Исследовать на максимум и минимум функцию $y = (1 - x^2)^3$.

Решение. 1. Находим область определения функции: $y = (1 - x^2)^3$ – определена на всей числовой оси.

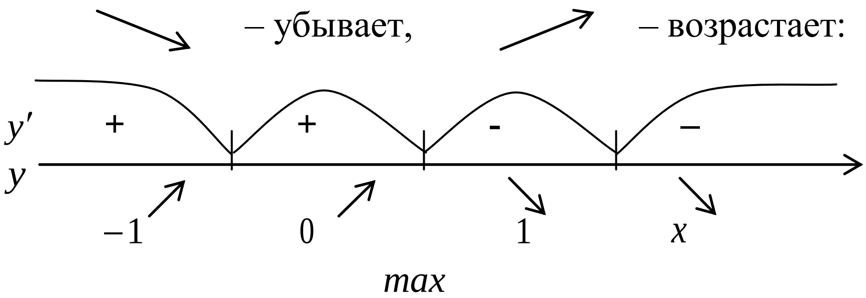
2. Находим первую производную функции:

$$y' = \left[(1 - x^2)^3\right]' = 3(1 - x^2)^2 \cdot (-2x) = -6x(1 - x^2)^2.$$

3. Находим критические значения аргумента x: $y' = 0$ или $-6x(1 - x^2)^2 = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = -1$.

Функция $y = (1 - x^2)^3$ определена на всей числовой оси, поэтому точки x_1, x_2, x_3 являются критическими, других критических точек нет, так как y' существует всюду.

4. Исследуем знак производной слева и справа от критических точек. Критические точки делят область определения на интервалы. Проверяем знак $f'(x)$ в каждом интервале и изображаем схематически:



Исследуемая функция имеет одну точку экстремума – точку максимума $x=0$.

5. Вычислим значение в точке $x=0$, $y(0)=1$. В интервале $(-\infty,0)$ функция возрастает, а в интервале $(0,+\infty)$ функция убывает.

3.3. Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба

Определение. Мы говорим, что кривая обращена выпуклостью вверх на интервале (a,b) (рис. 2), если все точки кривой лежат ниже любой ее касательной на этом интервале; кривая обращена выпуклостью вниз на интервале (b,c), если все точки кривой лежат выше любой ее касательной на этом интервале.

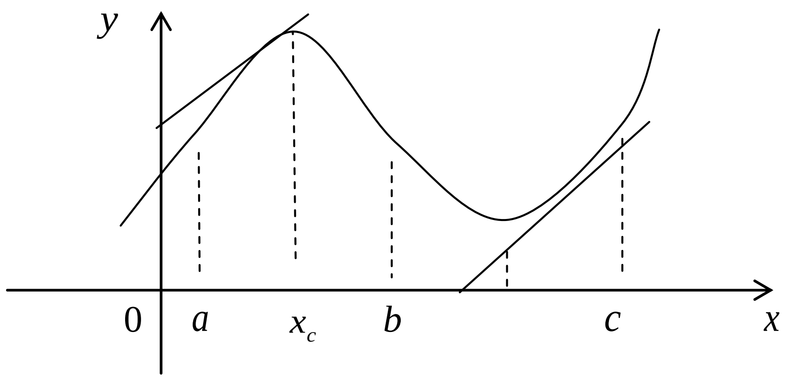


Рисунок 2

Кривую, обращенную выпуклостью вверх, будем называть *выпуклой*, а обращенную выпуклостью вниз – *вогнутой*.

Направление выпуклости кривой является важной характеристикой ее формы.

Установим признаки, по которым можно было бы судить о направлении выпуклости графика функции $y=f(x)$ на различных интервалах.

Теорема 5. Если во всех точках интервала (a,b) вторая производная функции $y=f(x)$ отрицательна, то есть $f''(x)<0$, то кривая $y=f(x)$ на этом интервале обращена выпуклостью вверх (кривая выпукла).

Теорема 6. Если во всех точках интервала (b,c) $f''(x)>0$, то кривая $y=f(x)$ на этом интервале обращена выпуклостью вниз (кривая вогнута).

Определение. Точка, отделяющая выпуклую часть непрерывной кривой от вогнутой, называется *точкой перегиба* кривой.

Теорема 7. (Достаточные условия того, что данная точка кривой является точкой перегиба).

Пусть кривая определяется уравнением $y = f(x)$. Если $f''(a) = 0$ или $f''(a)$ не существует и при переходе через значение $x = a$ производная $f''(x)$ меняет знак, то точка перегиба кривой с абсциссой $x = a$ есть точка перегиба.

Правило исследования на выпуклость, вогнутость, точку перегиба:

1. Находим область определения функции $f(x)$.

2. Находим $f'(x)$.

3. Находим $f''(x)$.

4. Приравниваем $f''(x)$ к нулю и определяем, где она не существует или равна ∞. Находим критические точки второго рода.

5. Проверяем, принадлежат ли эти точки области определения функции, если нет, то их отбрасываем.

6. Проверяем знак $f''(x)$ левее и правее критической точки второго рода. Если знаки разные, то это точка перегиба. По знаку $f''(x)$ определяем интервалы выпуклости и вогнутости.

Пример 11. Исследовать на выпуклость, вогнутость, точку перегиба функцию $y = \frac{1}{(x+1)^3}$.

Решение. 1. Находим область определения функции: $x \neq -1$, т. е. $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

2. $f'(x) = \left[\frac{1}{(x+1)^3}\right]' = \frac{-3(x+1)^2}{(x+1)^6} = -\frac{3}{(x+1)^4}$.

3. $f''(x) = \left[-\frac{3}{(x+1)^4}\right]' = \frac{4 \cdot 3(x+1)^3}{(x+1)^8} = \frac{12}{(x+1)^5}$.

4. $f''(x) = \frac{12}{(x+1)^5}$ не может обращаться в ноль, а в точке $x = 1$ $f''(x) = \infty$.

5. Точка $x = -1$ не принадлежит области определения функции, и поэтому она не может быть точкой перегиба.

Точка $x = -1$ делит область определения функции на два интервала: $(-\infty, -1)$ и $(-1, +\infty)$.

6. В интервале $(-\infty,-1)$ $f''(x)<0$, следовательно, функция $y=\frac{1}{(x+1)^3}$ выпукла вверх; в интервале $(-1,+\infty)$ $f''(x)>0$, следовательно, функция $y=\frac{1}{(x+1)^3}$ выпукла вниз (вогнута). Не имея точек перегиба, кривая $y=\frac{1}{(x+1)^3}$ меняет направление выпуклости при переходе x через точку разрыва $x=-1$.

3.4. Асимптоты

Очень часто приходится исследовать форму кривой $y=f(x)$, а значит, и характер изменения соответствующей функции при неограниченном возрастании (по абсолютной величине) абсциссы или ординаты переменной точки кривой или абсциссы и ординаты одновременно. Определение. Прямая A называется *асимптотой* кривой, если расстояние δ от переменной точки M кривой до этой прямой при удалении точки M в бесконечность стремится к нулю.

Различают асимптоты вертикальные (то есть параллельные оси ординат) и наклонные (то есть не параллельные оси ординат). Для отыскания вертикальных асимптот нужно найти значения $x=a$, при приближении к которым функция $y=f(x)$ стремится к бесконечности. Тогда прямая $x=a$ будет вертикальной асимптотой. Наклонная асимптота имеет вид $y=kx+b$, где $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$; $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]$.

Пример 12. Найти асимптоты кривой $y=\frac{x^2-6x+3}{x-3}$.

Решение. 1. Прямая $x=3$ для данной функции является вертикальной асимптотой, так как предел функции равен бесконечности при $x\to 3$.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-6x+3}{x-3}=\frac{9-18+3}{3-3}=\frac{-6}{0}=\infty.$$

2. Находим вертикальные асимптоты $y=kx+b$:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-6x+3}{x^2-3x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{6}{x}+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{3}{x^2}}=1\cdot$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2-6x+3}{x-3}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-6x+3-x^2+3x}{x-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-3x}{x-3}=$$

$$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{x}-3}{1-\frac{3}{x}}=-3.$$

$y=x-3$ – вертикальная асимптота. Других асимптот нет, так как при $x\to-\infty$ значения k и b будут те же самые.

3.5. Общее исследование функции

Составим общий план исследования функции и построения графиков. Для построения графиков функций находим:

1. Область определения функции, точки разрыва, вертикальные асимптоты.
2. Четность функции.
3. Точки экстремума и значения функции в этих точках, интервалы монотонности.
4. Области выпуклости и вогнутости, точки перегиба.
5. Наклонные асимптоты.

На основании проведенного исследования строим график функции.

Замечание. Функция $y=f(x)$ называется *четной*, если при смене знака y аргумента не изменяется значение функции, то есть $f(-x)=f(x)$ и, наоборот, $y=f(x)$ называется *нечетной*, если при смене знака y аргумента меняется знак функции, то есть $f(-x)=-f(x)$. График четной функции симметричен относительно оси ординат, а график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Пример 13. Исследовать функцию $y=\dfrac{x}{1+x^2}$ и построить ее график.

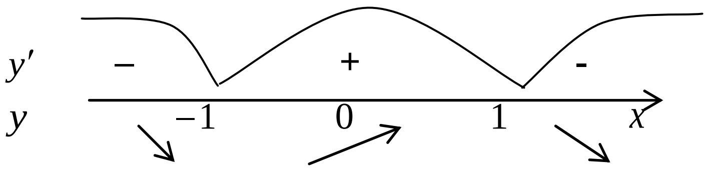
Решение. 1. Область определения функции $(-\infty,+\infty)$, точек разрыва нет, вертикальных асимптот нет. Область непрерывности совпадает с областью определения функции.

2. $f(-x)=-f(x)$ – функция нечетная,

$\frac{-x}{1+x^2} = -\left(\frac{x}{1+x^2}\right)$ – график симметричен относительно $O(0{,}0)$.

3. Исследуем на экстремум: $y' = \left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{1+x^2-x(2x)}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$.

Находим критические точки: $\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2} = 0$; $1-x^2=0$; $x_1=-1$; $x_2=1$.



при $-\infty < x < -1$ $\quad y' < 0$ – функция убывает,

при $-1 < x < 1$ $\quad y' > 0$ – функция возрастает,

при $1 < x < +\infty$ $\quad y' < 0$ – функция убывает.

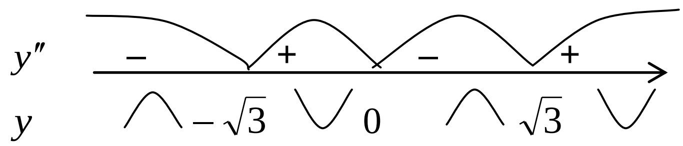
Находим значение функции в точке $x=-1$ и точке $x=1$.

$$y(-1) = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}; \quad y(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

4. Определим области выпуклости, вогнутости и точки перегиба кривой:

$$y'' = \left[\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}\right]' = \frac{-2x\left(1+x^2\right)^2 - 2\left(1+x^2\right)\cdot 2x\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^4} = \frac{\left(1+x^2\right)\left[2x-2x^3-4x\right]}{\left(1+x^2\right)^3} =$$

$$= \frac{2x\left(x^2-3\right)}{\left(1+x^2\right)^3} \cdot \frac{2x\left(x^2-3\right)}{\left(1+x^2\right)^3} = 0; \qquad x_1 = -\sqrt{3}; \quad x_2 = 0; \qquad x_3 = \sqrt{3}.$$



при $-\infty < x < -\sqrt{3}$ $\quad y'' < 0$ – кривая выпуклая,

при $-\sqrt{3} < x < 0$ $\quad y'' > 0$ – кривая вогнутая,

при $0 < x < \sqrt{3}$ $\quad y'' < 0$ – кривая выпуклая,

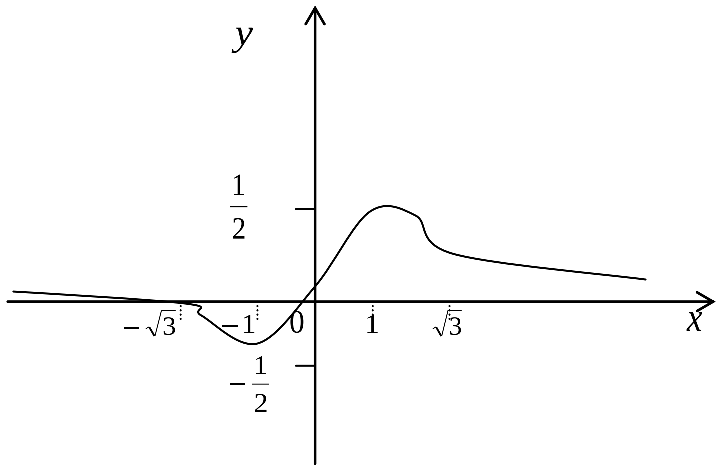
при $\sqrt{3} < x < +\infty$ $\quad y'' > 0$ – кривая вогнутая.

5. Находим асимптоты кривой: $y = kx + b$.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{\left(1+x^2\right)\cdot x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+1}=\frac{0}{1}=0\cdot$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{1+x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+1}=\frac{0}{1}=0\cdot$$

$y=0$ – асимптота. Строим график функции:



Задания для решения

В задачах 5.1–5.18 найти промежутки монотонности и экстремумы функций.

5.1. $y=2x^3-3x^2$.

5.2. $y=\frac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$.

5.3. $y=\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$.

5.4. $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2+64}$.

5.5. $y=\frac{2}{3}x^2\sqrt[3]{6x-7}$.

5.6. $y=\frac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$.

5.7. $y=\sqrt[3]{\left(x^2-4\right)^2}$.

5.8. $y=(x-5)^2\sqrt[3]{(x+1)^2}$.

5.9. $y=-x^2\sqrt{x^2+2}$.

5.10. $y=\frac{1}{\ln\left(x^4+4x^3+30\right)}$.

5.11. $y=x-e^x$.

5.12. $y=x^2e^{-x}$.

5.13. $y=x^2e^{4x}$.

5.14. $y=2x^2-\ln x$.

5.15. $y=x-\ln(1+x)$.

5.16. $y=x-\ln\left(1+x^2\right)$.

5.17. $y=\frac{x}{\ln x}$.

5.18. $y=x-2\ln x$.

В задачах 5.19–5.32 найти промежутки вогнутости, выпуклости и точки перегиба графиков заданных функцией.

5.19. $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$.

5.20. $y = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2$.

5.21. $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 3}$.

5.22. $y = 5 - \sqrt[3]{x - 1}$.

5.23. $y = \ln\left(1 + x^2\right)$.

5.24. $y = \dfrac{2}{x}\ln\dfrac{x}{2}$.

5.25. $y = x^4(12\ln x - 7)$.

5.26. $y = e^{\operatorname{arctg} x}$.

5.27. $y = 2x^2 + \ln x$.

5.28. $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$.

5.29. $y = e^{-x^2} + 2x$.

5.30. $y = \ln\left(1 + x^3\right)$.

5.31. $y = x^3 \ln x + 1$.

5.32. $y = xe^{2x} + 1$.

В задачах 5.33–5.50 найти асимптоты графиков заданных функцией.

5.33. $y = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 5}$.

5.34. $y = \dfrac{x^2}{2x + 1}$.

5.35. $y = \dfrac{x^3}{2(x + 1)^2}$.

5.36. $y = \sqrt[3]{6x^2 + x^3}$.

5.37. $y = \sqrt[3]{8 - x^3}$.

5.38. $y^2\left(x^2 + 1\right) = x^2\left(x^2 - 1\right)$.

5.39. $y = x^2 e^{-3x}$.

5.40. $y = xe^{\frac{1}{x^2}}$.

5.41. $y = x\ln\left(e + \dfrac{1}{x}\right)$.

5.42. $y = xe^{\frac{2}{x}} + 1$.

5.43. $y = 3x + \operatorname{arctg} 5x$.

5.44. $y = \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 2}$.

5.45. $y = \dfrac{1}{x} + 4x^2$.

5.46. $y = xe^{\frac{1}{x}}$.

5.47. $y = \sqrt{1 + x^2} + 2x$.

5.48. $y = \dfrac{x}{2x - 1} + x$.

5.49. $y = \dfrac{1}{e^x - 1}$.

5.50. $y = \left(x^2 - 2\right)e^{-2x}$.

В задачах 5.51–5.126 выполнить полное исследование функций и начертить их графики.

5.51. $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$.

5.52. $y = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$.

5.53. $y = \dfrac{2x - 1}{(x - 1)^2}$.

5.54. $y = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}$.

5.55. $y = \sqrt[3]{x^2} - x$.

5.56. $y = \dfrac{(x + 1)^2}{(x - 1)^2}$.

5.57. $y = \sqrt[3]{(x + 1)^2} - \sqrt[3]{x^2} + 1$.

5.58. $y = \dfrac{(x - 3)^2}{4(x - 1)}$.

5.59. $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

5.60. $y = x - \ln(2 - x)$.

5.61. $y = \ln(x^2 - 2x)$.

5.62. $y = \ln(1 - x^2)$.

5.63. $y = \dfrac{1}{1 - e^{3x}}$.

5.64. $y = \dfrac{x - 1}{x(x - 2)}$.

5.65. $y = \dfrac{2x^2}{4x^2 - 1}$.

5.66. $y = xe^{-x}$.

5.67. $y = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$.

5.68. $y = \dfrac{x^2 - x - 1}{x(x - 2)}$.

5.69. $y = \ln(x^2 + 4x)$.

5.70. $y = \dfrac{2 - 4x^2}{1 - 4x^2}$.

5.71. $y = \dfrac{2x + 1}{x^2}$.

5.72. $y = \dfrac{x}{3 - x^2}$.

5.73. $y = x - \sqrt[3]{x^2}$.

5.74. $y = \ln(x^2 - 4x + 8)$.

5.75. $y = \dfrac{x^3}{x - 1}$.

5.76. $y = \dfrac{(x - 1)^2}{(x + 1)^3}$.

5.77. $y = x - \ln(x + 1)$.

5.78. $y = \dfrac{x^3}{2(x + 1)^2}$.

5.79. $y = \dfrac{3x^4 + 1}{x^3}$.

5.80. $y = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{x}$.

5.81. $y = \dfrac{x^4 + 3}{x}$.

5.82. $y = \sqrt[3]{1 - x^2}$.

5.83. $y=\frac{x^3+1}{x^2}$.

5.84. $y=\sqrt{8+x}-\sqrt{8-x}$.

5.85. $y=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$.

5.86. $y=\sqrt[3]{6x^2-x^3}$.

5.87. $y=\sqrt[3]{x}-\frac{x}{3}$.

5.88. $y=x\ln x$.

5.89. $y=\frac{x^2+1}{x}$.

5.90. $y=\ln\frac{1+x}{1-x}$.

5.91. $y=\frac{x}{(x-1)^2}$.

5.92. $y=\frac{e^x}{x}$.

5.93. $y=\ln\left(x^2-4\right)$.

5.94. $y=\ln\left(2x^2+3\right)$.

5.95. $y=x^3e^{-x}$.

5.96. $y=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$.

5.97. $y=e^{\frac{1}{x}}$.

5.98. $y=\frac{\ln x}{x}$.

5.99. $y=\frac{x-3}{(x-2)^2}$.

5.100. $y=\frac{1}{e^x-1}$.

5.101. $y=\frac{x^3}{(x-2)^2}$.

5.102. $y=2x+2-3\sqrt[3]{(x+1)^2}$.

5.103. $y=x-\ln x$.

5.104. $y=x^2e^{-x}$.

5.105. $y=\frac{1}{x}+4x^2$.

5.106. $y=\ln\frac{x+1}{x+2}$.

5.107. $y=\ln\frac{x^3+16}{x}$.

5.108. $y=x^2\ln x$.

5.109. $y=\frac{2}{x^2+x+1}$.

5.110. $y=x\,\mathrm{arctg}x$.

5.111. $y=x-2\,\mathrm{arctg}x$.

5.112. $y=e^{-x^2}$.

5.113. $y=2x+\mathrm{arctg}\frac{x}{2}$.

5.114. $y=\left(x^2-2\right)e^{-2x}$.

5.115. $y=\frac{(x-1)^2}{x^2}$.

5.116. $y=\frac{2}{x^2+2x}$.

5.117. $y=\frac{1-2x}{x^2-x+2}$.

5.118. $y=\frac{x^2+5}{x+2}$.

5.119. $y=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}$.

5.120. $y=\frac{3x-5}{5x^2}$.

5.121. $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

5.122. $y=\frac{x^2}{x^2-1}$.

5.123. $y=\left(1+\frac{3}{x-1}\right)^2$.

5.124. $y=\frac{x^2+1}{2x^2}$.

5.125. $y=\frac{x^3}{x^2+1}$.

5.126. $y=\frac{x}{x^2+1}$.

3.6. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке

Сформулируем правила для нахождения наибольшего и наименьшего значения функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$:

1. Находим ООФ.
2. Проверяем, принадлежат ли $[a;b]$ ООФ.
3. Находим критические точки.
4. Проверяем, принадлежат ли они $[a;b]$.
5. Находим значения функции в критических точках, принадлежащих отрезку $[a;b]$, и на концах $f(x_i)$, $f(a)$, $f(b)$.
6. Выбираем наибольшее и наименьшее значение.

Пример 14. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-6x+5$ на отрезке $[0;3]$.

Решение. 1) ООФ – все действительные числа;

2) $[0;3]\in$ ООФ;

3) Находим критические точки: $y'=x^2+x-6$; $x^2+x-6=0$;

$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}$; $x_1=-3$; $x_2=2$

4) $x_1\notin[0;3]$, $x_2\in[0;3]$;

5) $y(2)=-2\frac{1}{3}$; $y(0)=5$; $y(3)=\frac{1}{2}$.

Ответ: $y_{наиб}=y(0)=5$; $y_{наим}=y(2)=-2\frac{1}{3}$.

Задания для решения

В задачах 5.1–5.15 найти наибольшее и наименьшее значение заданных функций в указанных промежутках.

5.1. $y = -3x^4 + 6x^2$; [–2; 2].

5.2. $y = x + 2\sqrt{x}$; [0; 4].

5.3. $y = \dfrac{x-1}{x+1}$; [0; 4].

5.4. $y = \dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$; [0; 1].

5.5. $y = \dfrac{1}{x^2-1}$; $\left[-\dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{2}\right]$;.

5.6. $y = \arccos x^2$; $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

5.7. $y = x^3 - 3x^2 + 1$; [-1; 4].

