Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Ростовский государственный экономический университет (РИНХ)»

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ФИНАНСОВОГО АНАЛИЗА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Ростов-на-Дону
2018 г.

УДК
ББК
Рецензенты:
д.ф.-м. н., профессор кафедры «Дифференциальные и интегральные уравнения» ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет» ***Боев Н.В.***
к.э.н., доцент кафедры «Фундаментальная и прикладная математика» ФГБОУ ВПО РГЭУ (РИНХ) ***Алексейчик Т.В.***
Составители: ***Сахарова Людмила Викторовна***
Рогожин Сергей Владимирович

Математические методы финансового анализа: методические указания / Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Ростовский государственный экономический университет (РИНХ)» – Ростов-на-Дону: Издательско-полиграфический комплекс РГЭУ (РИНХ), 2018 - 100 с.

Методические указания содержат теоретический материал, а также 50 задач по математическим методам финансового анализа в условиях определенности, то есть в предположении, что данные для анализа заранее известны и фиксированы. Материал сгруппирован в двенадцать параграфов, содержащих основополагающие понятия и формулы, а также подробный разбор сферы и результатов применения различных методов наращения (дисконтирования) денежных сумм. Подробно рассмотрены понятие финансовой операции и методы определения ее доходности. Освещены основные понятия теории потоков платежей, что создает основу для анализа производственных и финансовых инвестиций в условиях определенности.

Пособие предназначено для проведения занятий по дисциплине «Математические методы финансового анализа», а также организации домашней самостоятельной работы студентов очной и очно-заочной формы обучения направления подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика.

Печатается по решению кафедры фундаментальной и прикладной математики ФБГОУ ВПО «Ростовский государственный экономический университет (РИНХ)»

УДК

Предисловие

Настоящее пособие соответствует программе дисциплины «Математические методы финансового анализа» для бакалавров очной и очно-заочной формы обучения направления подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика. Оно содержит обзор теории, а также задачи различных уровней сложности по двенадцати темам дисциплины «Математические методы финансового анализа» (финансовый анализ в условиях определенности): «Методы наращения и дисконтирования денежных сумм», «Доходность финансовой операции», «Эквивалентные серии платежей», «Потоки платежей. Основные характеристики потока платежей», «Финансовая рента», «Оценка эффективности инвестиционных проектов», «Зависимость показателей эффективности от параметров инвестиционного проекта», «Внутренняя доходность облигации», «Купонная облигация», «Факторы, влияющие на величину изменения цены облигации при изменении ее внутренней доходности», «Дюрация и показатель выпуклости облигации», «Временная зависимость стоимости инвестиции в облигацию. Иммунизирующее свойство дюрации облигации».

Финансовый анализ в условиях определенности предполагает, что данные для анализа заранее известны и фиксированы. Получение будущих доходов точно в указанные сроки и в полном объеме считается гарантированным, т.е. отсутствует риск неплатежа. Материал сгруппирован в двенадцать параграфов, содержащих основополагающие понятия и формулы, а также подробный разбор сферы и результатов применения различных методов наращения (дисконтирования) денежных сумм. Подробно рассмотрены понятие финансовой операции и методы определения ее доходности. Освещены основные понятия теории потоков платежей, что создает основу для анализа производственных и финансовых инвестиций в условиях определенности.

Количество задач, содержащихся в пособии, позволяет варьировать материал, используемый преподавателем для проведения занятий, домашних заданий и подготовки к выполнению индивидуального домашнего задания.

Символика и терминология соответствуют учебным пособиям, рекомендуемым программой курса дисциплины «Математические методы финансового анализа».

§ 1. Методы наращения и дисконтирования денежных сумм

1.1. Основные определения и формулы

Большая часть финансовых сделок связана с предоставлением денег в долг. При этом как правило заемщик платит кредитору проценты за пользование ссудой. Величина процентной ставки определяется балансом спроса и предложения, степенью риска и величиной инфляции. Кроме того, процентная ставка учитывает фактор времени, так как деньги, относящиеся к разным моментам времени, неравноценны. Согласно принципу неравноценности денег во времени, современные деньги ценнее будущих. В данном параграфе рассматриваются методы наращения и дисконтирования денежных сумм при однократном предоставлении денег в долг.

Будем использовать следующие обозначения: $t = 0$ - момент предоставления денег в долг (настоящий момент времени); T или n - срок долга; P_t - сумма, предоставленная в долг в момент времени t; P_0 - сумма, предоставленная в долг в момент времени $t = 0$; S_t - сумма погашаемого долга в момент t; i - процентная ставка (наращения); d - учетная ставка.

Предоставление денег в долг как правило связано с одной из двух операций - наращения или дисконтирования денежной суммы.

Операция наращения применяется тогда, когда заданы сумма первоначального долга $P0$, процентная ставка и срок долга T. Требуется найти сумму погашаемого долга ST.

Определение. Процесс увеличения суммы долга в связи с присоединением к нему начисленных процентов называется наращением суммы первоначального долга. Найденную наращением сумму погашаемого долга называют наращенной суммой долга.