5.8. $y = \dfrac{4-x^2}{4+x^2}$; [–1; 3].

5.9. $y = \cos 2x + 2x$; $\left[-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

5.10. $y = \operatorname{tg} x - x$; $\left[-\dfrac{\pi}{4};\ \dfrac{\pi}{4}\right]$.

5.11. $y = \sqrt{4-x^2}$; [–2; 2].

5.12. $y = e^{2x} - e^{-2x}$; [–2; 1].

5.13. $y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$; [0; 1].

5.14. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}$; [0; 1].

5.15. $y = \sin 2x - x$; $\left[-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Задачи на отыскание наибольших и наименьших значений функций

5.16. Число 8 разбить на два таких слагаемых, чтобы сумма их кубов была наименьшей.

5.17. Число 36 разложить на два таких множителя, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

5.18. Из углов квадратного листа картона размером 18×18 $см^2$ нужно вырезать одинаковые квадраты так, чтобы, согнув лист, получить коробку наибольшей вместимости. Какова должна быть сторона вырезаемого квадрата?

5.19. Открытый чан имеет форму цилиндра. При данном объеме V каков должен быть радиус основания и высота цилиндра, чтобы его поверхность была наименьшей?

5.20. Требуется изготовить коническую воронку с образующей, равной 20 см. Какова должна быть высота воронки, чтобы ее объем был наибольшим?

5.21. Найти высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R.

5.22. Найти высоту конуса наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R.

5.23. Найти стороны прямоугольника наибольшего периметра, вписанного в полуокружность радиуса R.

5.24. Бревно длиной в 20 м имеет форму усеченного конуса, диаметры оснований которого равны соответственно 2 и 1 м. Требуется вырубить из бревна балку с квадратным поперечным сечением, ось которой совпадала бы с осью бревна и объем которой был бы наибольшим. Каковы должны быть размеры балки?

5.25. Катер стоит на якоре в 9 км от ближайшей точки берега; с катера нужно послать гонца в лагерь, расположенный в 15 км, считая по берегу от ближайшей к катеру точки берега (лагерь расположен на берегу). Если гонец может делать пешком по 5 км/ч, а на веслах по 4 км/ч, то в каком пункте берега он должен пристать, чтобы попасть в лагерь в кратчайшее время?

5.26. Картина в 1,4 м высотой повешена на стену так, что ее нижний край на 1,8 м выше глаза наблюдателя. На каком расстоянии от стены должен стать наблюдатель, чтобы его положение было наиболее благоприятным для осмотра картины (т.е. чтобы угол зрения был наибольшим)?

3.7. Использование производной при решении экономических задач

Задача №1: Функция спроса имеет вид $Q_D=100 - 20p$, постоянные издержки *TFC (total fixed costs)* составляют 50 денежных единиц, а переменные издержки *TVC (total variable costs)* на производство единицы продукции – 2 денежные единицы. Найти объем выпуска, максимизирующий прибыль монополиста.

Решение: Прибыль есть выручка минус издержки:

$П=TR - TC$, где $TR=p*Q$; $TC=TFC+TVC$.

Найдем цену единицы продукции:

$20p=100 - Q \Rightarrow p=5 - Q/20$.

Тогда $П=(5 - Q/20)Q - (50 + 2Q)= - Q^2 + 60Q - 1000 \rightarrow max$

Найдем производную: $П'(Q)= -2Q+60$.

Приравняем производную к нулю: $-2Q+60=0 \Rightarrow Q=30$.

При переходе через точку $Q=30$ функция $П(Q)$ меняет свой знак с плюса на минус, следовательно, эта точка является точкой максимума, и в ней функция прибыли достигает своего максимального значения. Таким образом, объем выпуска, максимизирующий прибыль, равен 30 единицам продукции.

Задача №2: Объем спроса на продукцию предприятия выражается формулой: $Q_D=200-4p$, а объем предложения – $Q_S=6p-100$. Величина переменных издержек на единицу продукции $TVC=25$. Чему должна быть равна цена на единицу продукции p, чтобы прибыль $П$ была максимальной?

Решение: В точке потребительского равновесия $Q_S=Q_D$, то есть

$6p_0-100=200-4p_0$, откуда $p_0=30$ *(ден.ед.)* – равновесная цена, $\Rightarrow Q_0=80$ *(ед.)* – равновесный объем продукции.

Изобразим графически кривые спроса и предложения, а также точку потребительского равновесия, находящуюся на их пересечении (см. рис. 2).

Рассмотрим три возможных варианта:

1) $p>p_0, \Rightarrow Q=Q_D$, то есть $П=Q_Dp-Q_D\,TVC=Q_D(p-TVC)$,

подставим значения и получим:

$П=(200-4p)*(p-25)=-4p^2+300p-5000.$

2) $p=p_0, \Rightarrow Q=Q_D=Q_S, \Rightarrow Q_{продажи}=Q_0=80$ *(ед.)*, $\Rightarrow$

$П_2=80*(30-25)=400$ *(ден. ед.)*.

3) $p<p_0: \Rightarrow Q=Q_S$, то есть $П=Q_Sp-Q_S\,TVC=Q_S(p-TVC)$,

подставим значения:

$П=(6p-100)(p-25)=6p^2-250p+2500.$

Далее случаи (1) и (3) можно решать аналитически, подставляя различные значения цены из интервала ее значений или как-либо иначе, но гораздо проще выявить экстремумы прибыли через производную:

1) $П=-4p^2+300p-5000$

$П'=-8p+300;$

$-8p+300=0 \Rightarrow p=75/2=37{,}5$ *(ден. ед.)*.

Значит, $Q=Q_D=200-4*37{,}5=200-150=50$ *(ед.)*, а

$П_1=-4p^2+300p-5000=-4*(37{,}5)^2+300*37{,}5-5000=\mathbf{625}$ ***(ден. ед.)***.

2) Во втором случае прибыль была уже найдена: $П_2=\mathbf{400}$ ***(ден. ед.)***.

3) $П=6p^2-250p+2500$

$П'=12p-250;$

$12p-250=0 \Rightarrow p=125/6=20^5/_6$ *(ден. ед.)*.

Значит, $Q=Q_S=6*20^5/_6-100=125-100=25$ *(ед.)*, а

$П_3=6p^2-250p+2500=6*(20^5/_6)^2-250*20^5/_6+2500=\mathbf{-104^1/_6}$ ***(ден. ед.)***.

Можно заключить, что прибыль максимальна в первом случае, следовательно, цена единицы продукции должна равняться *37,5* денежным единицам.

Задача №3: Какова максимальная выручка монополиста, если спрос вплоть до пересечения с осями описывается линейной функцией $Q=b-ap$, где p – цена товара, выпускаемого монополистом; a и b – коэффициенты функции спроса?

Решение: Выручка $TR=Qp=p(b-ap)$ достигнет максимума при равенстве нулю производной по цене:

$TR'=(p(b-ap))'=0.$

$TR'=p'*(b-ap)+(b-ap)'*p=b-ap-ap=b-2ap=0 \Rightarrow p=b/2a \Rightarrow$

$\Rightarrow Q=b-ap=b-a.$

При этом максимум выручки составит

$$TR=Qp=\frac{b}{2}\frac{b}{2a}=\frac{b^2}{4a}.$$

Задача №4: Найти оптимальный объем производства фирмы, функция прибыли которой задана таким образом: $П(q)=TR(q)-TC(q)=q^2-8q+10.$

Решение: Найдем производную данной функции:

$$П'=TR'(q)-TC'(q)=2q-8.$$

Приравняем производную к нулю и найдем точку экстремума:

$$П'=2q-8=0 \Rightarrow q_{extr}=4.$$

Является ли объем выпуска, равный четырем единицам продукции, оптимальным для фирмы? Чтобы ответить на этот вопрос, надо проанализировать характер изменения знака производной при переходе через точку экстремума.

При $q<q_{extr}=4 \rightarrow П'(q)<0$ и прибыль убывает.

При $q>q_{extr}=4 \rightarrow П'(q)>0$ и прибыль возрастает.

Как видим, при переходе через точку экстремума производная меняет свой знак с минуса на плюс. Следовательно, в точке экстремума $q_{extr}=4$ прибыль принимает минимальное значение, и таким образом, этот объем производства не является оптимальным для фирмы.

Каким же все-таки будет оптимальный объем выпуска для данной фирмы? Ответ на этот вопрос зависит от дополнительного исследования производственных возможностей фирмы. Если фирма не может производить за рассматриваемый период больше 8 единиц продукции ($П(q=8)=П(q=0)=10$), то оптимальным решением для фирмы будет вообще ничего не производить, а получать доход от сдачи в аренду помещений и/или оборудования. Если же фирма способна производить за рассматриваемый период больше 8 единиц продукции, то оптимальным решением для фирмы будет выпуск на пределе своих производственных возможностей.

Задача №5: Найти объем производства, при котором фирма, действующая на рынке совершенной конкуренции, будет получать максимальную прибыль, если $p=15$, $TC(q)=q^3 + 3q$.

Решение: Прибыль фирмы, действующей на рынке совершенной конкуренции, максимизируется при равенстве предельной выручки и предельных издержек: $MR=MC$. Поскольку при совершенной конкуренции наблюдается равенство цены и предельной выручки: $P=MR$, то можно утверждать, что фирма максимизирует прибыль при $P=MC$. Найдем предельные издержки: $MC=TC'=3q^2 + 3$. $3q^2 + 3=15$; $3q^2=12 \Rightarrow q=2$.

Итак, мы выяснили, что при цене $p=15$ фирма предложит на продажу 2 единицы продукции.

Задача №6: Пусть $TC(q)=\frac{1}{2}q^2$ – издержки фирмы-монополиста, $Q_D(p)=40 - 2p$ – функция спроса. Найти оптимальный для данной монополии объем производства и соответствующую цену единицы продукции.

Решение: Выразим зависимость цены от количества произведенной продукции:

$$p=\frac{40-q}{2} \Rightarrow p=20-\frac{1}{2}q.$$

Тогда прибыль $\pi(q)$ будет равна:

$$\pi(q)=\left(20-\frac{1}{2}q\right)q-\frac{1}{2}q^2=20q-\frac{1}{2}q^2-\frac{1}{2}q^2=20q-q^2.$$

В точке q_0 максимума прибыли выполняется равенство $\pi'(q_0)=20-2q_0=0.$ Отсюда оптимальный для монополиста объем производства равен $q_0=10$. Соответствующая цена будет: $p_0=p(q_0)=$ $20-\frac{1}{2}q_0=20-\frac{1}{2}*10=15.$

При этом предельные издержки $MC(q_0)=TC'(q_0)=10.$ Таким образом, цена, наиболее выгодная для данной монополии, в полтора раза выше ее предельных издержек.

Задача №7: Объем продукции *u* цеха в течение рабочего дня представляет функцию $u=-t^3-5t^2+75t+425,$ где t – время (ч). Найти производительность труда через 2 часа после начала работы.

Решение: За период от $t_0=2$ до $(t_0+\Delta t)$ количество произведенной продукции изменится от $u_0=u(t_0)$ до значения $u_0+\Delta u=u(t_0+\Delta t)$. Средняя производительность труда за этот период составит $\Delta u/\Delta t$. Следовательно, производительность труда в момент t_0 можно определить, как предельное значение средней производительности труда за период от t_0 до $(t_0+\Delta t)$ при $\Delta t\to 0$, то есть $ПТ=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta t}=u'(t).$

u'(t)= $-3t^2-10t+75\Rightarrow u(t_0)=-3*2^2-10*2+75=-12-20+75=43.$

Итак, производительность труда в момент времени через 2 часа после начала работы составит 43 единицы продукции в час.

§ 4. Правило Лопиталя

<u>Правило Лопиталя.</u> Пусть заданы две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ и выполняются условия:

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ или

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\pm\infty$;

2) они имеют первые производные в окрестности точки $x=a$ (за возможным исключением самой точки a);

3) $\varphi(x)\neq 0$ и $\varphi'(x)\neq 0$ в окрестности точки a;

4) существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, тогда существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ и имеет место равенство $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, если этот предел существует конечный или бесконечный.

Сущность этого правила состоит в том, что в случае «неопределенностей» вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ вычисление предела отношения функций, при соблюдении указанных требований, заменяется вычислением предела отношения их производных, которое в большинстве случаев оказывается проще.

Пример 16. Найти $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-5x^2+2x+8}{x^4-2x^3-16x^2+2x+15}$.

Решение. Если в данную дробь поставить (-1) вместо x, то получится «неопределенность» вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Применяя правило Лопиталя, получим:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3-5x^2+2x+8}{x^4-2x^3-16x^2+2x+15}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to -1}\frac{\left(x^3-5x^2+2x+8\right)'}{\left(x^4-2x^3-16x^2+2x+15\right)'}=$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{3x^2-10x+2}{4x^3-6x^2-32x+2}=\frac{3(-1)^2-10(-1)+2}{4(-1)^3-6(-1)^2-32(-1)+2}=\frac{5}{8}.$$

Пример 17. Найти $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{x^2}$. *Решение.* Здесь имеет место неопределенность $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{\left(x^2\right)'}=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{2x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{(2x)'}=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{2}=\infty.$$

В этом примере правило Лопиталя применили два раза.

Отметим, что правило Лопиталя применяется для раскрытия только «неопределенностей» вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ и $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Все остальные виды «неопределенностей» ($(\infty-\infty)$, $(0\cdot\infty)$, 1^∞, ∞^0, 0^0) сначала приводятся к «неопределенностям» $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ с помощью различных преобразований, а затем применяется правило Лопиталя.

Раскрытие «неопределенности» $(\infty-\infty)$*:*

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=+\infty$, то для определения предела $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)-\varphi(x)\right]$ надо преобразовать разность $f(x)-\varphi(x)$ к виду

$$f(x)-\varphi(x)=\frac{\dfrac{1}{\varphi(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)\cdot\varphi(x)}},\quad \lim_{x\to a}\left[f(x)-\varphi(x)\right]=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{1}{\varphi(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)\cdot\varphi(x)}}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

и раскрываем по правилу Лопиталя.

Пример 18. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

Решение. Если в данную дробь поставить 1 вместо x, то получится «неопределенность» $(\infty-\infty)$. Выражение, стоящее в скобках, приводим к общему знаменателю и получаем:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{2-(x+1)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2-x-1}{x^2-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{2x}=-\frac{1}{2}.$$

Раскрытие «неопределенности» $(0\cdot\infty)$.

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$;

$$f(x)\cdot\varphi(x)=\frac{f(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}} \text{ или } f(x)\cdot\varphi(x)=\frac{\varphi(x)}{\dfrac{1}{f(x)}},$$

тогда

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot\varphi(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{1/\varphi(x)}=\lim\frac{\varphi(x)}{1/f(x)},$$

то есть «неопределенность» вида $(0\cdot\infty)$ может быть сведена к «неопределенности» вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Пример 19. Найти $\lim\limits_{x\to +0} x^3\cdot\ln x$.

Решение. При $x\to 0$ $\ln x\to-\infty$, а x^3 – величина бесконечно малая, поэтому здесь имеет место «неопределенность» вида $(0\cdot\infty)$.

$$\lim_{x\to +0} x^3\cdot\ln x=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to +0}\frac{\ln x}{1/x^3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to +0}\frac{(\ln x)'}{\left(1/x^3\right)'}=\lim_{x\to +0}\frac{1/x}{-3/x^4}=\lim_{x\to +0}\left[-\frac{x^3}{3}\right]=0.$$

«Неопределенности» вида 1^∞*;* ∞^0*;* 0^0.

«Неопределенности» этих видов сводятся к «неопределенности» вида $(0\cdot\infty)$, которая была рассмотрена выше. Это достигается с помощью тождества.

$$[f(x)]^{\varphi(x)}=e^{\varphi(x)\cdot\ln f(x)};\ (f(x)>0),$$

тогда $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to a} e^{\varphi(x)\cdot\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\cdot\ln f(x)}$ и все сводится к определению предела $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\cdot\ln f(x)$.

Пример 20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{3}{x}\right)^x=\left(1^\infty\right)$; $\left(\cos\dfrac{3}{x}\right)^x=e^{x\cdot\ln\left(\cos\frac{3}{x}\right)}$, поэтому

$$\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{3}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty} e^{x\cdot\ln\left(\cos\frac{3}{x}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(\cos\frac{3}{x}\right)}.$$

Найдем

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(\cos\frac{3}{x}\right) = (\infty\cdot 0) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\cos\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\cos 3/x}\left(-\sin\frac{3}{x}\right)\left(\frac{3}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} =$$

$$= -3\lim_{x\to\infty}\operatorname{tg}\frac{3}{x} = 0.\quad \lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{3}{x}\right)^{x} = e^{0} = 1.$$

Задания для решения

В задачах 6.1–6. вычислить пределы, пользуясь правилом Лопиталя.

6.1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$.

6.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\sin 5x}$.

6.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-\cos 3x}{e^{5x}-\cos 5x}$.

6.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg}x}{x^{3}}$.

6.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x-\operatorname{tg}x}$.

6.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\ln(1+x)}$.

6.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^{2}}-1}{\cos x-1}$.

6.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{\sin^{2}5x}$.

6.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg}x}-e^{x}}{\operatorname{tg}x-x}$.

6.10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

6.11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{3}-4x^{2}+5x-2}{x^{3}-5x^{2}+7x-3}$.

6.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-\frac{x^{3}}{6}-\frac{x^{2}}{2}-x-1}{\cos x+\frac{x^{2}}{2}-1}$.

6.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^{3}}-x^{3}-1}{\sin^{6}2x}$.

6.14. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{ctg}x-1}{\sin 4x}$.

6.15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2x}{\ln\cos 3x}$.

6.16. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln\left(x^{2}-3\right)}{x^{2}+3x-10}$.

6.17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x^{2}\right)}{\cos 3x-e^{-x}}$.

6.18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$.

6.19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$.

6.20. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$.

6.21. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(x-3)}{\ln\left(e^x-e^3\right)}$.

6.22. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1-x)+\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}}{\operatorname{ctg}\pi x}$.

6.23. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3e^{-x}$.

6.24. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{3}{x}$.

6.25. $\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{\frac{1}{x^2}}$.

6.26. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+e^{-x}-2\right)\operatorname{ctg}x$.

6.27. $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\operatorname{ctg}\pi(x-1)$.

6.28. $\lim\limits_{x\to 1}\sin(x-1)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

6.29. $\lim\limits_{x\to 1}\left(1-x^2\right)\dfrac{\pi x}{2}$.

6.30. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

6.31. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x-\dfrac{1}{x}\right)$.

6.32. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$.

6.33. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{arctg}x}-\dfrac{1}{x}\right)$.

6.34. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

6.35. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2x\right)$.

6.36. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg}x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$.

6.37. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$.

6.38. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sin\dfrac{\pi x}{2}\right)^{\operatorname{tg}^2\frac{\pi x}{2}}$.

6.39. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg}x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

6.40. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+2^x\right)^{\frac{1}{x}}$.

6.41. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\operatorname{ctg}2x}$.

6.42. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x)^{2x-\pi}$.

6.43. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}$.

6.44. $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$.

6.45. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x+e^x\right)^{\frac{1}{x}}$.

4.46. $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{1}{\ln\left(e^x-1\right)}}$.

6.47. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)^{\cos x}$.

6.48. $\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin x)^{\operatorname{tg}x}$.

6.49. $\lim\limits_{x\to+0}(\ln\operatorname{ctg}x)^{\operatorname{tg}x}$.

6.50. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$.

Часть 2. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ И ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§5. Неопределенный интеграл

5.1. Основные понятия. Свойства неопределенного интеграла

Функция F(x) называется первообразной для функции f(x) на некотором промежутке X, если F'(x)=f(x) для любого xεX.

Любая непрерывная на X функция f(x) имеет бесконечное множество первообразных, различающихся между собой постоянным слагаемым, т.е.

F2(x) = F1(x)+C, где C=const.

Неопределенным интегралом от функции f(x), который обозначается символом ∫f(x)dx, называется совокупность всех ее первообразных F(x)+C, т.е. ∫f(x)dx=F(x)+C, если F'(x)=f(x), f(x) – называется подынтегральной функцией,

f(x)dx — подынтегральным выражением, C – производная постоянная.

Основные свойства неопределенного интеграла:

1) (∫f(x)dx)'=f(x)
2) d(∫f(x)dx)=f(x)dx
3) ∫d(F(x))=F(x)+C
4) ∫(f1(x)∓f2(x))dx = ∫f1(x) dx∓∫f2(x)dx
5) ∫a(f(x)dx = a∫f(x)dx

Таблица основных неопределенных интегралов:

U=u(x) du=u'dx:

1) $\int U^n du = \frac{U^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$

2) $\int \frac{du}{U} = Ln\,|U| + C$

3) $\int U^n du = \frac{A^u}{Ln\,a} + C,$

4) $\int e^u\ du = e^u + C$

5) $\int \sin U\,du = -\cos U + C$

6) $\int \cos U\,du = \sin U + C$

7) $\int \frac{du}{cos^2\,U} = tgU + C$

8) $\int \frac{du}{sin^2\,U} = -ctgU + C$

9) $\int \frac{du}{a^2+U} = \frac{1}{a} artg\frac{U}{a} + C$

10) $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{U-A}{U+A}\right| + C$

11) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$

12) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$

5.2. Интегрирование путем замены переменной

Этот способ заключается во введении новой переменной интегрирования. При этом заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным или к нему сводящимся.