Операция дисконтирования применяется тогда, когда заданы сумма погашаемого долга ST, которую следует уплатить через время T, а также процентная ставка. Требуется найти сумму первоначального долга $P0$. В этом случае говорят, что сумма ST дисконтируется или учитывается.

Определение. Процесс уменьшения суммы погашаемого долга в связи с начислением и удержанием процентов называется дисконтированием или учетом погашаемого долга, а сами начисленные и удержанные проценты называются дисконтом.

Найденную дисконтированием сумму первоначального долга $P0$ называют современной или приведенной к моменту $t = 0$ величиной погашаемого долга ST. Таким образом, современная величина суммы ST, подлежащей выплате через время T, это сумма денег $P0$, которая, будучи вложенной в момент $t = 0$, через время T даст сумму ST.

Определение. Проценты, или процентные деньги, - это абсолютная величина дохода от предоставления денег в долг на время T.

Если доход определяется операцией наращения, то проценты вычисляют по формуле

$$I(T) = ST - P0. \qquad (1.1)$$

Если доход определяется операцией дисконтирования, то проценты называют дисконтом и вычисляют по формуле

$$D(T) = ST - P0. \qquad (1.2)$$

В финансовой математике различают два вида ставок начисления процентов: процентная ставка и учетная ставка. Пусть t^* - фиксированный отрезок времени (например: 1 месяц, 6 месяцев, 1 год), $P0$ - сумма, предоставленная в долг в момент $t = 0$ на время t^*, S_{t^*} - сумма погашаемого долга в момент t^*.

Определение. Процентная ставка i за период t^* - это отношение дохода за время t^* к сумме вложенных средств:

$$i = \frac{S_{t^*} - P_0}{P_0} \qquad (1.3)$$

Учетная ставка d за период t^* - это отношение дохода за время t^* к сумме погашаемого долга:

$$d = \frac{S_{t^*} - P_0}{S_{t^*}} \qquad (1.4)$$

Обе ставки выражаются в процентах или десятичных дробях.

Определение. Отрезок времени t^*, к которому приурочена процентная ставка, называется периодом начисления процентов. В операции наращения период начисления процентов называют также периодом наращения. В операции дисконтирования период начисления процентов называют также периодом дисконтирования.

В зависимости от выбранного отрезка t^* процентную ставку называют ежемесячной, полугодовой, годовой и т.д. При этом подразумевается однократное начисление процентов по этой ставке за период. Чаще всего применяется годовая процентная ставка.

Определение. Число $n = \frac{T}{t^*}$ называется числом периодов начисления процентов в сроке долга T.

Если срок долга измеряется в числе периодов начисления процентов n, то отрезок t*, т.е. один период начисления процентов, принимается за единицу измерения времени, а ставки i и d называют процентными ставками за единицу времени. При этом сумма погашаемого долга обозначается через Sn.

$$i = \frac{S_1 - P_0}{P_0} \tag{1.5}$$

$$d = \frac{S_1 - P_0}{S_1}. \tag{1.6}$$

Формулы (1.5), (1.6) (как и (1.3), (1.4)) означают существование двух принципов расчета процентов. Рассмотрим инвестирование суммы $P0$ в момент $t = 0$ на один период. Как следует из (1.5), в момент $t = 1$, т.е. в конце периода, инвестору будет возвращена сумма $S1 = P0 + iP0$. При этом сумма $iP0$, выплачиваемая в момент $t = 1$, это проценты $I(1) = S1 – P0 = iP0$ за время [0, 1] на заем величиной $P0$ в момент $t = 0$. Таким образом, проценты по ставке i начисляются на сумму первоначального долга $P0$ в момент $t = 1$.

Согласно (1.6), в обмен на возврат суммы $S1$ в момент $t = 1$ инвестор даст взаймы сумму $P0 = S1 – dS1$. В этом случае проценты по ставке d начисляются в начальный момент времени $t = 0$ на сумму погашаемого долга $S1$. Сумма $P0$ может рассматриваться как заем суммы $S1$, возвращаемой через единицу времени, при котором проценты величиной $dS1$ выплачиваются заранее, в момент $t = 0$, и составляют доход кредитора $D(1) = S1 – P0 = dS1$ за время [0, 1].

Таким образом, проценты по ставке i начисляются в конце периода начисления процентов, а проценты по учетной ставке d - в начале периода начисления процентов. Проценты различают по базе для их начисления.

Определение. Процентная ставка называется простой, если на каждом периоде база для начисления процентов является постоянной. Процентная ставка называется сложной, если на каждом периоде базой для начисления процентов является сумма, полученная на предыдущем периоде наращения или дисконтирования.

1.2. Методы наращения по ставке *i*

Рассмотрим задачу. На банковский счет размещена сумма $P0$ под годовую ставку i без промежуточных выплат на счет или со счета. Какова будет сумма вклада через n лет?