Пусть требуется найти ∫f(x)dx). Сделаем подстановку x=y(t), где y(t) – функция, имеющая непрерывную производную. Тогда dx=y'(t)dt, и получаем формулу интегрирования подстановкой:

$$\int f(x)dx)=\int f(y(t)* y'(t)dt)$$

После нахождения интеграла в правой части этого равенства следует перейти от новой переменной t к переменной x. При интегрировании иногда целесообразно подбирать замену переменной не в виде x=y(t), а в виде y(x)=t. Рассмотрим примеры:

1) $\int 2(x+3)^7dx)$ сделаем подстановку 2x+3=t, тогда dt=2dx dx=dt/2 имеем

$$\int 2(x+3)^7dx) = \int t^7 \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\frac{t^8}{8} + C) = \frac{(2x+3)^8}{16} + C$$

2) $\int \frac{xdx}{2x^2+3} = \left\{\begin{matrix} 2x^2+3=t \\ 2\,xdx = d\,t \\ xdx = 1/4\,dt \end{matrix}\right\} = \int \frac{\frac{1}{4}dt}{t} = \frac{1}{4}\ln|t| + C = \frac{1}{4}\ln|2x^2+3| + C$

3) $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}\,dx = \left\{\begin{matrix} sinx = t \\ \cos x\,dx = dt \end{matrix}\right\} = \int \frac{dt}{t^3} = \int t^{-3}dt = \frac{t^{-3}}{-2} + C = -\frac{1}{2t^2} + C ==$
$-\frac{1}{2sin^2 x} + C;$

4) $\int \frac{dx}{x\ln x} = \left\{\begin{matrix} lnx = t \\ dx/x = dt \end{matrix}\right\} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|lnx| + C$

5) $\int tgx\,dx = \int \frac{sinx}{\cos x}\,dx = \left\{\begin{matrix} cosx = t \\ dt = -sinxdx \end{matrix}\right\} = \int \frac{-dt}{t} = -\ln|t| + C ==$
$-\ln|cosx| + C.$

5.3. Интегрирование по частям:

Пусть u и v – две дифференцированные функции от X. Имеет место формула: $\int udv = u\,v - \int v\,du$

При применении метода интегрирования по частям подынтегральное выражение данного интеграла развивают на два множителя u и dv, затем, находя du (дифференцируя u) и v (интегрируя dv), применяют указанную выше формулу, сводя вычисление интеграла $\int u dv$ к вычислению интеграла $\int v du$. Этот метод целесообразно применять, когда последний интеграл проще исходного.

С помощью интегрирования по частям берутся интегралы следующих типов: $\int P_n(x) \sin dx\, dx$, $\int P_n(x) \cos dx\, dx$ $\int P_n(x) e^{2x} dx$, (в качестве «u» берут многочлен Pn(x), а остальное принимают за dv), $\int P_n(x)\, ln\, x\, dx$, $\int P_n(x) \operatorname{arctg} x\, dx$ $\int P_n(x) \arcsin x\, dx$, (принимают dv= Pn(x)dx, а остальное принимают за u).

Рассмотрим примеры:

1) $\int (3x+1) cos2xdx = \left\{\begin{matrix} u=3x+1 \\ dv=cos2x\, dx \end{matrix}\middle| \begin{matrix} du=3dx \\ V=1/2sin2x \end{matrix}\right\} = (3x+1)\frac{1}{2}\, sin2x -$ $\int \frac{1}{2} sin2x\, 3dx = \frac{1}{2}$ (3x+1) sin 2x – $\frac{3}{2}$ ($-\frac{1}{2} cos2x) + C = \frac{1}{2}(3x+1)sin2x +$ $\frac{3}{2}\cos 2x + C$

2) $\int xe^{-5x}\, dx = \left\{\begin{matrix} u = x \\ dv = e^{-5x} dx \end{matrix}\middle| \begin{matrix} du = dx \\ V = -\frac{1}{5} e^{-5x} \end{matrix}\right\} = -x\frac{1}{5} e^{-5x} + \int \frac{1}{5} e^{-5x} dx =$ $-\frac{x}{5} e^{-5x} - \frac{1}{25} e^{-5x} + C$

3) $\int arctgx\, dx = \left\{\begin{matrix} u = arctgx \\ dv = dx \end{matrix}\middle| \begin{matrix} du = dx/(1+x^2) \\ V = x \end{matrix}\right\} = x\, arctg\, x - \int \frac{xdx}{1+x^2} =$ $x\, arctg\, x - \frac{1}{2} ln|1+x^2|$ +C

4) $\int \ln x/\, x^3\, dx = \left\{\begin{matrix} u = lnx \\ dv = \mathrm{d}\, x/\, x^3 \end{matrix}\middle| \begin{matrix} du = dx/x \\ V = -\frac{1}{2} x^2 \end{matrix}\right\} = -\frac{1}{2} x^2\, lnx + \int \frac{1}{2x^2}\frac{dx}{x} =$ $-\frac{1}{2x^2}\, lnx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}\, lnx - \frac{1}{4}\frac{x}{x^2}$C

5.4. Интегрирование функций, содержащих в знаменателе квадратный трехчлен:

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c};\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}};\int \frac{ax+b}{ax^2+bx+c}dx;\int \frac{ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx;$$

Рассмотрим первые два интеграла: чтобы их вычислить, квадратный трехчлен, стоящий в значителе, надо дополнить до полного квадрата. В результате исходный интеграл сводится к виду:

$\int \frac{du}{u^2 \pm a^2}$; или $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}}$; либо $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$; а эти интегралы являются табличными. Рассмотрим примеры:

1) $\int \frac{dx}{x^2+7x+12} =$

$$\int \frac{dx}{x^2-2*\frac{2}{7}x+\frac{49}{4}-\frac{49}{4}+12} = \int \frac{dx}{(x-\frac{7}{2}) \quad -1/4} = \begin{Bmatrix} x-\frac{7}{2}=u \\ dx=du \end{Bmatrix} = \int \frac{du}{(u)^2-1/4} = \frac{1}{2*\frac{1}{2}}\ ln\left|\begin{matrix} u-\frac{1}{2} \\ u+\frac{1}{2} \end{matrix}\right| = =$$

$$ln\left|\begin{matrix} (x-\frac{7}{2})-\frac{1}{2} \\ \left(x-\frac{7}{2}\right)+\frac{1}{2} \end{matrix}\right| + C = ln\left|\begin{matrix} x-4 \\ x-3 \end{matrix}\right| +$$

2) $\int \frac{dx}{x^2-2x+5} =$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x=1-1+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+4} \quad -1/4}$$

$$= \begin{Bmatrix} x-1=u \\ dx=du \end{Bmatrix} = \int \frac{du}{(u)^2+4} = \ln\left|x-1+\sqrt{(x-1)^2+4}\right| + C$$

3) $\int \frac{dx}{2+x-x^2} =$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{2-(x^2-x+\frac{1}{4})+\frac{1}{4}}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{9}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} = \begin{Bmatrix} x-\frac{1}{2}=u \\ dx=du \end{Bmatrix}$$

$$= \int \frac{du}{\frac{9}{4}-\ u^2} = \arcsin\ \frac{\frac{u}{3}}{2} + C$$

$$= \arcsin\left(x-\frac{1}{2}\right)2\frac{}{3} + C = \arcsin 2x - \frac{1}{3} + C$$

Интегралы вида $\int \frac{ax+b}{ax^2+bx+c}dx; \int \frac{ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx;$ вычисляются по следующей схеме:

1. Вычислителем дроби вычисляется выражение, являющееся производной квадратного трехчлена, стоящего в значителе?

2. Исходный интеграл развивается на сумму двух интегралов путем деления на данный знаменатель, причем числителем первой дроби является производная квадратного трехчлена, а второй – оставшееся число.

3. Вычисляем два интеграла, которые являются табличными.

Пример.

4. $\int \frac{x-5}{x^2+4x+13}dx =$
$\frac{1}{2}\int \frac{(2x-10)+4-4}{x^2+4x+13}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+4)-14}{x^2+4x+13}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+4)-14}{x^2+4x+13}dx - \frac{1}{2}14 \int \frac{dx}{x^2+4x+13} =$
$\frac{1}{2}\ln|x^2+4x+13| - 7\int \frac{dx}{(x+2)^2+9} = \frac{1}{2} \ln|x^2+4x+13| - \frac{7}{3}arctg \frac{x+2}{3}$ +C.

5. $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2+6x}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-4)+6-6}{\sqrt{x^2+6x}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+6-10}{\sqrt{x^2+6x}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+6}{\sqrt{x^2+6x}}dx -$
$\frac{1}{2}10 \int \frac{2x+6-10}{\sqrt{x^2+6x+9-9}} = \frac{1}{2} \frac{(x^2+6x)^{1/2}}{1/2} - 5\int \frac{dx}{\sqrt{(x+3)^2-9}} = \frac{1}{2}2\sqrt{x^2+6x} - 5ln\Big|x+3+$
$\sqrt{(x^2+3)^2-9}\Big| + C = \sqrt{x^2+6x} - 5\ln\left|\sqrt{x^2+6x}\right| + C$

5.5. Интегрирование тригонометрических функций

1) Интегралы вида
2) $\int \sin mx \cos nx\, dx, \int \cos mx \cos nx\, dx, \int \sin mx \sin nx\, dx$ берутся с помощью формул:

Sin mx cos nx = ½ (sin (m-n)x + sin (m+n)x);
Cos mx cos nx = ½ (cos (m-n)x + cos (m+n)x);
Sin mx cos nx =½ (cos (m-n)x – cos (m+n)x);
Например:

$$\int \sin 6x \cos 4x\, dx =$$
$$= \int \frac{1}{2}(\sin 2x + \sin 10x)\, dx = 1/2\int sin2xdx + \frac{1}{2}\int sin10xdx$$
= -1/4 cos 2x – 1/20 cos 10x+C

2) Интегралы вида $\int \cos^n x \ \sin^m x \ dx$, где два показателя степени n и m – четные числа или 0, требуют исполнения формул понижения степени:

$$\sin^2 x = 1 - \frac{cos2x}{2};\ \cos^2 x = 1 + \frac{cos2x}{2};$$

1) $\int \cos^4 3xdx = \int (\cos^2 3x)^2 \ dx = \int \left(\frac{1+cos\,6x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int(1+2cos6x+ cos^2 6x)dx$ = ¼ $\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 6x\, dx + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 12x}{2}\, dx$ =1/4x +1/12Sin6x+1/8($\int dx + \int cos12xdx = \frac{x}{4} + \frac{1}{12} \sin 6x + \frac{1}{96}\sin 12x + C$

2) $\int sin^2\,\frac{x}{3}\,cos^2\frac{x}{3}\,dx = \frac{1}{4}\int 4sin^2\,\frac{x}{3}\,cos^2\frac{x}{3}\,dx = \frac{1}{4}\int sin^2\,\frac{x}{3}\,cos^2\frac{2x}{3}\,dx =$ $\frac{1}{4}\int\frac{1-cos\quad\frac{4x}{3}}{2}$ dx = $\frac{1}{8}\left(\int dx - \int cos\quad\frac{4x}{3}dx\right) = \frac{1}{8}\left(x - \frac{3}{4}sin\frac{4x}{3}\right) + C$

Если под знаком интеграла вида $\int \cos x^n \sin x^m\,dx$ хотя бы один из показателей степени m и n – число нечетное, то от нечетной степени функции (sinx или cosx) отделяют первую степень, а оставшуюся четную степень функции заменяют на кофункцию по формуле $sin^2x = 1 - cos^2x$ или $cos^2x = 1 - sin^2x$

3. $\int sin^3x\,dx = \int sin\,x(1 - cos^2x)dx = \int sin\,x\,dx - \int sin\,xcos^2x\,dx =$ $-cosx + \frac{cos^3x}{3} + C$

4. $\int sin^4cos^32x\,dx = \int sin^4\,2x\,cos2x\,(1 - sin^22x)dx = \int sin^42x\,cos\,2x\,dx -$ $\int sin^62x\,cos\,2x\,dx = \frac{1}{2}\frac{sin^5\,2x}{5} - \frac{1}{2}\frac{sin^7\,2x}{7} + c = \frac{1}{10} - \frac{1}{14}sin^7\,2x + C.$

5.6. Интегрирование некоторых иррационных функций

Интервалом вида $\int R(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots . x^{\frac{r}{s}}$ вычисляются с помощью подстановки $x = t^n\;dx = kt^{k-1}dt\;\frac{m}{n}, \ldots . \frac{r}{s}$, где k – общий знаменатель дроби. В результате подстановки каждая дробная степень x выразится через целую степень t и, следовательно, подынтегральная функция преобразится в рациональную функцию t.

1. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}} = \begin{Bmatrix} x = t^6 \\ dx = 6t^6dt \\ t = \sqrt[6]{x} \end{Bmatrix} = \int\frac{6t^6dt}{t^3+t^2} = 6\int\frac{t^5dt}{t^2(t+1)} = \int\frac{t^3dt}{(t+1)} = 6\int\frac{(t^3+1)-1}{(t+1)} =$

$=6\int\frac{t^3+1}{t+1} - \int\frac{dt}{t+1} = 6(\int\frac{(t+1)(t^2-t+1)}{t+1}dt - \ln|t+1|) = \int(t^2 - t + 1)\,dt - \ln|t+1|) =$

$=6(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1| + C) = 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln|t+1| + C = 2\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} - 6\ln\left|\sqrt[6]{x} + 1\right|$+C;

2. $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{5-x}+\sqrt{5-x}} = \int\frac{dx}{(5-x)^{1/4}+(5-x)^{1/2}} = \begin{Bmatrix} 5 - x = t^4 & dx = -4t^3dt \\ x = 5 - t^4 & t = \sqrt[4]{5-x} \end{Bmatrix} = \int\frac{-4t^3dt}{t+t^2} =$

$= -4\int\frac{t^3dt}{t(1+t)} = -4\int\frac{(t^2-1)+1}{1+t}dt = -4(\int\frac{(t-1)(t+1)}{1+t}dt + \int\frac{dt}{1+t}) = -4\,(\int(t-1)\,dt + \int\frac{dt}{1+t})$

$= -4\;(\frac{t^2}{2} - t + \ln|1+t| + C = -2t^2 + 4t - 4ln\,|1+t| + C = -2\sqrt{5-x} + 4\sqrt[4]{5-x} - \ln\left|1 + \sqrt[4]{5-x}\right| + C.$

Задания для решения

I

7.1. $\int x^3 e^{x2} dx$

7.2. $\int \ x^2 e^{-x} dx$

7.3. $\int \sin x \cos e^{\cos x} dx$

7.4. $\int e^{\sqrt{e}} dx$

7.5. $\int x^2 \sin x dx$

7.6. $\int x \cos 2x dx$

7.7. $\int \ell n^2 x dx$

7.8. $\int (1+\ell n x)^2 dx$

7.9. $\int \ell n(1+x^2) dx$

7.10. $\int \ell n(1+\sqrt{x}) dx$

7.11. $\int arctg \sqrt{x} dx$

7.12. $\int \arcsin x dx$

7.13. $\int x \sin^2 x dx$

7.14. $\int x e^{-2x} dx$

7.15. $\int x \sin x \cos x dx$

7.16. $\int \frac{\ell n \cos x}{\cos^2 x} dx;$

7.17. $\int \ell n(x+\sqrt{x^2+1} dx$

7.18. $\int \frac{\ell n x}{x^2} dx$

7.19. $\int \frac{arctgx}{x^2} dx$

7.20. $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$

7.21. $\int \sin \sqrt{x} dx$

7.22. $\int \frac{\sqrt{1+tgx}}{\cos^2 x} dx$

7.23. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

7.24. $\int \frac{\ell n x \sqrt{1+\ell n^2 x}}{x} dx$

7.25. $\int \frac{tgx\sqrt{1-tg^2 x}}{\cos^2 x} dx$

7.26. $\int \sin 2x \sqrt{1+\cos^2 x} dx$

7.27. $\int \sqrt{1+4x^2} dx$

7.28. $e^x \sqrt{1+e^{2x}} dx$

7.29. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}}$

7.30. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}}$

II

7.31. $\int \frac{dx}{x(x^2-1)}$

7.32. $\int \frac{dx}{x(x^2+2x+4)}$

7.33. $\int \frac{dx}{x^3-6x^2+11x=6}$

7.34. $\int \frac{xdx}{(x-1)(x^2+2x+2)}$

7.35. $\int \frac{x^2 dx}{(x+1)(x^2-2x+2)}$

7.36. $\int \frac{xdx}{(x-2)(x^2+2x+2)}$

7.37. $\int \frac{(x+1)dx}{(x-1)(x^2+2x+5)}$

7.38. $\int \frac{dx}{(x+2)(x^2-2x+5)}$

7.39. $\int \frac{x^3 dx}{(x-1)(x-2)}$

7.40. $\int \frac{4x^2 dx}{(x+1)(x+2)}$

7.41. $\int \frac{xdx}{(x^2-1)(x-2)}$

7.42. $\int \frac{x^3}{x^3-1} dx$

7.43. $\int \frac{xdx}{x^3+1}$

7.44. $\int \frac{dx}{x^4+5x^2+4}$

7.45. $\int \frac{dx}{x^4+10x^2+9}$

7.46. $\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x^2+1)}$

7.47. $\int \frac{(x-1)dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$

7.48. $\int \frac{dx}{x^2(x^2+4)}$

7.49. $\int \frac{(x+1)dx}{(x-1)^2(x^2+1)}$

7.50. $\int \frac{x^2 dx}{x^4-1}$

7.51. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

7.52. $\int \frac{x^2 dx}{x^4 - 1}$ 7.53. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)(x^2+4)}$ 7.54. $\int \frac{x-1}{x^3+1} dx$

7.55. $\int \frac{dx}{(x^2+x)(x^2+1)}$ 7.56. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$ 7.57. $\int \frac{xdx}{x^3+8}$

7.58. $\int \frac{dx}{x^3-8}$ 7.59. $\int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$ 7.60. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)(x^2+9)}$

III

7.61. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + ^4\sqrt{x}}$ 7.62. $\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \frac{dx}{x}$ 7.63. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$

7.64. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}+2}$ 7.65. $\int \frac{dx}{x-\sqrt[3]{x}}$ 7.66. $\int \frac{dx}{x(1-\sqrt{x}}$

7.67. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$ 7.68. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ 7.69. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}$

7.70. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}$ 7.71. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$ 7.72. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+10}}$

7.73. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+5}}$ 7.74. $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ 7.75. $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{3-2x+x^2}}$

7.76. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$ 7.77. $\int \sqrt{1-4x^2} dx$ 7.78. $\int \sqrt{x^2-1} dx$

7.79. $\int x^2\sqrt{1-x^2} dx$ 7.80. $\int \sqrt{x^2+2x+5} dx$

IV

7.81. $\int \frac{dx}{1+2\sin x}$ 7.82. $\int \frac{dx}{2\sin x - 1}$ 7.83. $\int \frac{dx}{5-3\sin x}$

7.84. $\int \frac{dx}{1+2\cos x}$ 7.85. $\int \frac{dx}{2\cos x - 1}$ 7.86. $\int \frac{dx}{5+4\cos x}$

7.87. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$ 7.88. $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$ 7.89. $\int \cos^4 x dx$

7.90. $\int \sin^4 x dx$ 7.91. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$ 7.92. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$

7.93. $\int \frac{dx}{\cos x - \sin x}$ 7.94. $\int \frac{dx}{1+tgx}$ 7.95. $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 2\cos^4 x}$

7.96. $\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^4 x}$ 7.97. $\int \frac{\cos^2 x dx}{\cos^4 x}$ 7.98. $\int \frac{dx}{\sin 2x - 2\sin x}$

99. $\int \frac{dx}{1+\sin x + \cos x}$ 100. $\int \cos^6 x dx$

§ 6. Определенный интеграл

6.1. Понятие определенного интеграла

Пусть функция f(x) определена и непрерывна на отрезке [a,b] Разовьем отрезок [a,b] произвольным образом на n частей точками a=x0<x1<x2<…xn=b Обозначим Δxi = xi – xi-1 В каждом из экспериментальных отрезков Δxi выберем произвольную точку ξi. Сумма вида

$$f(\xi 1)\,\Delta x1+f(\xi 2)\Delta x2+\ldots+f(\xi n)\,\Delta xn=\sum_{i=1}^{n} f(\xi i)\,\Delta xi$$

называется интегральной суммой для функции f(x) на отрезке [a,b]. Ее величина зависит от способа разбиения отрезка [a,b] на части и от выбора точек ξi.

Будем рассматривать последовательность разбиений такую, что maxΔxi→ 0 (очевидно, что при этом число отрезков n → ∞). Для каждого разбиения можно составить интегральную сумму $\sum_{i=1}^{n}$ f(ξi) Δxi, т.е. последовательность разбиений соответствует последовательности интегральных сумм.

Если при новых разбиениях отрезка [a,b] таких, что maxΔxi→ 0 и при любом выборе точек ξ1 сумма $\sum_{i=1}^{n}$ f(ξi) Δxi. стремится к одному и тому же пределу, то говорят, что функция f(x) интегрируема на отрезке [a,b], а сам предел называют определенным интегралом от функции f(x) на отрезке [a,b] и обозначают символом $\int_a^b f(x)dx$ Таким образом,

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\max\,\Delta xi\to 0}\ \sum_{i=1}^{n} f(\xi i)\,\Delta xi$$

Число **a** называется нижним пределом интеграла, b – верхним пределом. Отрезок [a,b] называется отрезком интегрирования.

Имеет место следующая <u>теорема</u>: Если функция f(x) непрерывна на отрезке , то она интегрируема на этом отрезке [a,b]. Если построить график y=f(x), то в случае f (x)≥0, интеграл $\int_a^b f(x)dx$ будет численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой y=f(x), прямыми x=a, x=b и осью OX.

6.2. Свойства определенного интеграла

1) Если существует $\int_a^b f(x)dx$, то существует $\int_b^a f(x)dx$, причем $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

2) $\int_b^a Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx$

3) $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx$ = $\int_a^b f_1(x)dx \pm f_2(x)dx$

4) Если $f_1(x) \geq f_2(x)$ x∈[a,b], то $\int_a^b f_1(x)dx \geq f_2(x)dx$

5) Если m и M – наименьшее и наибольшее значение f(x) на отрезке [a,b], то M(b-a)≤ $\int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

6) Если f(x) непрерывна на отрезке [a,b], то на этом отрезке найдется такая точка ξ, что $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi)$

7) Для любого из трех чисел a,b,c справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

6.3. Вычисление определенного интеграла

Имеет место формула Ньютона Лейбница:

$\int_a^b f(x)dx = F(x)$ | a/b= F(b)-F(a), где F(x) – первообразная от f(x).

1) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x+1}} = \int_0^3 (x+1)^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Big|_0^3 = 2\sqrt{x+1}\Big|_0^3$ = 2($\sqrt{4} - \sqrt{1}$)=2(2-1)=2

2) $\int_1^2 \frac{x\,dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{2x\,dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\ \ln|x^2+4|\ \Big|_1^2 = \frac{1}{2}(ln8 - ln5)$ = ½ ln8/5

3) $\int_0^\pi \sin^2\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx = 2\int_0^\pi \sin^2\frac{x}{2}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx = 2\ \frac{sin^3\frac{x}{2}}{3}\Big|_0^\pi = \frac{2}{3}(\sin^3\frac{\pi}{2} - \sin^3 0) = \frac{2}{3}(1-0) = \frac{2}{3}.$

6.4. Замена переменной в определенном интеграле

Пусть дан интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где функция f(x) непрерывна на [a,b]
Введем новую переменную t по формуле x=y(t)

Если 1) y(α) = a; y(β) = b, 2) y(t) = y'(t) – непрерывны на [α, ρ], 3) f(y(t)) определена и непрерывна на [α, ρ], то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(y(t))\, y'(t)dt$$

При вычислении определенного интеграла по этой формуле не надо возвращаться к старой переменной

Пример1. $\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x}\, dx$

Положим: x-1 = t2 x=t2 -1; dx = 2tdt

Если x=1, то 1-1 = α2 ; → α=0

Если x=5, то 5-1 = β 2 ; → β =2

$\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x}\, dx = \int_0^2 \frac{t}{t^2+1}\, 2tdt = 2\int_0^2 \frac{(t^2+1)-1}{t^2+1} dt = 2(\int_0^2 dt - \int_0^2 \frac{dt}{t^2+1}) = 2(t\Big|_0^2 - \operatorname{arctg} t\Big|_0^2)$ = 2(-0-arctg2+arctg0) = 2(2-arctg2)/

Пример 2

$\int_0^{\frac{2}{\pi}} sinx\, cos^2 x\, dx = \left\{\begin{matrix} cosx = t \\ -\sin x\, dx = dt \end{matrix}\middle| \begin{matrix} \cos 0 = \alpha \Rightarrow \alpha = 1 \\ \cos\frac{\pi}{2} = \beta \Rightarrow \beta = 0 \end{matrix}\right\} = \int_1^0 -t^2\, dt = -\, t \Big|_1^0 =$

$= -\frac{1}{3}(0-1) = \frac{1}{3}$;

6.5. Интегрирование по частям

Пусть U и V – дифференцируемые функции от x.

(UV)' = U'V+UV'откуда следует $\int_a^b (UV)'dx = \int_a^b U'Vdx + \int_\alpha^\beta UV'dx$

Но $\int_a^b (UV)'dx = UV + C \rightarrow \int_a^b (UV)'dx = UV\Big|_a^b$ Поэтому имеем

$UV\Big|_a^b = \int_a^b VdU + \int_a^b UdV$ откуда следует $\int_a^b UdV = UV\Big|_a^b - \int_a^b VdU$ Формула интегрирования по частям

Пример 1

$\int_1^e x\, lnx\, dx = \left\{\begin{matrix} U = lnx \\ dV = x\, dx \end{matrix}\middle| \begin{matrix} du = \frac{1}{x}dx \\ V = \frac{x^2}{2} \end{matrix}\right\} = \frac{x^2}{2}\, lnx\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx =$

$\frac{x^2}{2} lnx\Big|_1^e - \frac{x^4}{4}\Big|_1^e = \frac{e^2}{2}\ln e - \frac{1}{2}\ln 1 - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}$.

Пример 2

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,cosx\,dx = \left\{ \begin{matrix} u = x \\ dv = cosx\,dx \end{matrix} \middle| \begin{matrix} du = dx \\ v = sinx \end{matrix} \right\} = \text{x sin x} \left|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} sinxdx \right. = \text{x sin x} \left|_0^{\frac{\pi}{2}} + \text{cos x}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} sin\frac{\pi}{2} - 0 + cos\frac{\pi}{2} - cos0 = \frac{\pi}{2} - 1;$$

Задания для решения

8.1. $\int_{12}^{\frac{25}{}} \sqrt{25-2x}dx$

8.2. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}}$

8.3. $\int_0^1 \frac{xdx}{(1+x^2)}$

8.4. $\int_1^{\ell 3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ell nx}}$

8.5. $\int_0^{\frac{\Pi}{3}} \frac{\sec^2 2x}{\sqrt[3]{tg^2 2x}}$

8.6. $\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^3+3x+1}dx$

8.7. $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{arctg\sqrt{3x}}{1+3x^2}dx$

8.8. $\int_0^1 \frac{z^3dz}{z^8+1}$

8.9. $\int_0^1 \frac{y^2dy}{\sqrt{4-y^6}}$

8.10. $\int_0^{\frac{\Pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\sqrt[3]{\sin 3x}}dx$

8.11. $\int_0^1 xe^{-x}dx$

8.12. $\int_0^{\frac{\Pi}{2}} x\cos xdx$

8.13. $\int_1^e x\ell nxdx$

8.14. $\int_0^1 arctgxdx$

8.15. $\int_0^1 \ell n(2x+1)dx$

8.16. $\int_0^{1/2} xarctg2xdx$

8.17. $\int_3^{29} \frac{(x-2)^{2/3}}{(x-3)^{2/3}+3}dx$

8.18. $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+x}$

8.19 $\int_0^{\ell n2} \sqrt{e^{2x}-1dx}$

8.20. $\int_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$

8.21. $\int_0^2 \sin^3 xdx$

8.22. $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$

8.23. $\int_0^3 x\sqrt{9^2-x^2}dx$

8.24. $\int_2^3 \frac{2x^4-5x^2+3}{x^2-1}dx$

8.25. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$

8.26. $\int_0^{\frac{\Pi}{2}} \sin^4 x \cos^2 x dx$

8.27. $\int_0^{\frac{\Pi}{2}} \cos^3 x dx$

8.28. $\int_0^{\sqrt{5}} x\sqrt{x^2+4}dx$

8.29. $\int_{-1}^4 \frac{xdx}{\sqrt{x+5}}$

8.30. $\int_1^e \frac{\sqrt{1+\ell nx}}{x}dx$

8.31. $\int_0^{\frac{\Pi}{4}} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$

8.32. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$

8.33. $\int_0^{\frac{\Pi}{3}} \cos^3 x \sin 2x dx$

8.34. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+x}$

8.35. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

8.36. $\int_0^1 \frac{xdx}{x^2+3x+2}$

8.37. $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$

8.38. $\int_0^{\Pi} x^3 \sin x dx$

8.39. $\int_{-1}^1 \frac{y^5 dy}{y+2}$

8.40. $\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2 dx}$

8.41. $\int_1^e \sin \ell nx dx$

8.42. $\int_{\frac{\Pi}{4}}^{\frac{\Pi}{3}} \frac{\sin^3 \varphi dy}{\sqrt{\cos^5 \varphi}}$

8.43. $\int_1^e \sqrt{x\ell nx dx}$

8.44. $\int_1^e (1+\ell nx)^2 dx$

8.45. $\int_0^3 xarctgx dx$

8.46. $\int_0^{\Pi} (\frac{\Pi}{4}-\frac{x}{2})osxdx$

6.6. Вычисление площади плоской фигуры

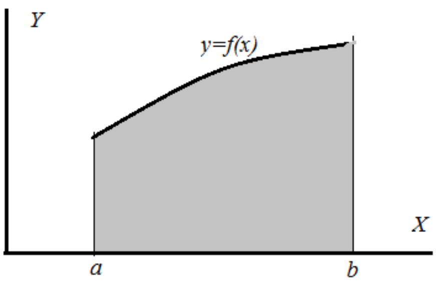


Рисунок 1

1) Если на отрезке [a,b] функция f(x) ≥ 0, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой y= f(x), осью Ox и прямыми x=a и x=b (рис. 1), равна: $S = \int_a^b f(x)dx$

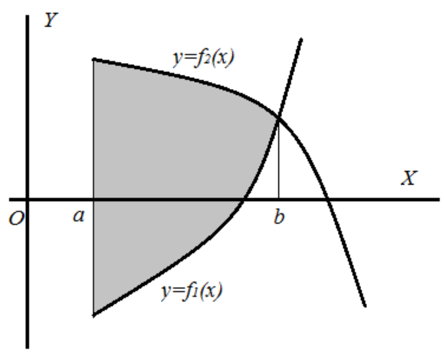


Рисунок 2

2) Если f(x)≤ 0 на отрезке [a,b], то $\int_a^b f(x)dx \leq 0$, тогда площадь соответствующей криволинейной трапеции $S = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$. Если f2(x) ≤f1(x) при x∈[a,b], то площадь фигуры (рис.2), ограниченной кривыми y=f1(x); y=f2(x) и прямыми x=a и x=b, находится по формуле: $S = \int_a^b f_2(\mathrm{x}) - f_1(\mathrm{x})dx$

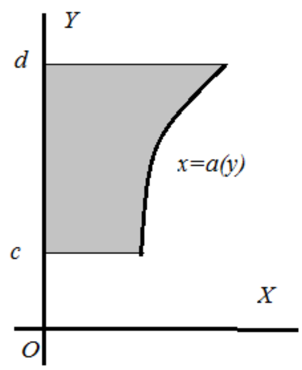


Рисунок 3

3) Если криволинейная трапеция прилежит к оси OY (рис.3) и ограничена линиями x= α(y) осью OY y=c и y=d, то площадь криволинейной трапеции $S = \int_c^d \alpha(\mathrm{y})dy$

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями y=x2–3x и y=x.

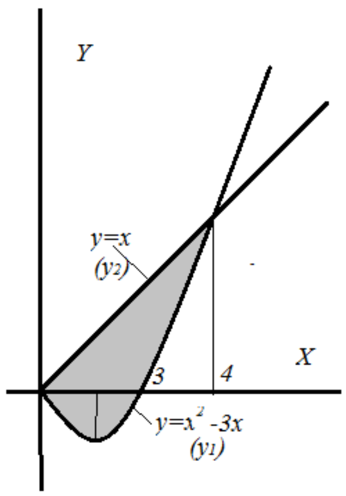


Рисунок 4

Решение. Решая совместно уравнения, находим точки пересечения параболы и прямой:

$\begin{cases} y = x^2 - 3x \\ y = x \end{cases} \Big| \Rightarrow x^2 - 3x = x \Rightarrow x^2 - 4x = 0$

⇒x(x-4)=0⇒x1=0; x2=4. Поскольку на [0,4] y2(x)≥y1(x), то площадь фигуры найдем по формуле:

$S = \int_a^b y_2(\mathrm{x}) - y_1(\mathrm{x})dx = \int_0^4 \mathrm{x} - (\mathrm{x}^2 - 3x))dx =$

$\int_0^4 (4\mathrm{x} - \mathrm{x}^2)\,dx = 4\,\frac{\mathrm{x}^2}{2}\Big|_0^4 - \frac{\mathrm{x}^3}{3}\Big|_0^4$ = 2*16-64/3= 32-64/3 = 32/3 (ед2).

Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной первой аркой циклоиды x=2(t-sin t), y=2(1-cos t) 0≤t≤2π и осью Ox.

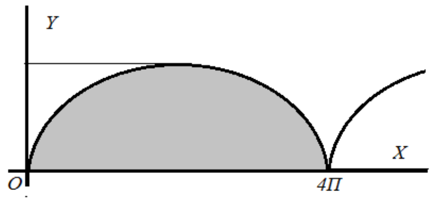


Рисунок 5

Решение. $\int_0^{2\pi} 2\,(1-\cos t)2(1-\cos t)dt =$
$= 4\int_0^{2\pi}(1- \ \cos t^2)dt$ $\quad =4\int_0^{2\pi}(1- \ 2\cos t \ +$
$+ \ \frac{1(\cos t^2)}{2}\,dt$= 4(t-2sin t +1/2t + ¼ sin2t) $\Big|_0^{2\pi}$ =
=12π (ед2)

6.7. Длина дуги кривой

Если плоская кривая задана уравнением y=f(x), то ее дуги от точки A с абсциссой **a** до точки **b** с абсциссой b (a<b) вычисляются по формуле:

$$L = \int_a^b \sqrt{(1+f(x))^2}\ dx \ (1)$$

Пример. Найти длину дуги кривой y=x $\sqrt{x}$, отсеченной прямой y=$\sqrt{5}$ x

Решение

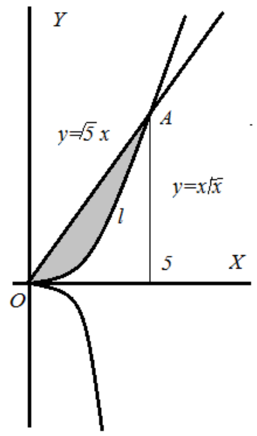


Рисунок 6

Решая совместно, получим $\begin{cases} y = x\sqrt{x} \\ y = \sqrt{5}\,x \end{cases}$ и

x1=0, x2=5

Применяем формулу (1)

$y = x\sqrt{x}\ y' \ = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow L = \int_0^5 \sqrt{\left(1+\frac{9}{4}x\right)}\ dx$

$=\frac{1}{2}\int_0^5 \sqrt{(4+9x)}\ dx = \frac{1}{2}\frac{1}{9}\frac{(4+9x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^5=$

$= \frac{1}{27}\sqrt{(4+9x)^3}\ \Big|_0^5 = \ \frac{1}{27}(7^3-2^3) = \frac{335}{27}$

6.8. Объем тела вращения

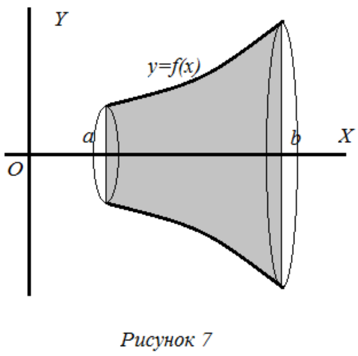


Рисунок 7

Если тело образовано вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, которая ограничена кривой y=f(x), прямыми линиями x=a, x=b (a<b) и осью Ox (рис. 8.1), то его объем определяется по формуле:

$$V_{Ox} = \int_a^b (f(x))^2\,dx$$

Если тело образовано вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции которая ограничена кривой x =φ(y), прямыми линиями y=c, y=d (c<d) и осью Oy (рис. 8.2) то его объем определяется по формуле:

$$V_{Oy} = \pi \int_c^d (\alpha(x))^2\, dy$$

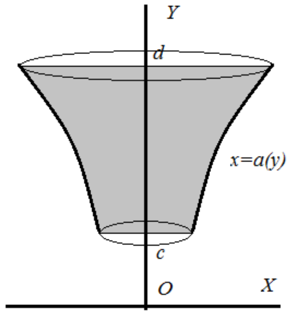


Рисунок 8

Пример 1. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями y=4x-x2 и y=0.

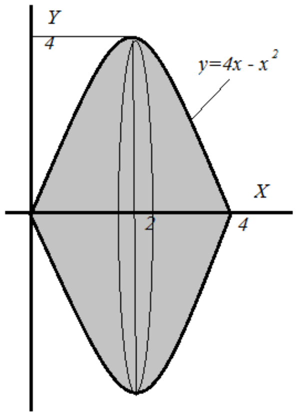


Рисунок 9

Решение:

$V_{Ox} = \pi \int_0^4 (4x - x^2)^2\, dx = \pi \int_0^4 (16x^2 - 8x^3 + x^4)dx$
$= \pi\left(\frac{16}{3}4^3 - 2 * 4^4 + \frac{1}{5}4^5\right) = \pi 4^3\left(\frac{16}{3} - 8 + \frac{16}{5}\right) =$
512/12π (ед3)

Пример 2. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями xy=2; y=1; y=3; x=0

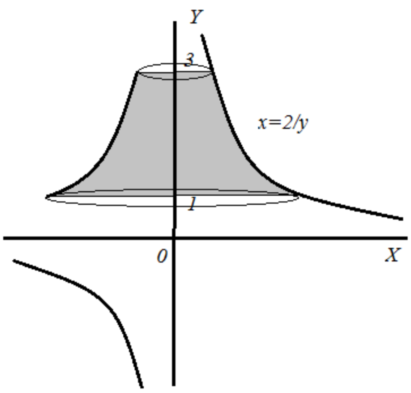


Рисунок 10

Решение:

x y=2 ⟹x=2/y – гипербола

$V_{Oy} = \pi \int_1^3 \frac{4}{y^2}\, dy = 4\pi\int_1^3 y^{-2}\, dy = 4\pi(-1/y)\Big|_1^3 =$
$4\pi\left(-\frac{1}{3} + 1\right) = \frac{8\pi}{3}$ (ед3)

Пример 3. Найти объем тел, образованных вращением фигуры, ограниченной линиями y=x2 ; x+y=2; y=0 (в четверти) 1) вокруг оси Ox 2) вокруг оси Oy

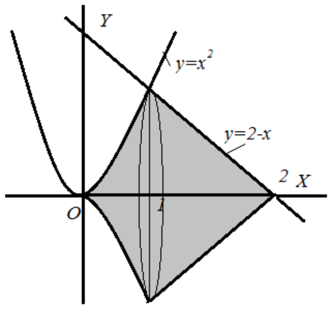


Рисунок 11

Решение:

Объем тела, образованного вращением фигуры вокруг оси Ох найдем как сумму объемов двух тел, одно из которых образовано вращением фигуры y=x2, x=1, y=0, а второе y=2-x, x=1 y=0 (в 1-й четверти) 1) вокруг оси Ох 2) вокруг оси Оу

$V_{Ox} = V_1 + V_2 = \pi\int_0^1 x^4\,dx + \pi\int_0^2 (2-x)^2\,dx = \frac{\pi\,x^4}{5}\Big|_0^1 + \pi\ (4x- \frac{x^2}{2} + 4\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3})\ \Big|_1^2$
$= \pi\frac{1}{5} + \pi\left(8-4-8+2+\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{5}\pi$ ед3

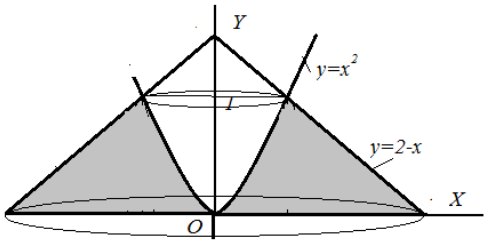


Рисунок 12

Объем тела, образованного вращением той же фигуры вокруг оси Оу, найдем как разность объемов двух тел, из которых большее образовано вращением фигуры x+y=2; x=0, y=0, y=1, а меньшее y=x2, x=0, y=1.

$V_{Oy} = V_1 - V_2 = \pi\int_0^1 (2-y)^2\,dx\ -\ \pi\int_0^2 (\sqrt{y})^2\,dy\ =\ \pi(4y - \frac{4\,y^2}{2} + \frac{x^3}{3} -\ \pi(\frac{y^2}{2})\ \Big|_0^1$
$= \pi\left(8-2+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{6}\pi$ ед3.

Задания для решения

Найти площади фигур, ограниченных линиями:

9.1. $y = 16 - x^2$, $y = 0$	9.2. $y = x^2$, $y = 4$
9.3. $y= x^2$, $y = \sqrt{x}$	9.4. $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$
9.5. $y = x^3$, $x+1 = 1$, $x=0$	9.6. $y = \sqrt{x}$, $y = 1/x$, $x=9$
9.7. $y = 2-x^2$, $y = x^2$	9.8. $y = 4x - x^2$, $y = 0$
9.9. $y = e^x$, $y = 1 -x$, $y=0$, $x=-3$	9.10. $xy=1$, $y = x^2$, $y=4$
9.11. $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$	9.12. $y = \cos x$, $x =0$, $y=0$
9.13. $y = x^2 +2x$, $y = x+2$	9.14. $y = e^{2x}$, $y= e^x$, $x=e$
9.15. $y= \frac{1}{x}$, $y = -\sqrt{x}$, $x=4$	9.16. $y = \frac{1}{x^2}$, $y=x$, $x=2$
9.17. $y = e^2$, $y = e^{-x}$, $y =e$	9.18. $y = x^2$, $y = \frac{x^3}{3}$
9.19. $y = \sin x$, $y=0$, $(0\le x \le П)$	9.20. $y^2 = 2x+1$, $x-y-1 =0$

Найти длину дуги кривой

9.21. y = $x^{\frac{3}{2}}, 0 \le x \le 4$; 9.22. y = $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ от x = 0 до x = $\ell n3$;

9.23. $y = x\sqrt{x}$, отсеченной прямой $y = \sqrt{5}x$;

9.24. $y^2 = (x+2)^3$, отсеченной осью оу;

9.25. $y^2 = 2(x-4)$, отсеченной прямой x = 3y (принять y за независимую переменную);

9.26. $y = \dfrac{x^2}{2} - 1$, отсеченной осью ох;

9.27. $y^2 = 4x$ между прямыми y = x и y = $\dfrac{2}{3}x$;

9.28. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ между точками (1;0) и ($\dfrac{1}{\sqrt{8}}; \dfrac{1}{\sqrt{8}}$).

Найти объемы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной заданными линиями:

а) относительно оси Ox

9.29. y = – x, xy = -4, y = 0, x = -3;

9.30. $y = 4x + x^2$, y = $\dfrac{x}{2}$;

9.31. $y = 3x - x^2$, x + y – 3 = 0;

9.32. y = ℓnx, y = $\ell n(-x)$, y = 0, y = 1;

9.33. $y = e^{2x}$, $y = e^x$, x = 2;

9.34. y = ℓnx, x = 3 ℓnx, x = e;

9.35. $y = \sin x, y = \cos x, x = 0, 0 \le x \le \dfrac{\Pi}{4}$;

б) относительно оси Oy

9.36. y = ℓn, $y = 1 - \dfrac{1}{e}(x - e)$, y = 0;

9.37. y= x-1, y =0, $y = -e^x$, x = -1;

9.38. xy = 3, x + y = 4;

9.39. xy = 4, y = 1, y = 4, x =0;

9.40. $y = \dfrac{1}{x^2}$, y = x , x = 0.

6.9. Несобственные интегралы

Несобственные интегралы с бесконечными пределами (1-го порядка)

Пусть функция f(x) определена и непрерывна при всех a $\leq x \leq \infty$. Рассмотрим $\int_a^b f(x)$. Он имеет смысл при любом b>a. При изменении b он является функцией от b. Пусть b $\to +\infty$

Если существует конечный предел $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)$, то этот предел называют несобственным интегралом от функции f(x) на [a, +œ] и обозначают

$\int_a^\infty f(x)\,dx$, так что $\int_a^\infty f(x)\ dx\ =\ \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx.$

В этом случае говорят, что несобственный интеграл $\int_a^\infty f(x)\,dx$ существует или сходится. Если же $\int_a^b f(x)\,dx$ при b $\to+\infty$ не имеет конечного предела, то говорят, что несобственный интеграл $\int_a^\infty f(x)\,dx$ не существует или расходится. Аналогично определяются и следующие интегралы:

$$\int_{-\infty}^b f(x)\ dx\ =\ \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\ dx\ =\ \int_{-\infty}^c f(x)\ dx\ +\ \int_C^{+\infty} f(x)\ dx\ ,$$

где c – любое число. Если пределы в правой части этих формул существуют и конечные, то несобственные интегралы – сходящиеся, в противном случае – расходящиеся.

Пример 1. $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^2}\ = \lim_{b\to\infty} \int_3^b (x-1)^{-2}\ =\ \lim_{b\to\infty} (\frac{1}{x-1})\Big|_3^b\ =$

$$-\lim_{b\to\infty} \frac{1}{b-1} + \frac{\lim 1}{3-1} =\ 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Интеграл сходится.

Пример 2. $\int_1^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^2+1}\ = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{x\,dx}{x^2+1}\ =\ \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2}\ln|x^2+1|\,\Big|_1^b\ =$

$$= \frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} \ln|b^2+1| - \frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} ln2 =\ \infty - \frac{1}{2} ln2 = \infty -$$

Интеграл расходится.

Пример 3. $\int_\pi^\infty \cos 3x\,dx\ = \lim_{b\to\infty} \int_\pi^b \cos 3x\,dx\ =\ \lim_{b\to\infty} \frac{1}{3} \sin 3x\,\Big|_\pi^b\ =$ $\frac{1}{3}\ \lim_{b\to\infty} \sin 3b - \frac{1}{3} \lim_{b\to\infty}\ \sin 3\pi = 0$

Интеграл расходится, т.к. $\lim\limits_{b\to\infty} sin3b$ не существует.

Пример 4. $\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{\sqrt{(1-3x)^3}} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^{-1}(1-3x)^{-\frac{3}{2}}dx = \lim_{a\to-\infty}\frac{(1-3x)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\Big|_a^{-1}$

$$-2\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{(1-3x)^3}}\Big|_a^{-1} = -2\left(\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{4}} - \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1-3a}}\right) = -2(1/2-0) = -1$$

Интеграл сходится.

Пример 5. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{1+x^2} =$

$= \lim_{a\to-\infty} arctg\, x\,\Big|_a^0 + \lim_{b\to+\infty} arctg\, x\,\Big|_0^b == \lim_{a\to-\infty} arctg\, 0 -$

$-\lim_{a\to-\infty} arctg\, a + \lim_{b\to+\infty} arctg\, b - \lim_{b\to+\infty} arctg\, 0 = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} =$
π интеграл сходится.

Несобственные интегралы от неограниченных функций (2-го порядка)

Пусть функция f(x) определена и непрерывна при всех $a \le x < c$, а при $x=c$ функция терпит бесконечный разрыв. В этом случае нельзя говорить об интеграле $\int_A^C f(x)dx$ как о пределе интегральных сумм, т.к. этот предел может и не существовать. Интеграл $\int_A^C f(x)dx$ от функции f(x), разрывной точки C, определяется следующим образом:

$$\int_A^C f(x)dx = \lim_{b\to C-0}\int_a^b f(x)dx$$

Если предел в правой части равенства существует, то $\int_A^C f(x)dx$ называется **несобственным сходящимся интегралом**, в противном случае интеграл называется **расходящимся**.

Если функция f(x) имеет разрыв в левой точке отрезка [c,b], то

$$\int_c^b f(x)dx = \lim_{b\to C+0}\int_a^b f(x)dx$$

Если f(x) имеет разрыв во внутренней точке отрезка [a,b], то полагают:
$\int_a^b f(x)dx = \int_A^C f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, если оба интеграла в правой части существуют.

Пример 1. $\int_a^b\frac{dx}{\sqrt{(1-x)^2}} = \lim_{b\to1-0}\int_0^b\frac{dx}{\sqrt{(1-x)^2}} = \lim_{b\to1-0} arcsin\, x\,\Big|_0^b =$

$\lim_{b\to1-0} arcsin\, b - \lim_{b\to1-0} arcsin\, 0 = \arcsin 1 - 0 = \frac{\pi}{2}$, интеграл сходится.

Пример 2. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{lnx}} = \lim\limits_{a\to 1+0} \int_a^e \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{lnx}}dx = \lim\limits_{a\to 1+0} 2\sqrt{lnx}\,\Big|_a^e =$

$$2\lim_{a\to 1+0}\sqrt{lne} - 2\lim_{a\to 1+0}\sqrt{lna} = 2*1-2*0=2$$

интеграл сходится.

Пример 3. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^4} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^4} + \int_0^1 \frac{dx}{x^4} = \lim\limits_{b\to 0-0} \int_{-1}^b \frac{dx}{x^4} + \lim\limits_{b\to 0-0} \int_a^1 \frac{dx}{x^4} =$

$$= \lim_{b\to 0-0}\left(-\frac{1}{3x^3}\right)\Big|_{-1}^{e} + \lim_{a\to 0+0}\left(-\frac{1}{3x^3}\right)\Big|_a^1 = \frac{1}{3}\lim_{b\to 0-0}\frac{1}{b^3} + \frac{1}{3}\lim_{b\to 0}\frac{1}{(-1)^3} -$$

$-\frac{1}{3}\lim\limits_{a\to 0+0}\frac{1}{1^3} + \frac{1}{3}\lim\limits_{a\to 0+0}\frac{1}{a^3} = +\infty - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \infty = \infty$, интеграл расходится.

Задания для решения

10.1. $\int\limits_0^\infty e^{-x}dx$

10.2. $\int\limits_0^\infty xe^{-x^2}dx$

10.3. $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$

10.4. $\int\limits_2^\infty \frac{\ell nx}{x}dx$

10.5. $\int\limits_e^\infty \frac{dx}{x\ell n^2 x}$

10.6. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2xdx}{x^2+1}$

10.7. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$

10.8. $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^4}$

10.9. $\int\limits_1^\infty \frac{1+\ell nx}{x}$

10.10. $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ell nx}}$

10.11. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

10.12. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ell nx}}$

10.13. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\ell nx}$

10.14. $\int\limits_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$

10.15. $\int\limits_0^1 \ell nxdx$

10.16. $\int\limits_{-2}^2 \frac{xdx}{x^2-1}$

10.17. $\int\limits_0^{\frac{\Pi}{4}} ctgxdx$

10.18. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\ell n^3 x}$

10.19. $\int\limits_0^2 \frac{xdx}{(x^2-1)^{\frac{4}{5}}}$

10.20. $\int\limits_0^1 \frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^5}}$

10.21. $\int_0^{\infty} \cos x dx$

10.22. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+13}}$

10.23. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

10.24. $\int_0^{\infty} xe^{-x}dx$

6.10. Применение определенного интеграла в экономике

Пример 1. Определить объем продукции, произведенной рабочим за третий час рабочего дня, если производительность труда характеризуется функцией

f(t) = 3/(3t +1) + 4.

Решение. Если непрерывная функция f(t) характеризует производительность труда рабочего в зависимости от времени t, то объем продукции, произведенной рабочим за промежуток времени от t_1 до t_2, будет выражаться формулой

$V = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$, $V = \int_2^3 (\frac{3}{3t+1}+4)dt = (\ln(3t+1)+4t)\Big|_2^3$ = ln 10 + 12 – ln 7 – 8 = ln 10/7 + 4.

Пример 2. Определить запас товаров в магазине, образуемый за три дня, если поступление товаров характеризуется функцией f(t) = 2t + 5.

Решение. $V = \int_0^3 (2t+5)dt = (\frac{2t^2}{2}+5t)\Big|_0^3 = 9+15=24$.

Пример 3. Пусть сила роста (см.6.1) описывается некоторой непрерывной функцией времени $\delta_t = f(t)$, тогда наращенная сумма находится как

$S = P \exp \int_0^n \delta_t dt$, а современная величина платежа $P = S \exp(-\int_0^n \delta_t dt)$.

Если, в частности, δ_t является линейной функцией времени: $\delta_t = \delta_o + at$, где δ_o – величина силы роста для t = 0, *a* – годовой прирост, то

$\int_0^n \delta_t dt = \int_0^n (\delta_o + at)dt = \delta_o n + an^2/2$;

множитель наращения $\exp(\delta_o n + an^2/2)$. Если сила роста изменяется по геометрической прогрессии $\delta_t = \delta_o a^t$, где δ_o – начальное значение процентной ставки, а – годовой коэффициент роста, тогда

$$\int_0^n \delta_t\, dt = \int_0^n \delta_o a^t\, dt = \delta_o a^t/\ln a \Big|_0^n = \delta_o(a^n - 1)/\ln a;$$

множитель наращения $\exp(\delta_o(a^n - 1) / \ln a)$. Предположим, что начальный уровень силы роста равен 8%, процентная ставка ежегодно увеличивается на 20% (а=1,2), срок ссуды 5 лет. Множитель наращения в этом случае составит

$$\exp (0{,}08\, (1{,}2^5 - 1) / \ln 1{,}2) \approx \exp 0{,}653953 \approx 1{,}921397.$$

Пример 4. Выше при анализе непрерывных потоков платежей предполагалось, что годовая сумма ренты R равномерно распределяется на протяжении года. На практике, особенно в инвестиционных процессах, этот поток может существенно изменяться во времени, следуя какому-либо закону. Если этот поток непрерывен и описывается некоторой функцией $R_t = f(t)$, то общая сумма поступлений за время *n* равна $\int_0^n f(t)dt$. В этом случае наращенная по непрерывной ставке за период от 0 до *n* сумма составит: $S = \int_0^n f(t)e^{\delta(n-t)}dt$.

Современная величина такого потока равна $A = \int_0^n f(t)e^{-\delta t}dt$.

Пусть функция потока платежей является линейной: $R_t = R_o + at$, где R_o – начальная величина платежа, выплачиваемого за единицу времени, в которой измеряется срок ренты. Вычислим современную величину А, пользуясь правилами интегрирования определенного интеграла:

$$A = \int_0^n (R_0 + at)\, e^{-\delta t}dt = \int_0^n R_0\, e^{-\delta t}dt + \int_0^n at\, e^{-\delta t}dt.$$

Обозначим $A_1 = \int_0^n R_0\, e^{-\delta t}dt$, $A_2 = \int_0^n at\, e^{-\delta t}dt$. Имеем: $A_1 = R_0\int_0^n e^{-\delta t}dt = -R_o/\delta\; e^{-\delta t}\Big|_0^n = -R_o/\delta(e^{-\delta n} - e^o) = -R_o/\delta(e^{-\delta n} - 1) = R_o(e^{-\delta n} - 1)/\delta$. $A_2 = a\int_0^n t\, e^{-\delta t}dt$.

Вычислим неопределенный интеграл $\int t e^{-\delta t}dt$ по частям: $u = t$, $dv = e^{-\delta t}dt$ $\Rightarrow du = dt$, $v = \int e^{-\delta t}dt = - e^{-\delta t}/\delta$, тогда $\int t e^{-\delta t}dt = - t e^{-\delta t}/\delta + 1/\delta \int e^{-\delta t}dt = - t e^{-\delta t}/\delta (t+1/\delta) +C$.

Следовательно, $A_2 = -a\, t e^{-\delta t}/\delta\, (t+1/\delta)\Big|_0^n = ((1- e^{-\delta n})/\delta - n e^{-\delta n})a/\delta$.

Итак, исходный интеграл

$A = A_1 + A_2 = R_o(e^{-\delta n}-1)/\delta + ((1- e^{-\delta n})/\delta - n e^{-\delta n})a/\delta$.

Часть 3. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§7 Функции нескольких переменных

7.1. Определение и способы задания функции нескольких переменных

Определение. Если каждой паре (x,y) значений двух независимых друг от друга переменных величин x и y из некоторой области их изменения D соответствует определенное значение величины Z, то Z есть функция двух независимых переменных от x и y определенная в области D, символически: **Z = f (x,y)**

Функции двух переменных, как и функции одной переменной, могут быть заданы таблицей, аналитически (формулой) и графиком.

Табличное задание состоит в том, что для некоторого количества пар значений независимых переменных указывается соответствующее им значение функции. Например, можно составить таблицу для площади прямоугольника S= X Y:

Y/X	1	1,5	2	2,5
1	1	1,5	2	2,5
2	2	3	4	5

Аналитическое задание функций означает, что дается формула, при помощи которой по данным значениям независимых переменных отыскивается значение функций Z= 3x2+5y-2; $Z = \frac{arsin\, xy}{\sqrt{1-x^2y^2}}$ и т.д. Как и в случае одного независимого переменного, функция двух переменных существует, вообще говоря, не при любых значениях x и y.

Определение. Совокупность пар (x,y) значений x и y, при которых функция Z =f(x,y) определена, называется *областью определения* или *областью существования этой функции*. Область определения наглядно иллюстрируется геометрически. Если каждую пару значений x и y изображать точкой M(x,y)плоскости Oxy, то область определения функции изобразится в виде совокупности точек на плоскости. В частности, областью определения может быть и вся плоскость.

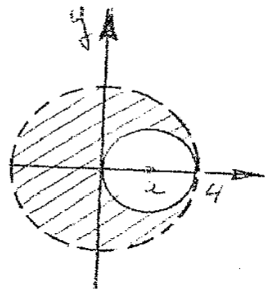
Пример. Найти область определения функции

$$Z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4x} - \frac{1}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x \geq 0 \\ 16 - x^2 - y^2 > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2 * 2 * x + 4 - 4 + y^2 \geq 0 \\ 16 > x^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + y^2 \geq 2^2 (1) \\ x^2 + y^2 < 4\ (2) \end{cases}$$

Ограничению (1) соответствует область вне круга с центром в точке (2;0) и радиусом R=2; ограничению (2) круг с центром в начале координат и радиусом R=4; их пересечение дает область, изображенную на рисунке.



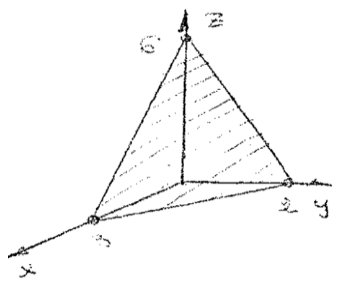
<u>Графическое задание</u> функции двух переменных состоит в задании графика этой функции. Рассмотрим функцию Z =f(x,y), определенную в области D плоскости Oxyz. В каждой точке (x,y) восстановим перпендикуляр к плоскости Oxy и на нем отложим отрезок, равный Z =f(x,y). Получим в пространстве точку P с координатами x,y,z.

Геометрическое место точек P, координаты которых удовлетворяют уравнению Z = f (x,y), есть поверхность, которая и является графиком функции двух переменных. Эта поверхность проектируется на плоскость Oxy в область определения функции.

Примеры. 1. Ax+By+Cz+D=0 – плоскость, в частности, 2x+3y+z-C=0 плоскость, отсекающая на координатных осях Ox, Oy, Oz отрезки 3,2,6

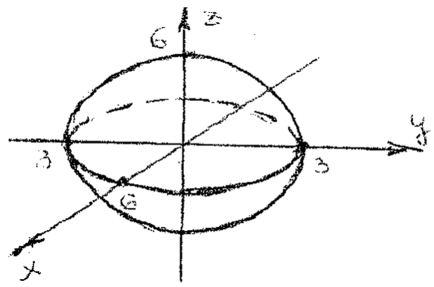
$$2. \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36}$$

Эллипсоид с полуосями a=6; b=3; c=6



$3.\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1;\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

$$y^2 = 2\rho x$$



- соответственно, эллиптический, гиперболический и параболический цилиндры.

Определение: Величина U называется функцией переменных величин x,y,z,…t, если каждой рассматриваемой совокупности этих величин соответствует одно или несколько определенных значений величины U.

Так же как и для функции двух переменных, можно говорить об области определения функции трех, четырех и более переменных. Функцию трех и более переменных изобразить с помощью графика в пространстве невозможно. Запись F(x,y,z,…t,u)=0 означает в общем виде наличие функциональной связи между величинами x,y,z,…t.

7.2. Частные производные функции нескольких переменных

Определение: Частной переменной по x от функции Z=f(x,y) называется предел отношения частного приращения по x: $\Delta x\, Z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$

к приращению Δx при стремлении Δx к нулю обозначается

Z’x; f’x(x,y) $\frac{\partial Z}{\exists x}$ так что $\frac{\partial Z}{\exists x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x Z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{f(x+}\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$

<u>Аналогично частной производной по y</u> от функции Z=f(x,y) называется предел отношения частного приращения по y

$$\Delta y Z = f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

к приращению по y стремлении Δy к нулю; обозначается

Z’y; f’y(x,y) $\frac{\partial Z}{\exists y}$ так что $\frac{\partial Z}{\exists x} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x Z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\mathrm{f(x,y+}\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$

Частные производные можно определить так: частной производной по x от функции Z=f(x,y) называется производная по x, выраженная в предположении что y – постоянная. Частной производной по y от функции Z=f(x,y) называется производная по y, вычисленная в предположении что x – постоянная.

Поэтому правила вычисления частных производных совпадают с правилами дифференцирования, функций одной переменной, только надо каждый раз помнить, по какой переменной ищется производная.

Пример 1. Z= arc sin x/y

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\frac{1}{y}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}, \frac{\partial Z}{\partial y} == \frac{-\frac{x}{y^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}} = -\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}.$$

Пример 2. $Z = xy2^{\sin(xy)}$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = y(2^{\sin(xy)} + x2^{\sin(xy)}\, ln2 \cos(xy)\, y) = (2^{\sin(xy)}y(1 + xycos(xy)ln2),$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = x(2^{\sin(xy)} + y2^{\sin(xy)}\, ln2 \cos(xy)\, x) = (2^{\sin(xy)}x(1 + xy\, cos(xy)ln2).$$

Аналогично определяются частные производные функций любого числа переменных.

Пример 3. U=2x^3-3y^2+sinz^2 , $\frac{\partial U}{\partial x} = 6x^2$ $\frac{\partial U}{\partial y} = -6y, \frac{\partial U}{\partial Z} = 2Z\, cosz^2$.

7.3. Дифференцирование функции нескольких переменных

Полное приращение функции Z=f(x,y) равно:

$$\Delta\, Z = f(x + \Delta xy + \Delta y) - f(x, y)$$

Оно может быть представлено в виде:

$$\Delta\, Z = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y + p_1\Delta x + p_2\Delta y,$$

где p_1 и p_2– бесконечно малые величины по $\Delta x, \Delta y$

Определение: **Полным дифференциалом функции** двух переменных называется главная часть полного приращения функции, линейная относительно приращений независимых переменных по $\Delta x, \Delta y$.

Обозначается dZ или df так что dz=f’x (x,y) Δx+ f’y (x,y) Δy.

Тогда ΔZ= dz+$p_1\Delta x$ + $p_2\Delta y$ и с точностью до бесконечно малых высшего порядка ΔZ≈dz. Приращения Δx и Δy независимых переменных называются дифференциалами независимых переменных и обозначаются Δx= dx; Δy= dy; $dz = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy,$

т.е. полный дифференциал равен сумме произведений частных производных на дифференциалы соответствующих независимых переменных.

Определение: Частным дифференциалом по x функции Z=f(x,y) называется главная часть частного приращения ΔxZ=f(x+ Δx,y)- f(x,y), пропорциональная приращению x независимой переменной x.

$\Delta x\, Z = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \Delta xp$, следовательно,

$$dx\,Z = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx$$

Аналогично, $dZ = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$.

Частный дифференциал функции двух независимых переменных равен произведению соответствующей частной производной на дифференциал этой производной.

На основании рассмотренного выше заключаем, что полный дифференциал функции равен сумме ее частных дифференциалов.

Если U=f(x,y,z….t), то частичные и полный дифференциалы определяются соответственно аналогично:

$$d\,U = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz \ldots + \frac{\partial U}{\partial t}dt = dxU + dyU + dzU + \cdots dtU$$

Пример: Найти полный дифференциал функции Z=y2 ln 2x

1) Находим частные производные функций;

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{y^2}{x};\ \frac{\partial Z}{\partial y} = 2yln2x$$

2) Составляем частные дифференциалы;

$$\mathrm{dxZ} = \frac{y^2}{x}dx;\ dyZ = 2yln2x\ dy$$

3) Полный дифференциал найдем как сумму частных дифференциалов

$$\mathrm{dZ} = \frac{y^2}{x}dx + 2y\ ln2x\ dy$$

Применение полного дифференциала в приближенных вычислениях

Мы имеем приближенную формулу ΔZ≈dz

ΔZ=f(x+ Δx,y+ Δy)- f(x,y), $d\,Z = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y$,

так что f(x+ Δx,y+ Δy) ≈f(x,y)+ $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y$;

Пример: Вычислить приближенно 1,023,01

Рассмотрим функцию Z=xy

Искомое число можно считать наращенным значением этой функции при x0=1; y0=3; Δx=0,02, Δy=0,01, f(x_0, y_0)=13=1;

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\,x^{y-1};\ \frac{\partial f}{\partial x}\Big|\begin{matrix} x = 1 \\ y = 3 \end{matrix} = 3 * 1^2 = 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \ x^y \ln x;\ \frac{\partial f}{\partial y}\Big|\begin{matrix} x = 1 \\ y = 3 \end{matrix} = 3 * ln1 = 0$$

1,023,01≈1=3*0,02+0,0,01=1,06.

7.4. Производная сложнозаданной функции. Полная производная

Пусть в уравнении Z=f(u,v) переменные u, v являются функциями независимых переменных x и y u=φ(x,y), v= φ(x,y), тогда Z есть сложная функция от x и y.

Тогда частные производные функции Z по независимым переменным x и y могут быть найдены по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} * \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial v} * \frac{\partial v}{\partial x};\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} * \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} * \frac{\partial v}{\partial x}$$

т.е. производная сложнозаданной функции по независимой переменной равна сумме произведений частных производных по промежуточным переменным на частичные производные этих переменных по независимой переменной.