1) Наращение по простой ставке *i*. Здесь $t = 0$ - момент размещения сум-

мы $P0$ на банковский счет. Единица измерения времени - 1 год. Как следует из (1.5), проценты за первый год вклада равны $I1 = iP0$. Согласно определению простой процентной ставки, проценты за каждый год вклада одинаковы и равны

$$I1 = I2 = \ldots = In = iP0. \qquad (1.7)$$

Накопленные проценты за весь срок вклада n лет составят

$$I(n) = I1 + I2 + \ldots + In = niP0. \qquad (1.8)$$

Тогда наращенная сумма вклада через n лет станет равной

$$Sn = P0 + I(n).$$

Отсюда

$$Sn = P0\,(1 + in). \qquad (1.9)$$

Таким образом, если через n лет счет закрывается, то инвестору выплачивается сумма $P0(1 + in)$. Этот платеж состоит из возврата исходного вложения $P0$ и процентов $I(n) = niP0$. (1.9) - формула наращенной суммы долга по простой процентной ставке i в течение n периодов. $I1$, $I2$,…, In – проценты за каждый период (единицу времени). В формуле (1.9) n необязательно целое. Нормальная коммерческая практика по отношению к дробным периодам года заключается в платеже процентов на пропорциональной основе. Это позволяет рассматривать выражения (1.8) и (1.9) как применимые ко всем неотрицательным значениям n. Формулой (1.9) обычно пользуются, если срок долга меньше года. Если i - годовая ставка, t - число дней в сроке долга, то $n = \frac{t}{K}$, где K – число дней в году (временная база). Правила выбора временной базы и подсчета числа дней в сроке долга подробно рассмотрены в литературе, например [1,2,5].

Как следует из равенств (1.7), особенностью простых процентов является то, что проценты, будучи зачисленными на счет, сами по себе не зарабатывают дальнейших процентов.

Пример 1.1. В конце третьего квартала сумма вклада стала равной 180 д.е. Найти величину годовой процентной ставки, по которой начислялись проценты в сумме 5 д.е. за каждый квартал.

Так как проценты начисляются в конце каждого квартала, то за единицу измерения времени можно принять 1 квартал. Тогда в конце каждого квартала проценты начисляются по квартальной процентной ставке $\frac{i}{4}$, где i - годовая процентная ставка. Срок вклада $n = 3$ квартала (единицы времени). Наращенная сумма вклада Sn = 180 д.е. Проценты за каждый квартал (единицу времени) составляют $I1 = I2 = I3 = 5 = I$. Следовательно, для наращения вклада применяется простая процентная ставка. Проценты за весь срок вклада $I(n) = nI$ = 15 д.е. Так как $Sn = P0 + I(n)$, то сумма первоначального вклада $P0 = Sn - I(n)$ = 165 д.е. Поскольку $I = \frac{i}{4}P_0$, то годовая процентная ставка по вкладу $i = \frac{5}{165}\cdot 4 = \frac{4}{33}$.

2) Наращение по сложной ставке i. Будем считать, что в момент $t = 0$ сумма $P0$ размещена на банковский счет под сложную годовую процентную ставку. Согласно определению сложной процентной ставки, базой для начисления процентов на каждом периоде является сумма, полученная на предыдущем периоде наращения. Следовательно, проценты за каждый год вклада составляют: $I1 = iP0$, $I2 = iS1$, …, $In{-}1 = iSn{-}2$, $In = iSn{-}1$, где $S1$, …, $Sn{-}2$, $Sn{-}1$ - суммы вклада в конце соответствующего периода наращения. Очевидно, что

$$\begin{aligned} I2 &= I1(1 + i),\\ &\ldots\ldots\ldots\\ In &= In{-}1(1 + i). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Следовательно, $I1$, $I2$, … , In - члены геометрической прогрессии с первым членом $I1$ и знаменателем $(1 + i)$. Проценты за весь срок вклада составляют $I(n) = I1 + I2 + … + In$. По формуле суммы n членов геометрической прогрессии находим

$$I(n) = I1\ \frac{(1+i)^n-1}{(1+i)-1} = I_1\frac{(1+i)^n-1}{i} = P_0\left((1+i)^n-1\right). \tag{1.12}$$

Наращенная сумма вклада через n лет станет равной $Sn = P0 + I(n)$. Отсюда

$$Sn = P0(1 + i)n. \tag{1.13}$$

Если инвестор закроет свой счет через n лет, он получит сумму $P0(1 + i)n$. Этот платеж состоит из возврата исходного вклада $P0$ вместе с накопленными процентами (1.12). (1.13) - формула наращенной суммы долга при начислении сложных процентов по ставке i в течение n периодов. $I1$, $I2$,…, In - проценты за каждый период (единицу времени). Выражение (1.13) остается верным для всех неотрицательных значений n.

Как видим из (1.11), особенностью сложных процентов является то, что проценты сами зарабатывают проценты. Вследствие этого влияние сложных процентов на накопление на счете может быть очень значительным, особенно если длительность счета или процентная ставка велики.

Пример 1.2. Какова сумма первоначального вклада, размещенного под сложную процентную ставку, если проценты за первый и второй годы соответственно составили 20 и 21,6 д.е.?