Пример. *Z= arctg u/v, где u=x sin y, v=y sin x,*

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\frac{1}{v}}{1 + \frac{u^2}{v^2}} = \frac{V}{u^2 + v^2};\ \frac{\partial u}{\partial x} = \sin y;\ \frac{\partial v}{\partial x} = \mathrm{y}\cos \mathrm{x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{-\frac{u}{v^2}}{1 + \frac{u^2}{v^2}} = -\frac{U}{u^2 + v^2};\ \frac{\partial u}{\partial y} = \mathrm{x}\cos y;\ \frac{\partial v}{\partial x} = \sin \mathrm{x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{V}{u^2 + v^2}\sin y - \frac{U}{u^2 + v^2} y\cos x;\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{V}{u^2 + v^2}\mathrm{x}\cos y - \frac{U}{u^2 + v^2}\sin x$$

Если задана функция Z=F(u,v,s), где U=f(x,y), V=f(x,y) и S=f(x,y), то на случай функции трех и более переменных формулы обобщаются, именно:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} * \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} * \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial s} * \frac{\partial s}{\partial x};\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} * \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} * \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial s} * \frac{\partial s}{\partial y}$$

Если функция Z=f(x,y,u), где y=f(x) и u=φ(x), то z является функцией только одного переменного x и находим:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial z}{\partial u} * \frac{du}{dx}$$

Пример: Z= x/y, $y = \sqrt{x^2 + 1}$ найти $\frac{dz}{dx}$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}}=\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}};\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-x}{y^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}}=\frac{-x}{y\sqrt{y^2-x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\Longrightarrow\ \frac{dz}{dx}=\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}-\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

7.5. Производная от функции, заданной неявно

Пусть уравнение F(x,y,z)=0 определяет функцию Z как некоторую однозначную функцию независимых переменных x и y: Z=φ(x,y). Тогда частные производные Z по x и y определяются формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}};\ \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

Пример:

xsin y +2x e ^{y2} –y^2z^3 = 0 Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$; $\frac{\partial z}{\partial y}$; f(x,y,z) = x sin y+ 2x e ^{y2} –y^2z^3

$\frac{\partial f}{\partial x}=\sin y+2\,e^{yz};\ \frac{\partial f}{\partial y}=\cos y+2xy\,e^{yz}-2\,e^{yz};\ \frac{\partial f}{\partial z}=2xy\,e^{yz}-3\,y^2z^2$,

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\sin y+2\,e^{yz}}{2xy\,e^{yz}-3\,y^2z^2};\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\cos y+2xz\,e^{yz}-2yz^3}{2xy\,e^{yz}-3\,y^2z^2}$.

Задания для решения:

В задачах 11.1-11.16 найти частные производные данных функций по каждой из независимых переменных:

11.1. $z=(3x^2y-2y^3+1)^5$

11.2. $z=ln(x^2-3y^2)$

11.3. $z=\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}$

11.4. $z=x^2\sqrt{y}+\frac{y}{\sqrt{x}}$

11.5. $z=arcctg\,\frac{x}{y}$

11.6. $z=ln(3x+lny)$

11.7. $z=\mathrm{x}^2ln(3x-y^2)$

11.8. $z=e-\frac{x}{y^2}$

11.9. $z = ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$

11.10. $z = lntg\frac{x}{y}$

11.11. $z = sin\frac{x}{y}cos\frac{y}{x}$

11.12. $z = xyln(2x + 3y)$

11.13. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

11.14. $u = x^{\frac{y}{z}}$

11.15. $u = (sinx)^{yz}$

11.16. $u = z^3 ln(e^{3x} + \sqrt{2y})$

Вычислить приближенно:

11.17. $\sqrt{3{,}98} \cdot (1{,}03)^{3{,}98}$

11.18. $\sqrt[5]{(2{,}97)^3 + (2{,}02)^2 + 1}$

11.19. $ln(\sqrt[5]{0{,}98} + \sqrt[4]{1{,}03} - 1)$

11.20. $\frac{2{,}03}{(2{,}03)^4 + (2{,}97)^2}$

11.21. $arctg\ \frac{(1{,}04)^2}{0{,}98}$

11.22. $\sqrt[7]{(3{,}03)^4 + (1{,}98)^5 + 15}$

11.23. $ln((2{,}02)^3 + \sqrt[3]{0{,}98} - 8)$

11.24. $\frac{10}{(4{,}98)^3 - (5{,}03)^2}$

Продифференцировать сложнозаданные функции:

11.25. $u = e^{z-2y}$, где $z = sinx, y = x^3, \frac{du}{dx} =?$

11.26. $y = arcsin\frac{x}{z}$, где $z = \sqrt{x^2 + 1}, \frac{dy}{dx} =?$

11.27. $z = arctg\ (xy)$, где $x = \sqrt{1 - 3y^2}, \frac{dz}{dy} =?$

11.28. $u = sin\frac{x}{y}$, где $x = e^{3t}, y = (2t + 1)^3, \frac{dz}{dy} =?$

11.29. $p = e^{\frac{z}{y}}$, где $y = sin^3 z, \frac{dp}{dz} =?$

11.30. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + zy}$, где $z = tg3x; y = \ ln\ (x^3 + 1), \frac{du}{dx} =?$

11.31. $z = u^{xy}$, где $u = arctg5y,\ x = cos\frac{2}{y}, \frac{dz}{dy} =?$

11.32. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, где $y = sin^2 x$. Найти $\frac{\partial z}{\partial y}$ и $\frac{dz}{dx}$

11.33. $z = x^y$, где $y = lnx$. Найти $\frac{\partial z}{\partial y}$ и $\frac{dz}{dx}$

11.34. $w = u^2 lnv;\ u = \frac{x}{y};\ v = 3x - y^3$. Найти $\frac{\partial w}{\partial x}$ и $\frac{\partial w}{\partial y}$

11.35. $z = ln\ (2x - y^2);\ x = sin\frac{u}{v};\ y = e^{uv^2}$. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$

11.36. $y = artg(uv), u = ln(x^2 + z^2), v = \sqrt{5x - z^3}. \frac{\partial y}{\partial x} = ?\ \frac{\partial y}{\partial z} = ?$

11.37. $s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};\ x = sin\frac{u}{v};\ y = u\sqrt{v};\ z = ctge^{uv}. \frac{\partial s}{\partial u} = ?\ \frac{\partial s}{\partial v} = ?$

11.38. $p = x^2 ln\,(y^2 + z^2);\ x = cos(\mathrm{uv}), y = e^{u^2v^3};\ z = \sqrt{u^2 - 2v}. \frac{\partial p}{\partial u} = ?\ \frac{\partial p}{\partial v} = ?$

11.39. $u = tg\ (lnx + y^3)\ ;\ x = \frac{t}{s};\ y = sin\frac{t}{s}. \frac{\partial u}{\partial t} = ?\ \frac{\partial u}{\partial s} = ?$

11.40. $s = ln(e^x + e^y), x = \sqrt{uz};\ y = tg\frac{u}{z}. \frac{\partial s}{\partial u} = ?\ \frac{\partial s}{\partial z} = ?$

11.41. $u = x^2 cos\frac{y}{z};\ x = ln(2s - 3p);\ y = \sqrt{sp},\ z = p^2 e^{3s}. \frac{\partial u}{\partial s} = ?\ \frac{\partial u}{\partial p} = ?$

11.42. $u = ln\ (p^2 + s^2)\ , p = \sqrt{xyz}\ ;\ s = y^{xz}, \frac{\partial u}{\partial x} = ?\ \frac{\partial u}{\partial p} = ?\ \frac{\partial u}{\partial t} = ?$

11.43. $u = sin\frac{x}{y};\ x = se^{pt};\ y = ln(p^2 - st). \frac{\partial u}{\partial t} = ?\ \frac{\partial u}{\partial p} = ?\ \frac{\partial u}{\partial t} = ?$

11.44. $u = lncos\frac{x}{\sqrt{z}}; x = tvw;\ z = t^2 \cdot 3^{vw}. \frac{\partial u}{\partial t} = ?\ \frac{\partial u}{\partial v} = ?\ \frac{\partial u}{\partial w} = ?$

11.45. $z = \sqrt{u^2 + v^2},\ u = \frac{st}{y};\ v = tarcsin(sy). \frac{\partial z}{\partial t} = ?\ \frac{\partial z}{\partial s} = ?\ \frac{\partial z}{\partial y} = ?$

Продифференцировать функции, заданные неявно:

11.46. $x^2y^3 - x^5 + y^4 = 1$

11.47. $xe^y + ye^x - e^{xy} = 0$

11.48. $xy - lny = a$

11.49. $sin(xy) - e^{xy} - x^2y = 0$

11.50. $x^2y{=}e^y + tgx$

11.51. $x^2e^{2y} = y^2e^{2x}$

11.52. $y^2 = \frac{x+y}{x-y}$

11.53. $x\ sin\ y\ +\ cos\ 2y\ =\ cos\ y$

11.54. $xyz^3 - l\,n\ \ (x^2 - 5y) + \sqrt{yz} + 3 = 0;\ \frac{\partial x}{\partial y} = ?\ \frac{\partial x}{\partial z} = ?$

11.55. $\sqrt{x}sin(yz)\ + y^2e^{5x} + \sqrt{lnz - 3y} + 1 = 0; \frac{\partial y}{\partial x} = ?\ \frac{\partial y}{\partial z} = ?$

11.56. $(y^2 - xz)^5 - z^2 sin3y + e^{xy} - 10 = 0;\ \frac{\partial z}{\partial x} = ?\ \frac{\partial z}{\partial y} = ?$

11.57. $s^2 arctg\frac{u}{v} + (su - v^3)^{10} + y^2 \ln\,(3v - 5s) + 1 = 0;\ \frac{\partial s}{\partial u} = ?\ \frac{\partial s}{\partial v} = ?$

11.58. $u^2e^{sinv} - z^2\sqrt{u} + v^2lnz - 1 = 0\ ; \frac{\partial u}{\partial v} = ?\ \frac{\partial u}{\partial z} = ?$

11.59. $\sqrt{spt} + (p^2 - 3t)^7 + 5^{ps} - 10 = 0;\ \frac{\partial p}{\partial s} = ?\ \frac{\partial p}{\partial t} = ?$

11.60. Доказать, что если $xyz = a^{3}$, то $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = -2z$

7.6. Частные производные и дифференциалы высших порядков

Пусть имеем функцию двух переменных Z=f(x,y). Частные производные Z'x и Z'y, вообще говоря, являются функциями от x и y, поэтому от низ можно снова находить частные производные. Частных производных второго порядка будет четыре, т.к. $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ каждую можно продифференцировать как по x, так и по y. Вторые производные обозначаются так:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \mathrm{f}''_{\mathrm{xx}}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right); \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = \mathrm{f}''_{\mathrm{xy}}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right);$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = \mathrm{f}''_{\mathrm{xy}}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right); \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = \mathrm{f}''_{\mathrm{yy}}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right);$$

Производные 2-го порядка можно снова дифференцировать как по x, так и по y. Производных третьего порядка восемь:

$$\frac{\partial^3 Z}{\partial x^3}; \frac{\partial^3 Z}{\partial x^2 \partial y}; \frac{\partial^3 Z}{\partial x \partial y \partial x}; \frac{\partial^3 Z}{\partial y^2 \partial x}; \frac{\partial^3 Z}{\partial y \partial x \partial y}; \frac{\partial^3 Z}{\partial y^2 \partial y}; \frac{\partial^3 Z}{\partial x^2 \partial y}; \frac{\partial^3 Z}{\partial y^3}$$

Пример 1. Вычислить частные производные второго порядка от функции

$$Z=e^{x}\ln y + \sin y \ln x$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = e^{x}\ln y + \frac{1}{x}\sin y; \ \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{1}{y}e^{x} + \cos y \ln x$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = e^{x}\ \ln y - \frac{1}{x^2}\sin y; \ \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} = \frac{1}{y}e^{x} + \frac{1}{x}\cos y$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{y}e^{x} + \frac{1}{x}\cos y; \ \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = -\frac{1}{y^2}e^{x} - \sin y \ln x;$$

Теорема: Если функция Z=f(x,y) и ее частные производные $\frac{\partial Z}{\partial x}; \frac{\partial Z}{\partial y}; \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}; \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x}$ определены и непрерывны в точке M(x,y) и в некоторой ее окрестности, то в этой точке $\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}; \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x}$

Пример 2. Дана функция z= ln (x+e-y) Показать, что $\frac{\partial Z}{\partial x}\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial y}\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = 0$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{-e^{-y}}{x+e^{-y}}\ ;\ \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x-e^{-y})^2}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{-e^{-y}}{x+e^{-y}};\ \frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y} = \frac{e^{y}}{(x-e^{-y})^2};\ \frac{e^{-y}}{(x-e^{-y})^3} - \frac{e^{-y}}{(x-e^{-y})^3} = 0;$$

Определение. Дифференциалом 2-го порядка от функции Z=f(x,y) называется дифференциал от дифференциала 1-го порядка dz = $\frac{\partial Z}{\partial y}dx + \frac{\partial Z}{\partial y}dy$ обозначается

$$d^2z = d(dz)$$

Как следует из преобразований

$$d^2z = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\partial x^2 + 2\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}\partial x\, dy + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\ \partial y^2$$

Для d^2z существует символическая запись: **условно** выносим за скобку Z, тогда остающееся в скобках выражение **формально** представляет в раскрытом виде квадрат суммы $d^2z = (\frac{\partial}{\partial x}\partial x\ + \frac{\partial}{\partial y}\partial y)\,^2 Z$.

Аналогично можно получить формулу для дифференциала 3-го порядка:

$$d^3z = (\frac{\partial}{\partial x}\partial x\ + \frac{\partial}{\partial y}\partial y)\,^3 Z = \frac{\partial^3 Z}{\partial x^3}\partial x^3 + 3\frac{\partial^3 Z}{\partial x^2\partial y}\partial x^2 dy + 3\frac{\partial^3 Z}{\partial x\,\partial y^2}\ \partial x\,\partial y^2$$

$$+\frac{\partial^3 Z}{\partial y^3}\partial y^3.$$

Задания для решения

Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ данных функций:

12.1. $z = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^3}$

12.2. $z = \frac{x-y}{x+y}$

112.3. $z = ln(x + \sqrt{x^2+y^2})$

12.4. $z = sin^2\ (2x+3y)$

12.5. $z\ =\ arcsin\,(xy)$

12.6. $z = y^{lnx}$

12.7. $z = arctg\,\frac{y}{x}$

12.8. $z = \frac{x^2}{1-2y}$

12.9. $z = e^{xy^2};\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y} =?$

12.10. $z = ln\,(x^2+y^2)\,;\ \frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2} =?$

12.11. $z = \sin\,(xy)$; $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = ?$ 12.12. $w = e^{xyz}$; $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial z} = ?$

12.13. Найти частные производные третьего порядка функций:

а) $z = x^3 + x^2 y + y^3$; б) $z = x^4 + 3x^3 y - 4x^2 y^2 + 5xy^3 - y^4$;

в) $u = \frac{y}{x}$; г) $u = \frac{x}{\sqrt[3]{t}}$

12.14. Дано: $z = \frac{y}{y^2 - a^2 x^2}$ Доказать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^3 z}{\partial y^2}$

12.15. Дано: $z = e^{-x-3y} sin(x + 3y)$ Доказать: $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 9\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$

12.16. Дано: $z = ln(e^x + e^y)$ Доказать: $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$

12.17. Дано: $z = ln(x + e^{-y})$ Доказать: $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$

12.18. Доказать, что функция $y\ (x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ удовлетворяет уравнению Лапласа: $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = 0$

7.8. Линии уровня. Производная по направлению. Градиент

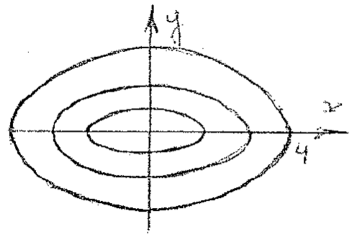
Пусть задана дифференцируемая функция Z=f(x,y). Геометрически она изображается поверхностью. Различные точки этой поверхности имеют различные аппликаты Z. Чтобы выделить на поверхности точки, находящиеся от плоскости на одном и том же расстоянии C, надо f(x,y)=C (геометрически провести секущую плоскость Z=C). Кривая в плоскости XOY, уравнение которой f(x,y)=C, называется ***линией уровня*** поверхности Z=f(x,y), т.е. линия уровня поверхности – это множество всех точек плоскости, в которых данная функция принимает одно и то же значение.

Если поверхность Z=f(x,y) пересечь плоскостями Z=C, где C – произвольная постоянная, и спроектировать полученные в сечениях линии на плоскость xOy, то на этой плоскости получится семейство линий уровня f(x,y)=C с параметром C.

Пример 1 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{1} + \frac{z^2}{9} = 1$

Положим, что Z=C $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{1} + \frac{C^2}{9} = 1$;

$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{1}=1-\frac{C^2}{9}\Rightarrow$



$$\frac{x^2}{16(1-\frac{C^2}{9})}+\frac{y^2}{1(1-\frac{C^2}{9})}=1$$

Следовательно, линии уровня поверхности (эллипсоида) представляют собой семейство эллипсов с плоскостями а= $4\sqrt{1-\frac{C^2}{9}}$; b= $\sqrt{1-\frac{C^2}{9}}$ $\sqrt{1-\frac{C^2}{9}}\geq 0\Rightarrow |C|\leq 3$ или $C\epsilon[-3;3]$

Пусть Z=f(x,y) определена в некоторой окрестности точки $M_o(x_o,y_o)$.

<u>Определение</u>. Градиентом функции Z=f(x,y) в точке Mo называется вектор, обозначаемый символом $\overline{grad\ z}$ и имеющий координаты, равные соответственно производным $\frac{\partial z}{\partial x};\frac{\partial z}{\partial y}$, вычисленным в точке Mo $\overline{grad\ z}=\frac{\partial z}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\bar{j}$.

Градиент характеризует направление наискорейшего возрастания функции в заданной точке.

Если рассматривать функцию трех переменных, в точке Mo(xo,yo zo)

То $\overline{grad\ z}=\frac{\partial u}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}$

Пример 2 С какой наибольшей скоростью может возрастать функция

$U=\frac{10}{x^2+y^2+z^2+1}$ при переходе точки M(x,y,z) через точку M(-1,2,-1)? В каком направлении должна двигаться точка M при переходе через точку M1(2;0;1), чтобы функция убывала с наибольшей скоростью?

Наибольшая по абсолютной величине скорость изменения (возрастания или убывания) функции и при переходе точки M через точку P численно равна модулю градиента функции в точке P.

$\overline{gradu}=-\frac{20}{(x^2+y^2+z^2+1)^2}\ (xi+yj+zk)$.

1) $\overline{grad\ u}\,M_0=\frac{1}{5}\ (i-2j+2k)$ его модуль, численно равный искомой наибольшей скорости вырастания функции и (M) при переходе через точку Mo будет $\left|\overline{grad\ u}\ (M)\right|=\sqrt{\frac{1}{5}^2+(-\frac{2}{5})^2+(\frac{2}{5})^2}$ = 3/5 .

2) $\overline{gradu}\, M_1 = -\frac{10}{5}\, i - \frac{5}{9} k$ Искомый вектор, имеющий прямо противоположное направление будет $-\overline{grad\ u}\, M_1 = -\frac{10}{5}\, i + \frac{5}{9} k$ Чтобы функция U убывала с наибольшей скоростью при переходе через точку M1, точка M должна двигаться в направлении вектора $-\overline{grad\ u}\, M_1$

<u>Определение:</u> Производной функцией Z=f(x,y) в точке Mo(xo,yo) по направлению, определенному единичным вектором ē = cos α ī+cos βĵ, называется проекция $\overline{grad\ z}$ на вектор ē: $\frac{\partial z}{\partial e} = \overline{grad\ z}\, \overline{e} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta.$

Соответственно, для функции U=f(x,y,z) производная в точке Mo(xo,yo,zo) по направлению вектора ē = cos α ī+cos βĵ + cos p k имеет вид.

$$\frac{\partial u}{\partial e} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos p$$

Пример 3 Найти производную функцию u = xy+yz+1 по направлению вектора ē(12;-3;-4) в любой точке и в точках A(0;-2;-1) и B(3;3;5).

Найдем частные производные функций и U направляющие косинусы вектора ē:

$\frac{\partial u}{\partial e} = y;\ \frac{\partial u}{\partial y}$= x+z; $\frac{\partial u}{\partial z} = y;\ |ē| = \sqrt{12^2 + (-3)^2 + (-4)^2} = 13,$

$\cos\alpha = \frac{12}{13};\ \cos\beta = -\frac{3}{13}\ ;\ \cos\gamma = -\frac{4}{13}.$

Подставляя значения в формулу для $\frac{\partial u}{\partial e}$, получим:

$\frac{\partial u}{\partial e} = \frac{12}{13} y - \frac{3}{13}(x+7) - \frac{4}{13} y$ = 8y-3(x+z)/13.

Подставляя координаты точек A и B, получим: $\frac{\partial u}{\partial e}(A) = -1\ \frac{\partial u}{\partial e}(B) = 0.$

Задачи для самостоятельного решения

13.1. С какой наибольшей скоростью может убывать функция U=ln (x^2 – y^2+z^2) при переходе точки M(x,y,z) через точку M(1;1;1)

Найти градиент функции z=x^2-y^3-y ln x точке A(1;2)

13.2. Для функции найдите модуль градиента в точке U=x^y-y^2+e^z найдите модуль градиента в точке A(2;2;0)

13.3. Найдите производную функцию U=0,5 z^2 y-x^2—y arcsin (x-2) по направлению вектора ā= (1,2,2) в точке A(2,4,1);

13.4. Постройте линии уровня функции Z=x^2+6x+y^2, найдите ее производную по направлениям вектора ē$(-\frac{3}{5};\frac{4}{5})$ в точке K(-1;1).

7.9. Максимум и минимум функции нескольких переменных

Определение. Значение функции $f(M_0)$в точке M_0 называется максимумом (минимумом), если оно является наибольшим (наименьшим) по сравнению с ее значениями во всех достаточно близких точках, т.е. $f\ (M)\ <\ f\ (M_0)$ $(f\ (M)\ >\ f\ (M_0))$ для всех M из некоторой окрестности M_0.

Функция многих переменных может иметь максимум или минимум (экстремум) только в точках, лежащих внутри области определения функции, в которых все ее частные производные первого порядка равны нулю или не существуют. Такие точки называются критическими.

Критическая точка M_0 будет точкой экстремума функции $f\ (M)$, если для всех точек M, достаточно близких к M_0, приращение функции $\Delta f = f(M) - f(M_0)$ не изменяет знака. При этом, если Δf сохраняет отрицательный знак, то M_0 есть точка максимума.

Для функции двух переменных $f\ (x, y)$ вместо исследования знака Δfприменяют следующее достаточное условие экстремума.

<u>Теорема.</u> Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ является стационарной точкой ции $z = f\ (x, y)$, т.е. $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 = 0$ и $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0 = 0$, и пусть в некоторой области, содержащей точку M_0, функция имеет непрерывно частные производные до третьего порядка включительно. Обозначим

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{M_0}, B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{M_0}, C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{M_0}, \text{тогда}$$

1) если $A \cdot B - C^2 > 0$, то функция имеет в точке M_0 экстремум: максимум при $A, B\ <\ 0$; минимум при $A, B\ >\ 0$;

2) если $A \cdot B - C^2 < 0$, то M_0 не является точкой экстремума;

3) если $A \cdot B - C^2 = 0$, то никакого заключения о характере стационарной точки сделать нельзя и требуется исследование ΔM в окрестности M_0

Пример. Найти экстремумы функции

а) Находим стационарные точки функции:

$z'_x = 3x^2 - 6y$; $z'_y = 24y^2 - 6x$.

Решая систему уравнений $z'_x = 0$; $z'_y = 0$, найдем точки: $M_1\ (0; 0)$ и $M_2\ \left(1; \frac{1}{2}\right)$.

б) Находим частные производные второго порядка:

$$z''_{xx} = 6x;\ z''_{xy} = -6y;\ z''_{yy} = 48y$$

в) Для точки M_1 получим: $A = 0;\ B = 0;\ C = -6;\ A \cdot B - C^2 = -36 < 0$ Следовательно, по достаточному условию, в точке M_1 нет экстремума.

Для точки M_2 получим: $A = 6;\ B = 24;\ C = -6;\ A \cdot B - C^2 = 108 > 0;$ $A > 0, B > 0$. Следовательно, M_2 есть точка минимума,

$$z_{min} = 1^3 + 8 \cdot (\frac{1}{2})^3 - 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 5 = 4$$

Замечание. Наибольшее или наименьшее из всех значений функции нельзя смешивать с максимумом или минимумом функции, которые являются наибольшим или наименьшим значением только по сравнению с ее значениями в соседних точках.

Если функция разрывна или непрерывна в незамкнутой области, то она может не иметь ни наибольшего, ни наименьшего значения.

Функция $f\ (M)$, непрерывная в некоторой ограниченной замкнутой области D, обязательно имеет в этой области наибольшее и наименьшее значение. Эти значения достигаются ею или в точках экстремума, лежащих внутри области D, или в точках, лежащих на границе области.

7.10. Наибольшее и наименьшее значение функции

Чтобы найти наибольшее (наименьшее) значение функции $f\ (M)$ в ограниченной замкнутой области D, где она непрерывна, можно руководствоваться следующим правилом:

А. Найти критические точки, лежащие внутри области D, и вычислить значения функции в этих точках (не вдаваясь в исследование, будет ли в них экстремум функции и какого вида).

Б. Найти наибольшее (наименьшее) значение функции на границе области D.

В. Сравнить полученные значения функции: самое большее (меньшее) из них и будет наибольшим (наименьшим) значением функции во всех области D.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значение функции:

$$z = e^{-x^2-y^2}(2x^2 + 3y^2) \text{ в круге } x^2 + y^2 \leq 4$$

Решение: А.

$$\frac{\partial z}{x\partial} = e^{-x^2-y^2}[-2x(2x^2+3y^2)+4x];\ \frac{\partial z}{\partial y} = e^{-x^2-y^2}[-2y(2x^2+3y^2)+6y;]$$

Система уравнений для определения критических точек:

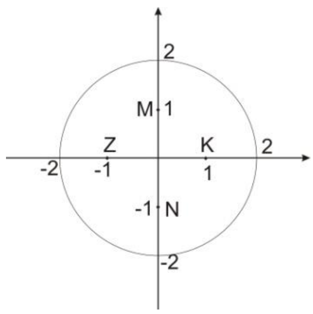
$$\begin{cases} 2x(2-2x^2-3y^2)=0 \\ 2y(3-2x^2-3y^2)=0 \end{cases}$$

Решая ее, получаем пять пар корней, которым соответствуют пять критических точек: $O(0;0), O(0;1), O(0;-1), O(1;0), O(-1;0)$. Все они лежат внутри круга. Определяем значения функции в критических точках

$$z_0 = 0;\ z_M = e^{-1}\cdot 3 = \frac{3}{e};\ z_N = e^{-1}\cdot 3 = \frac{3}{e};\ z_K = e^{-1}\cdot 2 = \frac{2}{e};\ z_Z = e^{-1}\cdot 2 = \frac{2}{e}$$

Следовательно, внутри области

$$z_{\text{наим}} = z_0 = 0;\ z_{\text{наиб}} = z_N = z_M = \frac{3}{e}$$



Б. Ищем наибольшее и наименьшее значение на границе $x^2+y^2;\ y^2-x^2$. Следовательно, на границе функция z имеет вид: $z=e^{-4}(2x^2+12-3x^2)=\frac{1}{e^4}(12-x^2), -2\leq x\leq 2$ Если $x=\pm 2$ то $z=\frac{8}{e^4}. z'_x=e^{-4}\cdot(-2x)$ Следовательно, критические точки $(0;\ 2)$ и $(0;\ -2)$ (если $x\ =\ 0$, то $y=\pm 2$).

При $x\ =\ 0\ z=\frac{12}{e^4}$

В. Объединяя результаты пунктов А и Б, получаем:

$$z_{\text{наим}} = z_0 = 0;\ z_{\text{наиб}} = \frac{3}{e}$$

Задачи для решения

В задачах 13.1 – 181 найти экстремумы функций двух переменных:

13.1. $z=4\,(x-y)-x^2-y^2$

13.2. $z=x^2+xy+y^2+x-y+1$

13.3. $z=x^3+8y^3-6xy+5$

13.4. $z=x^2+xy+y^2-6x-9y$

13.5. $z=x^3+xy^2+6xy$

13.6. $z=x^3+y^2-6xy-39x+18y+20$

13.7. $z=x^3y^2(12-x-y)$

13.8. $z=x^3+y^3-3xy$

13.9. $z = (2x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ 13.10. $z = x^2 + y^2 - 2lnx - 18lny\ (x > 0, y >)$
13.11. Найти наибольшее и наименьшее значение функции
$z = 4x^2y - x^3y - x^2y^2$ в треугольнике, ограниченном прямыми
x = 0, y = 0, x + y = 6.
13.12. Найти наибольшее и наименьшее значение функции
z = xy – 2x – y в прямоугольнике $0 \le x \le 3; 0 \le y \le 4$
13.14. Найти наибольшее и наименьшее значение функции
$z = x^2 + 2xy - y^2 + 4x$ в замкнутой области D, заданной системой неравенств: $x \le 0, y \le 0; x + y + \ge 0$
13.15. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = x^2y$ в замкнутой области, ограниченной параболой $y = 1 - x^2$ и осью Ox.
13.16. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = 4 - 2x^2 - y^2$ в круге $x^2 + y^2 \le 1$.
13.17. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = x^2 + xy$ в прямоугольнике: $-1 \le x \le 1, ; 0 \le y \le 3$
13.18. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = \frac{1}{2}x^2 - xy$ в замкнутой области, ограниченной параболой $y = \frac{x^2}{3}$ и прямой y = 3.
13.19. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = xy$ в треугольнике с вершинами $O\ (0;\ 0), A\ (2;\ 0)$ и $B\ (0;\ 3)$.
13.20. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = 2x + y - xy$ в квадрате: $0 \le x \le 4, 0 \le y \le 4$.

7.11. Применение ФНП в экономике

Производственной функцией называется зависимость результата производственной деятельности – выпуска продукции – от обусловивших его факторов – затрат ресурсов $x_1, x_2, \ldots, x_n$. В денежных единицах она представляет собой доход от использования ресурсов.

Пример 1. Производственная функция (в денежном выражении) имеет вид

K(x, y) = 30

(x – количество единиц первого ресурса – 5, y – второго). Стоимость единицы первого ресурса – 5, второго – 10 ден. ед. Найти максимальную прибыль при использовании ресурсов.

Решение. Производственная функция в денежном выражении равна доходу от использования ресурсов. Издержки при этом равны:

C(x) = 5x + 10y.

Таким образом, функция прибыли равна

$$п(x, y) = 30 – 5x – 10y.$$

Требуется найти ее максимум. Частные производные функции п(x, y) равны

$$п_x` = 15x^{-1/2}\, y^{1/3} – 5; \quad п_y' = 10x^{1/2}\, y^{-2/3} – 10.$$

Приравнивая их к нулю, найдем решение:

$$x = 81,\ y = 27.$$

Частные производные второго порядка имеют вид:

$П_{xx}`` = -5/2x^{-3/2}\, y^{1/3} – 5;$ $\quad п_{xy}`` = п_{yx}`` = 5x^{-1/2}\, y^{-2/3};$ $\quad п_{yy}`` = -20/3x^{1/2}\, y^{-5/3};$

$$П_{xx}``\ п_{yy}`` - (п_{xy}``)^2 = 25x^{-1/2}\, y^{-4/3} > 0.\ П_{xx}`` < 0.$$

Таким образом, найденная критическая точка есть точка максимума. Соответствующее значение прибыли равно 135 (ден. ед.).

Функция полезности $U(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ задает полезность для потребителя от приобретения x_1 единиц 1-го блага, x_2 единиц 2-го блага и т. д.

Пример 2. Функция полезности имеет вид:

$$U(x, y) = 2\ln(x – 1) + 3\ln(y – 1).$$

Цена единицы первого блага равна 7, второго – 16. На приобретение этих благ может быть затрачена сумма, равная 1 000. Как следует распределить эту сумму между двумя благами, чтобы полезность от их приобретения была наибольшей?

Решение. Рассмотрим линии уровня функции полезности

$$U(x, y) = C,$$

т. е. $2\ln(x – 1) + 3\ln(y – 1) = C$.

Используя свойства логарифмов, имеем:

$$\ln(x – 1)^2 (y – 1)^3 = C, \text{ т. е. } (y – 1)^3 = A / (x – 1)^2,$$

где $A = e^c$.

Таким образом, линии уровня представляют собой графики функции

$$y = (/ (x – 1)^{2/3}) + 1.$$

Получаем, что в точке (x, y), где достигается максимальная полезность, линия уровня касается прямой

$$8x + 16y = 1\,000, \text{ или } x + 2y = 125.$$

Значит, градиент функции полезности должен быть перпендикулярен этой линии. Градиент функции полезности имеет вид:

$$(2/(x – 1);\ 3 / (y – 1)).$$

Угловой коэффициент прямой k = -1/2. Используя условие перпендикулярности прямых, имеем:

$$3(x-1)/2(y-1)=2, \text{ или } 3x-4y=-1.$$

Следовательно, оптимальное распределение потребления товаров находится как решение системы:

т. е. x = 49,5;   y = 37,75.

§8. Дифференциальные уравнения

8.1. Дифференциальные уравнения I порядка

Дифференциальным уравнением (обыкновенным) называется уравнение, связывающее независимую переменную, функцию и производные (или дифференциалы) этой функции. В общем виде дифференциальное уравнение может быть записано в следующем виде:

$F(x, y(x), y'(x),..., y^{(n)}(x)) = 0$.

Наивысший порядок производной, входящей в уравнение, называется порядком уравнения. Следовательно, уравнения I порядка имеют вид $F(x, y, y') = 0$ или (в разрешенном относительно y' виде) $y' = f(x, y)$.

Решением дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая на интервале Δ функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество на Δ.

Задача, в которой требуется найти решение уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$, называемому начальным условием, называется задачей Коши.

Общим решением дифференциального уравнения в некоторой области D плоскости (x, y) называется функция $\varphi(x, C)$, зависящая от x и постоянной C из некоторого множества K, если: 1) $y = \varphi(x, C)$ является решением данного уравнения при любых значениях произвольной постоянной $C \in K$; 2) для любого начального условия $(x_0, y_0) \in D$ существует единственное значение $C = C_0 \in K$, при котором решение $y = \varphi(x, C_0)$ удовлетворяет начальному условию.

Всякое решение $y=\varphi(x, C_0)$, получающееся из общего решения $y=\varphi(x, C)$, для области $D\subset R^2$ при конкретном значении $C=C_0$, называется частным решением.

Общее решение дифференциального уравнения, выраженное в неявной форме $\varphi(x, y, C)=0$, называется общим интегралом этого уравнения.

Рассмотрим некоторые типы дифференциальных уравнений I порядка.

8.2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Это дифференциальные уравнения, которые могут быть записаны в виде $y'=f(x)\cdot g(y)$ или в виде равенства дифференциалов: $M(x)N(y)dx=P(x)Q(y)dy$. При такой симметричной записи относительно x и y иногда удобно рассматривать не y как функцию x, а x как функцию переменной y. Называя иногда x функцией, именно это имеют в виду.

Для решения последнего уравнения надо обе части уравнения умножить или разделить на такое выражение, чтобы после сокращений в одну часть входило выражение, связанное только с переменной x, а в другую — только с y, а затем проинтегрировать обе части. При делении обеих частей на выражение, содержащее неизвестные x и y, могут быть потеряны решения, обращающие это выражение в нуль. Поэтому такие решения проверяются.

<u>Пример.</u> Решить уравнение $x^2y^2y'+1=y$.

Запишем это уравнение через дифференциалы $(y'=\frac{dy}{dx})$: $x^2y^2\frac{dy}{dx}+1=y$ или

$x^2y^2dy=(y-1)dx$.

Разделим обе части последнего уравнения на $x^2(y-1)$: $\frac{y^2}{y-1}dy=\frac{dx}{x^2}$.

Переменные разделены. Интегрируем дифференциалы в обеих частях, имея в виду, что $y=y(x)$:

$\int\frac{y^2}{y-1}dy=\int\frac{dx}{x^2}$, откуда получаем $\frac{y^2}{2}+y+\ln|y-1|=-\frac{1}{x}+C$ — общий интеграл для области $D\subset R^2$, не содержащей прямых $x=0$ и $y=1$. При делении на $x^2(y-1)$ могли быть потеряны решения $x=0$, если рассматривать x как функцию от y и $y=1$. При проверке (подстановке в уравнение) находим, что $y=1$ есть решение уравнения, а $x=0$ — нет. Заметим, что $y=1$ не входит в семейство функций, описанных общим интегралом, т. к. $\ln|y-1|$ в этом случае не существует.

Задания для решения

Решить уравнения:

14.1. $xy' = 2y+1.$

14.2. $(x+2xy)dx+(1+x^2)dy=0.$

14.3. $(1+y^2)dx+(1+x^2)dx=0.$

14.4. $y' \sin^2 y\sqrt{1+x^2} = \dfrac{x}{\cos y}.$

14.5. $x\sin y \cdot y' = \ln xe^{\cos y}.$

14.6. $e^x\sqrt{y^2+1} = e^x yy' + yy'.$

14.7. $y'e^y = x\sin x^2\sqrt{1+e^y}.$

14.8. $yy'\sqrt{1-x^2} = e^y \arcsin x.$

14.9. $(y^2+xy^2)y' + x^2 - yx^2 = 0$

Решить задачу Коши:

14.10. $(1+e^x)yy' = e^x$, $y(0)=0$.

14.11 $y-xy' = 2(1+x^2y')$, $y(1)=1$.

14.12. $2y'\sqrt{x} = y; y(4)=1.$

14.13. $x^2y'+y^2 = 0, y(-1)=1.$

14.15 $(1+y^2)dx = xydy, y(2)=1.$

8.3. Однородные уравнения

Определение. Функция $M(x,y)$ называется однородной функцией степени n, если для всех k имеем $M(kx,ky)=k^nM(x,y)$.

Однородные уравнения могут быть записаны в виде $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ или $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$, где $M(x,y)$ и $N(x,y)$— однородные функции одной и той же степени. Чтобы решить однородное уравнение, делают замену $y=t\,x$, где t — новая неизвестная функция от x, после чего получают уравнение с разделяющимися переменными.

Пример. Решить уравнение $xdy = (x+y)dx$. Здесь функции $M(x,y) = x$ и $N(x,y) = x+y$ — однородные, первой степени. Полагаем $y = t\,x$. Тогда $dy = tdx + xdt$. Подставляя в уравнение, получим: $x(xdt + tdx)dx = x(1+t)dx$ или $xdt = dx$. Решаем это уравнение с разделяющимися переменными: $\int dt = \int \frac{dx}{x}$, $t = \ln|x| + c$. Возвращаясь к старой переменной y $\left(t = \frac{y}{x}\right)$, получим $y = x(\ln|x| + c)$. Кроме того, имеется решение $x = x(y) = 0$, которое было потеряно при делении на x.

Задания для решения

Решить уравнения

15.1 $\left(x^2 + 2y^2\right)dx - x^2dx = 0.$

15.2. $y^{/}\sqrt{x} = \sqrt{y+x} - \sqrt{x}.$

15.3. $\left(y^2 - 2xy\right)dx + x^2dx = 0.$

15.4. $\left(y - 3\sqrt{xy}\right)dx = xdy.$

15.5. $y^2 + x^2y^{/} = xyy^{/}.$

15.6. $xy^{/}(\ln y - \ln x) = y.$

15.7. $xy^{/} - y = xtg\,\frac{y}{x}.$

15.8. $y^{/}\sqrt{x} = \sqrt{y+x} - \sqrt{x}.$

15.10 $\left(y - 3\sqrt{xy}\right)dx = xdy.$

15.9. $xy^{/} - y = (x+y)\ln\frac{x+y}{x}.$

15.12. $xy^{/}(\ln y - \ln x) = y.$

15.11 $\left(y + \sqrt{xy}\right)dx = xdy.$

15.13. $\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\frac{y}{x}dy = 0.$

15.14. $\left(xy \cdot e^{\frac{x}{y}} + y^2\right)dx = x^2e^{\frac{x}{y}}dy.$

15.16. $\left(3x^2 + 2xy - y^2\right)dx + \left(x^2 - 2xy - 3y^2\right)dy = 0;$

15.17. $\dfrac{y - xy^{/}}{x + yy^{/}} = 2.$

15.18. $xdy = \left(2y - \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx;$

15.18. $x\sin\frac{y}{x}dy = \left(y\sin\frac{y}{x} - x\right)dx.$

Решить задачу Коши:

15.19. $\left(xy^{/} - y\right)arctg\,\frac{y}{x} = x$, $y(1) = 0$.

15.20. $\left(y^2 - 3x^2\right)dy + 2xydx = 0$, $y(0) = 1$.

15.21. $y^{|} = \dfrac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2}$, $y(1) = -1$.

15.22. $\left(y^2-3x^2\right)dy+2xydx=0, \quad y(1)=-2.$

15.23. $y-xy'=x\sec\frac{y}{x}, \quad y(1)=\Pi.$

8.4. Линейные уравнения I порядка. Уравнения Бернулли

Это уравнения вида $y'+a(x)y=b(x)$. Чтобы их решить, сначала решают уравнение $y_0'+a(x)y_0=0$ (это делается путем разделения переменных) и, в общем решении последнего заменяя произвольную постоянную C на неизвестную функцию $C(x)$, получают решение $y(x)$. Затем выражение, полученное для $y(x)$, подставляют в исходное уравнение и находят функцию $C(x)$ (так же разделением переменных).

Линейные уравнения I порядка можно решить и методом Бернулли: с помощью подстановки $y=u(x)v(x)$, где u и v— две неизвестные функции. Исходное уравнение преобразуется к виду $u'v+[v'u+a(x)uv]=b(x)$. Далее, за $v(x)$ принимают любое частное решение уравнения $v'u+a(x)uv=0$ или $v'+a(x)v=0$. После того как $v(x)$ найдено, оно подставляется в уравнение $u'v=b(x)$ (слагаемое в квадратных скобках при этом обращается в 0), откуда находится общее решение $u(x)$, а затем при умножении $u(x)$ на $v(x)$ и общее решение исходного уравнения.

<u>*Примеры.*</u> 1) Решить уравнение $xy'-2y=2x^4$. Запишем это уравнение в виде $y'-\left(\frac{2}{x}\right)y=2x^3$— линейное уравнение I порядка. Решим его методом Бернулли. Положим $y=uv$, $y'=u'v+v'u$, тогда $u'v+\left[v'u-\frac{2}{x}uv\right]=2x^3$. Решаем сначала уравнение $v'u-\frac{2}{x}uv=0$ или $\frac{dv}{dx}=\frac{2}{x}v$, $\frac{dv}{v}=\frac{dx}{x}$. Интегрируя, получим $\ln|v|=\ln x^2+c$ или $v=cx^2$. Возьмем частное решение $v=x^2$ $(c=1)$ и подставим в уравнение $u'x^2=2x^3$ или $du=2xdx$, откуда $b(x)=x^2+c$. Итак, $y=x^4+cx^2$.

2) Решить уравнение $2x(1+y)dx=dy$. Запишем уравнение в виде $y'-2xy=2x$. Решим методом вариации произвольной постоянной (первым способом). $y'-2xy=0$, $\frac{dy}{y}=2xdx$, $\ln|y|=x^2+c$ или . $y=e^{x^2}c(x)$. Чтобы найти функцию $C(x)$, подставим найденное y в исходное уравнение:

$2xe^{x^2}c(x)+c'(x)e^{x^2}-2xe^{x^2}c(x)=2x,$ откуда имеем $c(x)=-e^{-x^2}+c$. Окончательно получим $y=ce^{x^2}-1.$

Задания для решения

Решить уравнение:

16.1. $xy^1=2y+2x^4;$

16.2. $(2x+1)y^1=4x+2y;$

16.3. $(xy+e^x)dx=xdy;$

16.4. $x^2y^1+xy+1=0;$

16.5.

16.6. $y=x(y^1-x\cos x);$

$2x(x^2+y)dx=dy;$

16.7. $x^2y^2y^1+xy^3=1;$

16.8. $\cos ydx=(x+2\cos y)\sin ydy;$

16.9. $\left(x^2+1\right)y^1+4xy=3;$

16.10. $\left(1+x^2\right)y^1-2xy=(1+x^2)^2;$

16.11. $y+y^1\ln^2 y=\left(x+2\ln y\right)y^1;$

16.12. $y+y^1\ln^2 y=(x+2\ln y)y^1;$

16.13. $x(x+1)(y^1-1)=y;$

16.14. $(2xe^y+y^4)y^1=ye^y;$

16.15. $3x^2-y=y^1\sqrt{x^2+1}$

Решить задачу Коши:

16.16. $ydx-(3x+1+\ln y)dy=0; y\left(-\frac{1}{3}\right)=1$

16.17. $(1-x)(y^1+y)=e^{-x}; y(2)=0$

16.18. $y^1-ytgx=\sec x; y(0)=0$

16.19.