Используем полученные соотношения для сложных процентов. Если единицей измерения времени является 1 год, то $I1 = 20$ д.е., $I2 = 21{,}6$ д.е., $I2 = I1(1 + i)$, где i - годовая процентная ставка. Отсюда $i = 0{,}08$. Так как $I1 = iP0$, то сумма первоначального вклада $P0 = 250$ д.е.

3) Наращение суммы вклада по номинальной ставке. Если сложные проценты начисляются не один, а m раз в году, то годовую процентную ставку называют номинальной и обозначают через $i(m)$. Общее определениие номинальной процентной ставки будет рассмотрено позже. В случае начисления процентов m раз в году годовую номинальную процентную ставку можно определить следующим образом.

Определение. Годовая процентная ставка $i(m)$ называется номинальной, если для начисления сложных процентов за $\frac{1}{m}$ часть года применяется ставка $\frac{i^{(m)}}{m}$.

Таким образом, если сложные проценты начисляются через равные промежутки времени m раз в году, то в конце каждого периода длиной $\frac{1}{m}$ проценты начисляются по ставке $\frac{i^{(m)}}{m}$. Если срок долга n лет, то mn - число периодов применения ставки $\frac{i^{(m)}}{m}$ в сроке долга. Из формулы (1.13) получаем

$$S_n = P_0\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mn}, \tag{1.14}$$

где $m \geq 1$. Если $m = 1$, то $i(1) = i$, т.е. номинальная ставка совпадает с годовой ставкой сложных процентов, применяемой раз в году. (1.14) – формула наращенной суммы долга по номинальной ставке $i(m)$ при начислении сложных процентов m раз в году в течение n лет.

4) Непрерывное начисление сложных процентов. Непрерывное начисление процентов - это начисление процентов за бесконечно малые отрезки времени, т.е. при $\frac{1}{m} \to 0$ (или при $m \to \infty$). При непрерывном начислении сложных процентов, когда $m \to \infty$, годовую номинальную процентную ставку обозначают через δ и называют силой роста или интенсивностью процентов, а также непрерывной процентной ставкой. Таким образом, процентная ставка при непрерывном начислении процентов δ - это годовая номинальная процентная ставка при начислении процентов за бесконечно малые отрезки времени.

Перейдем к пределу при $m \to \infty$ в выражении (1.14), учитывая, что при m

$\to \infty$ годовую номинальную процентную ставку обозначают через δ:

$$S_n = P_0 \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{\delta}{m}\right)^{mn} = P_0 e^{\lim\limits_{m\to\infty} mn \ln\left(1+\frac{\delta}{m}\right)} = P_0 e^{\lim\limits_{m\to\infty} mn \frac{\delta}{m}} = P_0 e^{n\delta} .$$

Таким образом,

$$Sn = P0\ exp(n\delta). \tag{1.15}$$

(1.15) – формула наращенной суммы долга при постоянной интенсивности процентов в единицу времени δ в течение n периодов. Хотя это математическая идеализация реальности, процессы начисления процентов часто бывает удобно рассматривать как непрерывные.

Пример 1.3. Сравнить сроки удвоения суммы 1000 д.е. при начислении сложных процентов по годовой номинальной процентной ставке 0,1 а) по полугодиям; б) ежеквартально; в) непрерывно.

Согласно условию, $P0$ = 1000 д.е., $\frac{S_n}{P_0}$ = 2, а) m = 2, $i(2)$ = 0,1; б) m = 4, $i(4)$ = 0,1; в) $m \to \infty$, δ = 0,1. Из формул (1.14) и (1.15) получаем

$$n = \frac{\ln 2}{m\ln\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)}$$ для случаев а), б) и в случае в) $n = \frac{\ln 2}{\delta}$.

Отсюда находим, что первоначальная сумма 1000 д.е. вырастет до 2000 д.е. за а) 7,103 года или 7 лет и 38 дней; б) 7,018 года или 7 лет и 6 дней; в) 6,931 года или 6 лет и 340 дней. Как видим, с увеличением частоты начисления процентов в году срок удвоения суммы уменьшается.

Итак, в зависимости от способа применения процентной ставки i имеем четыре метода наращения суммы долга по этой ставке: по простой (1.9), сложной (1.13), номинальной (1.14), при постоянной интенсивности процентов в единицу времени (или по постоянной силе роста) (1.15). Методы наращения по учетной ставке d будут рассмотрены позже.

1.3. Методы дисконтирования

В зависимости от вида процентной ставки применяют два метода дисконтирования. **Математическое дисконтирование** – формальное решение задачи, обратной задаче о наращении суммы долга. Сформулируем эту задачу в общем виде. Какую сумму $P0$ необходимо выдать в долг в момент t = 0, чтобы при начислении на эту сумму процентов по ставке i за единицу времени в течение n периодов получить подлежащую выплате в конце срок долга n сумму Sn ? В зависимости от способа применения процентной ставки i из формул (1.9), (1.13), (1.14), (1.15) получаем

$$P_0 = \frac{S_n}{1+in}, \tag{1.16}$$

$$P_0 = \frac{S_n}{(1+i)^n}, \tag{1.17}$$

$$P_0 = \frac{S_n}{\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mn}}, \tag{1.18}$$

$$P_0 = S_n e^{-n\delta}. \tag{1.19}$$

(1.16) – (1.19) – формулы современной величины суммы Sn при математическом ее учете по ставке i простыми процентами (1.16), сложными (1.17), по номинальной ставке (1.18), по постоянной силе роста (1.19) в течение n периодов.

Коммерческий (банковский) учет. Сформулируем задачу банковского дисконтирования. По заданной сумме Sn, которая будет выплачена через время n, требуется определить сумму займа $P0$ в настоящий момент, при котором проценты за пользование ссудой выплачиваются заранее, в момент предоставления денег в долг $t = 0$. Для начисления и удержания процентов применяется учетная ставка d .

<u>1) Простая ставка дисконтирования d.</u> Имеем: $t = n$ – момент погашения суммы Sn. Согласно определению учетной ставки (1.6), сумма, которую необходимо выдать в долг в момент $t = n - 1$, за единицу времени до погашения суммы Sn, есть

$$Pn\text{-}1 = Sn - dSn.$$

Тогда величина дисконта за последний, n – й, период дисконтирования равна $Dn = dSn$. Так как d - простая учетная ставка, то суммы дисконта за каждый период дисконтирования одинаковы и равны

$$Dn = Dn - 1 = \ldots = D1 = dSn.$$

Величина дисконта за весь срок долга n составляет

$$D(n) = Dn + Dn - 1 + \ldots + D1 = ndSn.$$

Согласно (1.2), $D(n) = Sn -$ P0. Тогда

$$P0 = Sn\,(1 - nd\,). \tag{1.20}$$

– формула современной величины суммы Sn при банковском ее учете простыми дисконтами по ставке d в течение n периодов. Суммы $Dn, Dn - 1, \ldots, D1$ - дисконты за каждый период (единицу времени). Выражение (1.20) означает, что в обмен на выплату суммы Sn через время n кредитор даст взаймы сумму Sn(1–

nd) в начале этого срока. Заметим, что формула (1.20) справедлива, если срок долга n и учетная ставка d удовлетворяют условию $nd < 1$. Дисконтирование по простой учетной ставке применяют, как правило, в случае краткосрочных сделок, когда $0 < n \le 1$ и $0 < d < 1$.

Пример 1.4. Вексель, погашаемый 1 января 2002 года, учтен за 10 месяцев до его погашения на сумму 180 д.е. Какова величина годовой учетной ставки, если ежемесячный дисконт составляет 2 д.е.?

Так как проценты удерживаются за каждый месяц, то за единицу измерения времени можно принять 1 месяц. Тогда в начале каждого месяца проценты начисляются по ежемесячной учетной ставке $\frac{d}{12}$, где d - годовая учетная ставка. Срок погашения векселя $n = 10$ единиц времени. Сумма $P0 = 180$ – приведенная (к моменту учета векселя $t = 0$) величина суммы Sn, погашаемой по векселю. Дисконты за каждый период (единицу времени) составляют $D10 = D9 = \ldots = D1 = 2 = D$. Следовательно, вексель учтен по простой учетной ставке. Размер дисконта за весь срок $D(n) = nD$. Так как $P0 = Sn - nD$, то сумма, погашаемая по векселю, $Sn = 200$ д.е. Поскольку $D = \frac{d}{12}Sn$, то годовая учетная ставка $d = 0{,}12$.

<u>2) Сложная ставка дисконтирования *d*.</u> Согласно определению сложной процентной ставки, базой для начисления процентов на каждом периоде является сумма, полученная на предыдущем периоде дисконтирования. Так как для начисления процентов применяется учетная ставка d, то проценты начисляются в начале каждого периода. Рассмотрим процесс дисконтирования суммы Sn по периодам, начиная с n - го. Такой порядок рассмотрения периодов означает, что n - й период дисконтирования является предыдущим по отношению к $(n - 1)$ - му, $(n - 1)$ - й период является предыдущим по отношению к $(n - 2)$ - му и т. д.

Сумма, которую необходимо выдать в долг в момент $t = n - 1$, т.е. за единицу времени до погашения суммы Sn, есть

$$Pn - 1 = Sn - D(1) = Sn - Dn.$$

$Pn - 1$ - приведенная к моменту $t = n - 1$ величина суммы Sn. $D(1)$ - величина дисконта за один, n – й, период, $D(1) = Dn = dSn$. Так как $Pn - 1$ - это сумма, полученная на n - м периоде дисконтирования, то величина дисконта на $(n - 1)$ - м периоде дисконтирования равна $Dn - 1 = dPn - 1$.

Сумма, которую необходимо выдать в долг в момент $t = n - 2$, за два периода до погашения суммы Sn, есть:

$$Pn - 2 = Sn - D(2) = Sn - Dn - Dn - 1 = Pn - 1 - Dn - 1.$$

$Pn–2$ - приведенная к моменту $t = n - 2$ величина суммы Sn. $D(2)$ - величина дисконта за 2 периода, n - й и $(n - 1)$ - й, $D(2) = Dn + Dn - 1$. Так как $Pn–2$ - это сумма, полученная на $(n - 1)$ - м периоде дисконтирования, то величина дисконта на $(n - 2)$ - м периоде составляет $Dn - 2 = dPn - 2$. И так далее.