16.20. $xy^1-\frac{y}{x+1}=x; y(1)=0$

8.5. Уравнения, допускающие понижение порядка

Рассмотрим два случая: а) в уравнение не входит искомая функция y, т. е. оно имеет вид $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)},..., y^{(n)})=0$. Тогда порядок понижается, если сделать замену $z=y^{(k)}$; б) в уравнение не входит независимая переменная x, т. е. оно имеет вид $F(y, y',..., y^{(n)})=0$. Тогда порядок понижается, если записать $p(y)=y'$.

Пример. Решить уравнение $2y\,y'' = y'^2 + 1$. В это уравнение не входит x, следовательно, полагаем $y' = p(y)$. Тогда $y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p'p$. Подставляя $y' = p, y'' = p'p$ в исходное уравнение, получим $2ypp' = p^2 + 1$ или $\frac{pdp}{p^2+1} = \frac{dy}{2y}$, $\int \frac{d(p^2+1)}{p^2+1} = \int \frac{dy}{y}$, $p^2 + 1 = c\,y$ или $p = \pm\sqrt{cy-1}$. Следовательно, $y' = \pm\sqrt{cy-1}$, откуда находим $\pm\frac{2}{c}\sqrt{cy-1} = x + c_1$, или $4(cy-1) = c^2(x+c_1)^2$.

8.6. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами II порядка

Сначала рассмотрим *линейные однородные* уравнения с постоянными коэффициентами $a_0y'' + a_1y' + a_2y = 0$. Чтобы его решить, составляют характеристическое уравнение $a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ и находят его корни λ_1, λ_2. Если корни λ_1 и λ_2 простые (некратные), то общее решение уравнения записывается в виде $y = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x}$.Если корни кратные, т. е. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то общее решение имеет вид $y = (c_1 + c_2x)e^{\lambda x}$. Если корни комплексные сопряженные (т. е. числа вида $a \pm ib$, где $i = \sqrt{-1}$), то общее решение будет иметь вид $y = (c_1\cos ax + c_2\sin bx)e^{ax}$.

Пример. Решить уравнение $y'' - 4y' + 13y = 0$. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$ имеет корни $\lambda = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3i$. Общее решение уравнения можно записать в виде $y = (c_1\cos 3x + c_2\sin 3x)e^{2x}$.

Структура общего решения *линейного неоднородного* уравнения с постоянными коэффициентами $a_0y'' + a_1y' + a_2y = f(x)$ определяется теоремой: общее решение неоднородного уравнения равно сумме любого его частного решения $y_ч$ и общего решения соответствующего однородного уравнения y_0 $(y = y_ч + y_0)$. Следовательно, для построения общего решения неоднородного уравнения надо найти одно частное решение (предполагается, что решение соответствующего однородного уже найдено описанным выше способом). Для этого можно использовать метод подбора частного решения (метод неопределенных коэффициентов). Этот метод применим только к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами и специальной правой частью такого вида: $f(x) = e^{ax}[P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx]$ (или сумме функций такого вида). Здесь $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ многочлены от x степени n и m.

Частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде $y_ч = x^r e^{ax}\left[P_l(x)\cos bx + Q_l \sin bx\right]$, где $r=0$, если число $a+ib$ не является корнем характеристического уравнения, и $r=1$ — в противном случае (при $b\neq 0$); $P_l(x)$ и $Q_l(x)$ – полные многочлены от x степени, $l=\max(n,m)$, т. е. $P_l(x) = A_0x^l + A_1x^{l-1} + \ldots A_l$; $Q_l(x) = B_0x^l + B_1x^{l-1} + \ldots + B_l$ (содержит все степени x от 0 до l). При $b=0$ r равно кратности корня характеристического уравнения, равного a, и $r=0$, если a не есть корень характеристического уравнения. Неопределенные коэффициенты можно найти из системы линейных алгебраических уравнений, получаемых приравниванием коэффициентов подобных членов в левой и правой части исходного уравнения после подстановки в него $y_ч$ вместо y.

Если правая часть исходного уравнения равна сумме нескольких различных функций рассматриваемого вида, то находят частные решения, соответствующие отдельным слагаемым правой части, и в качестве $y_ч$ берут их сумму.

Примеры. 1) Решить уравнение $y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x$ при начальных условиях $y(0)=1, y'(0)=2$. Характеристическое уравнение $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ имеет корни $k_1 = 1, k_2 = -2$, следовательно, $y_0 = c_1e^{-2x} + c_2e^x$. Частное решение неоднородного уравнения $y_ч$ ищем в виде $y_ч = A\cos x + B\sin x$, т. к. $a=0, b=1, a+ib=i$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому $r=0; m=n=0$, а следовательно, $l=0$. Далее имеем $(y_ч)' = -A\sin x + B\cos x, y_ч'' = -A\cos x - B\sin x$. Подставляя $y_ч, y_ч', y_ч''$ в исходное уравнение, получим

$y_ч'' + y_ч' - 2y_ч = (B-3A)\cos x + (-3B-A)\sin x \equiv \cos x - 3\sin x$. Приравнивая коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$ в левой и правой части тождества, найдем $\begin{cases} B-3A=-1 \\ 3B+A=3 \end{cases}$, $A=0, B=1$. Следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид $y = c_1e^{-2x} + c_2e^x + \sin x$. Постоянные c_1 и c_2 находим из начальных условий: $\begin{cases} c_1e^0 + c_2e^0 + \sin 0 = 1 \\ -2c_1e^0 + c_2e^0 + \cos 0 = 2 \end{cases}$ или $\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ -2c_1 + c_2 = 1 \end{cases}$, $c_1 = 0, c_2 = 1$. Тогда $y = e^x + \sin x$.

2) Решить уравнение $y'' - 2y' - 3y = e^{4x} + 1$. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$. Следовательно, $y_0 = c_1 e^{3x} + c_2e^{-x}$ – общее решение однородного уравнения. Правую часть нужно разбить на 2 слагаемых: e^{4x} и $1 = e^{0\cdot x}$. Для первого частное решение ищем в виде $y_{ч1} = Ae^{4x}$, (т. к. $b=0, a=4, a+ib=4$ – не корень характеристического уравнения, то $r=0, l=n=0$)

и для второго — в виде $y_{ч2}=B\,(a=b=r=0, l=n=0)$. Для $y_{ч1}$ имеем $y_{ч1}{}'=4Ae^{4x}, y_{ч1}{}''=16Ae^{4x}$, тогда $16Ae^{4x}-8Ae^{4x}-3Ae^{4x}\equiv e^{4x}, 5Ae^{4x}\equiv e^{4x}, 5A\equiv 1, A=\frac{1}{5}$. Для $y_{ч2}$ имеем $y_{ч2}{}'=y_{ч2}{}''=0, -3B=1, B=-\frac{1}{3}$. Частное решение неоднородного уравнения будет таким: $y_ч=y_{ч1}+y_{ч2}=\frac{1}{5}e^{4x}-\frac{1}{3}$ и общее решение данного уравнения $y=c_1e^{3x}+c_2e^{-x}+\frac{1}{5}e^{4x}-\frac{1}{3}$.

Задания для решения

17.1. Дано частное решение однородного уравнения:
$y_1=1$, $y_2=x$, $y_3=e^{3x}$.
Составить частное решение неоднородного уравнения, если его правая часть имеет вид:
$a)\ 2x^2+5x \quad b)\ e^{-2x}(3x-5) \quad c)\ 4e^{3x} \quad d)\ 2e^{3x}\sin 3x$
$e)\ (2x-3x^2)3\sin 3x \quad f)\ \cos 2x+x$.

17.2. Дано частное решение однородного уравнения:
$y_1=\cos 4x$, $y_2=\sin 4x$, $y_3=e^{3x}$.
Составить частное решение неоднородного уравнения, если его правая часть имеет вид:
$a)\ e^{3x}(4x^2+6) \quad b)\ e^{-3x}(3x^2-4) \quad c)\ e^{-3x}\cos 4x \quad d)\ \cos 4x$
$e)\ 3x\sin 6x \quad f)\ \cos 3x+4x^2$.

17.3. Решить уравнения:
$a)\ y''-4y'+3y=e^{2x} \quad b)\ y''-4y'+3y=4e^{3x}$
$c)\ y''-4y'+4y=3\cos 2x+2\sin 2x \quad d)\ y''+4y'+5y=3x^2-2x$

17.4. Решить уравнения:
$a)\ y''-4y'=3\cos 3x \quad b)\ y''-4y'=4x^2-2x$
$c)\ y''+6y'+9y=4e^{3x} \quad d)\ y''+6y'+10y=4\cos 5x+\sin 5x$

17.5. Решить задачу Коши $y''-y'=3e^{2x} \quad y(0)=2 \quad y'(0)=1$

17.6. Решить краевую задачу $y''+y=3x \quad y(0)=2 \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

17.7. Решить задачу Коши $y''-9y'+14y=3e^{x} \quad y(0)=0 \quad y'(0)=0$

17.8. Решить краевую задачу $y''+9y=2x-4 \quad y(0)=1 \quad y\left(\frac{\pi}{6}\right)=1$

17.9. Решить задачу Коши $y''+9y=3\cos 4x \quad y(0)=3 \quad y'(0)=0$

17.10. Решить краевую задачу $y''-2y'=1-2x \quad y(0)=3 \quad y(1)=e^2$

8.7 Дифференциальные уравнения в экономике

1. Рост общественного благосостояния (модель Золотаса). Крупнейший греческий экономист К. Золотас высказал гипотезу , согласно которой производство большего количества товаров необязательно ведет к лучшей жизни.Он рассматривает два фактора: один – стимулирующий развитие, другой – сдерживающий. Пусть $W -$ уровень общественного благосостояния в целом. Если $A -$ критическая точка, то сдерживающим фактором будет $A - W,$ а стимулирующим $-kW(k > 0).$ При таком подходе динамика W определяется уравнением:

$$\frac{dW}{dy} = kW(A - W),$$

$y(t) -$ доход на душу населения. Интегрирование (1) приводит к решению:

$$W(y) = \frac{A}{1 + \left(1 - \frac{W_0}{A}\right)e^{-Aky}}, W_0 = W(0),$$

которое является уравнением логической кривой. Золотас выделяет три стадии развития общества: 1- «общество нужды»; 2 -- «общество постоянных улучшений»; 3- «общество снижающихся темпов роста благосостояния», на котором постоянные PиQ определяют некоторые (разделительные уровни доходов).

2. Динамика потребителей (Модель Реденура). Для изменения числа потребителей L в этой модели принято уравнение

$$\frac{dL}{dt} = aL\left(1 - \frac{L}{L_{max}}\right),$$

где $a = const > 0, L_{max} -$ верхний предел потребителей. Его решение определяется формулой:

$$L = \frac{L_{max}}{1 + \left(\frac{L_{max}}{L_0} - 1)e^{-at}\right)}, L_0 = L(0).$$

Здесь снова наблюдается замедление роста (в данном случае числа потребителей некоторой технологии) с течением времени.

3. Интенсивность выпуска продукции. Пусть для некоторого предприятия (фирмы) эта интенсивность есть $y(t)$. Естественно предположить, что с увеличением выпуска продукции будет происходить насыщение рынка, и цена товара $p(t)$ будет падать. Пусть, например, $p(y) = b - ay(a > 0, b > 0)$, и скорость увеличения интенсивности выпуска продукции пропорциональна доходу

$yp(y)$ от продажи выпуска $y(t)$ по цене $p(y)$. Уравнение описанного процесса есть, очевидно,

$$\frac{dy}{dt} = k(b - ay)y$$

Интегрируя, приходим к так называемой логистической кривой:

$$y = \frac{cbe^{bkt}}{1 + cae^{bkt}}.$$

Произвольную постоянную cможно вычислить, если известно значение $y(0)$. Очевидно, что здесь происходит насыщение рынка товаром с течением времени, причем величина насыщения есть $\frac{b}{a}$.

4. Процесс естественного роста выпуска продукции. Пусть продукция продается по фиксированной цене $p, a, q(t) -$ количество продукции, реализованной на момент времени t. Тогда на этот момент получен доход, равный $pq(t)$, часть которого расходуется на инвестиции в производство реализуемой продукции, то есть $J(t) = mpq(t)$, где $m = const$ $-$норма инвестиции ($0 < m < 1$). Если исходить из предположения о ненасыщенности рынка (или о полной реализации производимой продукции), то в результате расширения производства будет получен прирост дохода, часть которого опять будет использована для расширения выпуска продукции. Это приведет к росту скорости выпуска. Естественно считать скорость выпуска пропорциональной увеличению инвестиций (то есть имеет место так называемый принцип акселерации):

$$\frac{dq}{dt} = \alpha J.$$

Подставляя сюда $J(t)$, получаем стандартное уравнение роста:

$\frac{dq}{dt} = kq$, где $k = \alpha mp = const$, следовательно, $q = q_0 e^{k(t - t_0)}$.

5. Реклама. Пусть некоторая фирма реализует продукцию, о которой в момент t из числа потенциальных потребителей N знают лишь x потребителей. Предполагается, что для ускорения сбыта продукции были даны рекламные объявления по радио и телевидению. Будем считать, что последующая информация о продукции распространяется среди покупателей посредством их общения друг с другом. С большой степенью достоверности можно также считать, что после рекламных объявлений скорость изменения числа о продукции пропорциональна как числу уже знающих о товаре покупателей , так и числу незнающих . Будем отсчитывать время с момента выхода рекламных объявлений, когда о товаре узнало N/g, $(g > 1)$ человек, то есть $x(0) = N/g$. Дифференциальным уравнением данного процесса будет $\frac{dx}{dt} = kx(N - x)$, где $k -$ указанный выше коэффициент пропорциональности. Интегрируя указанное уравнение, приходим к логистической кривой:

$$x = \frac{Ng}{g + N(g-1)e^{-kt}}.$$

Данное соотношение позволяет вычислить в любой момент времени $t > 0$ количество осведомленных о товаре покупателей.

6. Пример анализа производительности труда. Пусть на некотором предприятии темп изменения производительности труда в момент времени t задается отношением $f(t) = \frac{t}{t^2+0{,}04}$ и известно, что при $t = 0$ производительность составляет 2 (усл. ед.). Под темпом $T_y = (\ln y)' = \frac{y'}{y}$. По условию задачи

$$\frac{y'}{y} = \frac{t}{t^2 + 0{,}04}.$$

Интегрируя это уравнение, получим $y = c\sqrt{t^2 + 0{,}04}$. Из начального условия $y(0) = 2$ найдем $c = 10$. Таким образом, $y = 10\sqrt{t^2 + 0{,}04}$.

7. Динамика рыночной цены (модель Самуэльсона). Изучается связь между изменением цены p и неудовлетворенным спросом: $d(p) - s(p)$, где $d(p) = a - bp, s(p) = \alpha + \beta p$ есть соответственно спрос и предложение при цене $p, a, b, \alpha, \beta -$положительные постоянные. Скорость изменения цены пропорциональна неудовлетворенному спросу, т.е.

$$\frac{dp}{dt} = k[d(p) - s(p)],$$

где $k -$ коэффициент пропорциональности. С учетом явного вида функцией спроса и предложения данное уравнение принимает вид линейного уравнения с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dp}{dt} + k(b + \beta)p = k(a - \alpha).$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения есть $ce^{-k(b+\beta)t}$. Частным решением неоднородного будет (метод неопределенных коэффициентов) постоянная $\frac{a-\alpha}{b+\beta}$. Таким образом,

$$p(t) = \frac{a-\alpha}{b+\beta} + ce^{-k(b+\beta)t}, c = \left[p_0 + \frac{a-\alpha}{b+\beta}\right]e^{k(b+\beta)t}, p_0 = p(0).$$

Видно, что при $b+\beta > 0, k > 0, p(t)$ стремится с течением времени к постоянному значению $\frac{a-\alpha}{b+\beta}$.

8. Модель рынка с прогнозируемыми ценами. Используется динамика цены товара при условии, что прогноз спроса $d(t)$ и предложения $s(t)$ описывается соотношениями ($p(t)$ – цена):

$$d(t) = 3p'' - p' - 2p + 18, s(t) = 4p'' + p' + 3p + 3$$

Равновесное состояние рынка характеризует равенство $d = s$. С учетом этого равенства имеем уравнение:

$$p'' + 2p' + 5p = 15$$

Это есть линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение $\mu^2 + 2\mu + 5 = 0$ имеет комплексные корни $\mu_{1,2} = -1 \pm 2i$. Общее решение однородного уравнения есть

$$e^{-t}(c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t).$$

Цена $p(t)$ стремится к равновесному значению $p = 3$ с колебаниями относительно этого значения. Амплитуда этих колебаний стремится к нулю при $t \to \infty$.

9. Движение фондов. Пусть $K(t)$ – величина фондов в натуральном или стоимостном выражении, $\gamma(t)$ – коэффициент выбытия фондов, $J(t)$ – инвестиции, причем эти инвестиции дают за год увеличение фондов на pJ.Тогда нетрудно усмотреть, что процесс описывается линейным уравнением**:**

$$K' + \gamma K = pJ$$

Если считать, что p, γ, J –постоянные, то решением уравнения будет функция:

$$K(t) = \frac{pJ}{\gamma} + ce^{-\gamma(t-t_0)}, c = K_0 - \frac{pJ}{\gamma}, K_0 = K(t_0).$$

Если $\gamma > 0,$ то величина фондов с течением времени сремится к постоянному значению $\frac{pJ}{\gamma}$. Если $\gamma(t), J(t)$ –функции, то получим:

$$K(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} \gamma(\tau)d\tau} \left(K_0 + p\int_{t_0}^{t} J(\tau)e^{\int_{t_0}^{\tau} \gamma(\sigma)d\sigma} d\tau\right).$$

Данная модель позволяет прогнозировать величину фондов при планируемом распределении (по времени) инвестиций *J(t)*. Но можно также прогнозировать величину инвестиций в момент t по планируемому уровню фондов. А именно, очевидно, что

$$J(t) = \frac{1}{p}(K' + \gamma K).$$

Следовательно, общая сумма инвестиций за период $[t_0, t]$составит величину

$$\frac{1}{p}[K(t) - K_0] + \int_{t_0}^{t} \gamma(\sigma) K(\sigma) d\sigma.$$

10. Обоснованные цены по уровню актива. Под активом $q(t)$ понимается совокупность (в денежном выражении) всех принадлежащих данному предприятию материальных ценностей. Будем предполагать, что изменение $q(t)$ пропорционально разности между предложением s и спросом d с коэффициентом пропорциональности $k > 0,$ а изменение цены p также пропорционально отклонению актива q от некоторого фиксированного уровня q_0 с коэффициентом пропорциональности $m > 0$. Следуя условиям задачи, можно записать:

$$q' = k\big(s(p) - d(p)\big), p' = -m(q - q_0).$$

Учитывается, что предложение s и спрос d являются функциями цены p. Рассмотрим простейший случай линейной зависимости s, d от цены p:

$$s(p) = ap + s_0, d(p) = -cp + d_0, a > 0, c > 0.$$

Тогда система уравнений приобретает вид:

$$q' = k(ap + s_0 + cp - d_0),\ p' = m(q_0 - q).$$

Дифференцируя второе уравнение и подставляя в первое, получим линейное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$p'' + mk(a + c)p = mk(d_0 - s_0),$$

корнями характеристического многочлена которого будут $\delta_{1,2} = \pm i\alpha,$ где $\alpha^2 = mk(a + c)$. Общее решение имеет вид:

$$p = p_0 + c_1 \cos \alpha t + c_2 \sin \alpha t\,, p_0 = \frac{d_0 - s_0}{a + c}.$$

Аналогично,

$$q = q_0 + \frac{\alpha}{m}(c_1 \sin \alpha t - c_2 \cos \alpha t).$$

Пусть начальная цена устанавливается равной p_0 (то есть $c_1 = 0$). Тогда между ценой и уровнем актива выполняется соотношение:

$$(p - p_0)^2 + \left[\frac{m}{\alpha}(q - q_0)\right]^2 = c^2{}_2.$$

Эта кривая описывает динамическое равновесие рассматриваемого процесса. Подставляя в это уравнение значения (p_1, q_1), взятые в какой-то момент времени $t = t_1$, точно можно определить эту кривую (овал типа эллипса), отвечающую полученному значению $A = {c^2}_2 > 0$. Не желая находиться в указанном равновесном состоянии, мы должны определять значение цены с помощью уровня актива по формуле:

$$p = p_0 + \sqrt{A^2 - \left[\frac{m}{\alpha}(q - q_0)\right]^2}.$$

Библиографический список

1. Демидович Б. П., Кудрявцев В. А. Краткий курс высшей математики. М.:АСтрель:АСТ,2007. -.425 с.
2. Высшая математика для экономистов. Учеб. для вузов / под ред. Н. Ш. Кремера. М.: ЮНИТИ-ДАНА,2008.-.342 с.
3. Карасев А. И., Аксютина З. М., Савельева Т. И. Курс высшей математики для экономических вузов. Часть 1,2: М.: Высшая школа. 1982.-.272, 320 с.
4. Практикум по высшей математике для экономистов. Учебное пособие для вузов / под ред. Н. Ш. Кремера. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. -354с.
5. Высшая математика для экономических специальностей (ч.1,2) учеб. и практикум/ под ред.Н. Ш. Кремера. М.: Высш. образование, 2008. – 344,410 с.
6. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах в 2 ч. М.:ОНИКС-21 век. Мир и образование, 2005.- 304,415 с.
7. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике.- М.: Изд-во физико-мат. лит., 2005.-.352 с.
8. Самаров К. Л. Задачи с решениями по высшей математике и математическим методам в экономике. М: Дашков и К, 2007. -424 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Сахарова Людмила Викторовна

МАТЕМАТИКА

УЧЕБНИК

Редактирование, корректура *Грузинская Т.А.*
Верстка, макетирование *Саркисова Е.В.*
Дизайн обложки *Климова В.В.*

Изд. № 76/2989. Подписано к печати 21.07.2017.
Объем 7,3 усл. п. л. Формат 60x84/16. Гарнитура Times.
Печать цифровая. Бумага офсетная.
Тираж 500 экз. Заказ № 145.

344002, Ростов-на-Дону, Б. Садовая, 69, РГЭУ (РИНХ), к. 152.
Издательско-полиграфический комплекс РГЭУ (РИНХ)