Приведенная к моменту $t = 0$ величина суммы Sn - это сумма $P0$, которую необходимо выдать в долг в момент $t = 0$ за n периодов до погашения суммы Sn. $Dn, Dn–1, \ldots ,D1$ - члены геометрической прогрессии с первым членом Dn и знаменателем $(1 - d)$. Величина дисконта за весь срок долга n составляет

$$D(n) = Dn + Dn - 1 + \ldots + D1.$$

По формуле суммы n членов геометрической прогрессии получаем

$$P0 = Sn(1 - d)n. \tag{1.21}$$

(1.21) – формула современной величины суммы Sn при банковском ее учете сложными процентами по учетной ставке d в течение n периодов.

Пример 1.5. Государственная облигация учтена за пять лет до погашения. Какова сумма, погашаемая по облигации, если дисконты за последний и предпоследний годы до погашения составили соответственно 2000 и 1600 д.е. ?

Используем полученные соотношения для сложных дисконтов. Если единицей измерения времени является 1 год, то срок долга $n = 5$ лет, $D4 = 1600$ д.е., $D5 = 2000$ д.е., $D4 = D5(1 - d)$, где d - годовая учетная ставка. Отсюда $d = 0,2$. Так как $D5 = dS5$, то погашаемая сумма $S5 = 10000$ д.е.

3) Дисконтирование по номинальной учетной ставке.

Если дисконтирование по сложной учетной ставке производится не один, а m раз в году, то годовую учетную ставку называют номинальной и обозначают через $d(m)$.

Определение. Годовая учетная ставка $d(m)$ называется номинальной, если для дисконтирования в течение $\frac{1}{m}$ части года применяется сложная учетная ставка $\frac{d^{(m)}}{m}$. Таким образом, если дисконтирование по сложной учетной ставке производится через равные промежутки времени m раз в году, то в начале каждого периода длиной $\frac{1}{m}$ начисляются и удерживаются проценты по ставке $\frac{d^{(m)}}{m}$. Если срок долга n лет, то mn - число периодов применения ставки $\frac{d^{(m)}}{m}$ в сроке долга. Из формулы (1.21) получаем

$$P_0 = S_n \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^{mn}, \qquad (1.22)$$

где $m \geq 1$. Если $m = 1$, то $d(1) = d$, т.е. номинальная учетная ставка совпадает с годовой учетной ставкой сложных процентов, применяемой раз в году. (1.22) – формула учета суммы Sn при m-разовом дисконтировании в году по номинальной учетной ставке $d(m)$ в течение n лет.

4) Непрерывное дисконтирование по сложной учетной ставке. Непрерывное дисконтирование - это дисконтирование на бесконечно малых отрезках времени, т.е. при $\frac{1}{m} \to 0$ (или при $m \to \infty$). Так как при непрерывном начислении процентов начало и конец периода начисления процентов совпадают, то номинальные процентные ставки $i(m)$ и $d(m)$ при $m \to \infty$ перестают различаться. Поэтому при $m \to \infty$ пользуются одной процентной ставкой - силой роста δ. Тогда при непрерывном дисконтировании справедлива формула (1.19): $P_0 = S_n e^{-n\delta}$.

Пример 1.6. 10 тыс. д.е. должны быть возвращены через 5 лет. Сравнить современные величины этого долга при его дисконтировании по годовой номинальной учетной ставке 0,12 а) по полугодиям; б) ежеквартально; в) непрерывно.

Согласно условию, $n = 5$, $S5 = 10\ 000$, а) $m = 2$, $d(2) = 0{,}12$; б) $m = 4$, $d(4) = 0{,}12$; в) $m \to \infty$, $\delta = 0{,}12$. Из формул (1.22) и (1.19) получаем:

$P_0 = S_5 \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^{5m}$ для случаев а) и б) и $P_0 = S_5 e^{-5\delta}$ в случае в).

Отсюда современная величина суммы 10 тыс. д.е., срок погашения которой через 5 лет, при ее дисконтировании по годовой номинальной учетной ставке в зависимости от m составляет а) 5386,15 д.е.; б) 5437,94 д.е.; в) 5488,12 д.е. Как видим, с увеличением m современная стоимость суммы 10 000 д.е. увеличивается. Итак, в зависимости от способа применения учетной ставки d имеем четыре метода дисконтирования суммы долга Sn по этой ставке: по простой (1.20),сложной (1.21), номинальной (1.22), по постоянной силе роста (1.19).

1.4. Наращение по учетной ставке

Если решается задача, обратная банковскому дисконтированию, то для нахождения суммы погашаемого долга пользуются учетной ставкой. Например, в этом возникает необходимость при определении суммы, которую надо проставить в векселе, если задана текущая сумма долга. Из формул (1.20), (1.21), (1.22), находим

$$S_n = \frac{P_0}{1-nd} \quad , \tag{1.23}$$

$$S_n = \frac{P_0}{(1-d)^n} \quad , \tag{1.24}$$

$$S_n = \frac{P_0}{\left(1-\dfrac{d^{(m)}}{m}\right)^{mn}} \quad . \tag{1.25}$$

При непрерывном наращении по сложной учетной ставке справедлива формула (1.15) (при $m \to \infty$ номинальные процентные ставки $i(m)$ и $d(m)$ перестают различаться).

Определение. Число, показывающее во сколько раз наращенная сумма долга больше первоначальной, называется множителем наращения (или множителем накопления).

Экономический смысл множителя наращения заключается в следующем. Если срок долга n единиц времени, то множитель наращения показывает накопленную к моменту n будующую стоимость 1 д.е., вложенной в момент t = 0 на срок n. Очевидно, что множитель наращения больше 1. Интенсивность процесса наращения определяется множителем наращения. Сравнивая эти множители для каждого значения срока n, считая равными процентные ставки за 1 времени, можно сравнить темпы наращения по различным ставкам. Для этого рассмотрим отношения множителей наращения. Используем формулу разложения в степенной ряд функции

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2}x^2 + \ldots \ , \ -1 < x \le 1 .$$

Сравним темпы наращения по номинальной и простой процентным ставкам:

$$\frac{\left(1+\dfrac{i^{(m)}}{m}\right)^{mn}}{1+in} = \frac{1+i^{(m)}n + \dfrac{mn(mn-1)}{2}\left(\dfrac{i^{(m)}}{m}\right)^2 + \ldots}{1+in}\Bigg|_{i=i^{(m)}} = \frac{1+in+\dfrac{n(n-\frac{1}{m})}{2}i^2+\ldots}{1+in} =$$

$$= 1 + \frac{ni^2}{2(1+in)}(n-\frac{1}{m}) + \ldots = \begin{cases} <1, \ n < \dfrac{1}{m} \\ \ 1, \ n = \dfrac{1}{m} \\ >1, \ n > \dfrac{1}{m} \end{cases} . \tag{1.26}$$

Отсюда сразу получаем отношение множителей наращения по сложной ($m = 1$) и простой процентным ставкам:

$$\frac{(1+i)^n}{1+in} = \begin{cases} <1, & n<1 \\ 1, & n=1 \\ >1, & n>1 \end{cases}. \tag{1.27}$$

Сравним темпы наращения по номинальной процентной ставке в зависимости от m. Пусть $1 \le m1 < m2$. Тогда

$$\frac{\left(1+\frac{i^{(m_1)}}{m_1}\right)^{m_1 n}}{\left(1+\frac{i^{(m_2)}}{m_2}\right)^{m_2 n}} = \left.\frac{1+i^{(m_1)}n+\frac{m_1 n(m_1 n-1)}{2}\left(\frac{i^{(m_1)}}{m_1}\right)^2+\ldots}{1+i^{(m_2)}n+\frac{m_2 n(m_2 n-1)}{2}\left(\frac{i^{(m_2)}}{m_2}\right)^2+\ldots}\right|_{i^{(m_1)}=i^{(m_2)}=j} =$$

$$= \frac{1+jn+\frac{n(n-\frac{1}{m_1})}{2}j^2+\ldots}{1+jn+\frac{n(n-\frac{1}{m_2})}{2}j^2+\ldots} < 1 \tag{1.28}$$

для любого срока n. Следовательно, чем больше m, тем быстрее наращение по номинальной процентной ставке $i(m)$. Самое быстрое наращение по номинальной процентной ставке производится по постоянной силе роста δ, когда $m \to \infty$, а самое медленное наращение соответствует значению $m = 1$ (наращение по сложной процентной ставке). Таким образом, имеем следующие соотношения множителей наращения по ставке i в зависимости от срока n:

$$\begin{aligned} &0<n\le\frac{1}{m}: \quad (1+i)^n < \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mn} \le 1+in < e^{n\delta}; \\ &\frac{1}{m}<n\le 1: \quad (1+i)^n \le 1+in < \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mn} < e^{n\delta}; \\ &n>1: \quad 1+in < (1+i)^n < \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mn} < e^{n\delta}. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Рассмотрим сравнение темпов наращения по учетной ставке. Сравним множители наращения по простой и номинальной учетным ставкам :

$$\frac{\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{mn}}{1-dn} = \left.\frac{1-d^{(m)}n+\frac{mn(mn-1)}{2}\left(\frac{d^{(m)}}{m}\right)^2+\ldots}{1-dn}\right|_{d=d^{(m)}} = \frac{1-dn+\frac{n(n-\frac{1}{m})}{2}d^2+\ldots}{1-dn} =$$

$$=1+\frac{nd^2}{2(1-dn)}(n-\frac{1}{m})+\ldots=\begin{cases}<1, & n<\frac{1}{m}\\ 1, & n=\frac{1}{m}\\ >1, & n>\frac{1}{m}\end{cases}. \tag{1.30}$$

Отсюда получаем отношение множителей наращения по простой и сложной ($m = 1$) учетным ставкам:

$$\frac{(1-d)^n}{1-dn}=\begin{cases}<1, & n<1\\ 1, & n=1\\ >1, & n>1\end{cases}. \tag{1.31}$$

Сравним темпы наращения по номинальной учетной ставке в зависимости от m. Пусть $1 \le m1 < m2$. Тогда

$$\frac{\left(1-\dfrac{d^{(m_2)}}{m_2}\right)^{m_2 n}}{\left(1-\dfrac{d^{(m_1)}}{m_1}\right)^{m_1 n}}=\frac{1-d^{(m_2)}n+\dfrac{m_2 n(m_2 n-1)}{2}\left(\dfrac{d^{(m_2)}}{m_2}\right)^2+\ldots.}{1-d^{(m_1)}n+\dfrac{m_1 n(m_1 n-1)}{2}\left(\dfrac{d^{(m_1)}}{m_1}\right)^2+\ldots}\Bigg|_{d^{(m_1)}=d^{(m_2)}=f}=$$

$$=\frac{1-fn+\dfrac{n(n-\frac{1}{m_2})}{2}f^2+\ldots}{1-fn+\dfrac{n(n-\frac{1}{m_1})}{2}f^2+\ldots.}>1 \tag{1.32}$$

для любого срока n. Следовательно, чем больше m, тем медленнее наращение по номинальной учетной ставке $d(m)$. Самое медленное наращение по номинальной учетной ставке производится по постоянной силе роста δ , когда $m \to \infty$, а самое быстрое наращение соответствует значению $m = 1$ (наращение по сложной учетной ставке). Таким образом, имеем следующие соотношения множителей наращения по учетной ставке в зависимости от срока n:

$$0<n\le\frac{1}{m}: \quad e^{n\delta}<\frac{1}{1-nd}\le\frac{1}{\left(1-\dfrac{d^{(m)}}{m}\right)^{mn}}<\frac{1}{(1-d)^n};$$

$$\frac{1}{m}<n\le 1: \quad e^{n\delta}<\frac{1}{\left(1-\dfrac{d^{(m)}}{m}\right)^{mn}}<\frac{1}{1-nd}\le\frac{1}{(1-d)^n}; \tag{1.33}$$

$$1<n<\frac{1}{d}: \quad e^{n\delta}<\frac{1}{\left(1-\dfrac{d^{(m)}}{m}\right)^{mn}}<\frac{1}{(1-d)^n}<\frac{1}{1-nd};$$

$$n > \frac{1}{d}: \qquad e^{n\delta} < \frac{1}{\left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^{mn}} < \frac{1}{(1-d)^n}.$$

Из неравенств (1.29) и (1.33) следует, что при заданном значении срока долга n наращение суммы долга по любой учетной ставке происходит быстрее наращения долга по любой из ставок i.

1.5. Свойства наращенной суммы долга

1. Чем больше срок долга, тем больше наращенная сумма долга Sn.

Действительно, (Sn)/n > 0 для любой процентной ставки.

2. Чем больше процентная ставка, тем быстрее идёт процесс наращения.

Действительно, (Sn)/процентная ставка > 0 для любого метода наращения. С увеличением m процесс наращения по номинальной процентной ставке $i(m)$ ускоряется, а по номинальной учетной ставке $d(m)$ замедляется.

Определение. Число, показывающее какую долю от суммы погашаемого долга составляет его современная величина, называется дисконтным множителем.

Из неравенств (1.29) получаем соотношения дисконтных множителей при математическом дисконтировании:

$$0 < n \le \frac{1}{m}: \qquad \frac{1}{(1+i)^n} > \frac{1}{\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mn}} \ge \frac{1}{1+in} > e^{-n\delta};$$

$$\frac{1}{m} < n \le 1: \qquad \frac{1}{(1+i)^n} \ge \frac{1}{1+in} > \frac{1}{\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mn}} > e^{-n\delta}; \tag{1.34}$$

$$n > 1: \qquad \frac{1}{1+in} > \frac{1}{(1+i)^n} > \frac{1}{\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mn}} > e^{-n\delta}.$$

Если неравенство (1.32) рассматривать как отношение дисконтных множителей для различных значений m при дисконтировании по номинальной учетной ставке $d(m)$, то приходим к следующему выводу. Чем больше m, тем больше современная величина суммы погашаемого долга, т.е. тем медленнее дисконтирование по номинальной учетной ставке $d(m)$. Самое медленное дисконтирование по номинальной учетной ставке соответствует $m \to \infty$ (дисконтирование при постоянной интенсивности процентов δ), самое быстрое дисконтирование соответствует наименьшему значению $m = 1$ (дисконтирование по сложной учетной ставке). Из неравенств (1.33) получаем соотношения дисконтных множителей при банковском учете:

$$0 < n \le \frac{1}{m}: \qquad e^{-n\delta} > 1 - nd \ge \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^{mn} > (1-d)^n;$$

$$\frac{1}{m} < n \le 1: \qquad e^{-n\delta} > \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^{mn} > 1 - nd \ge (1-d)^n; \tag{1.35}$$

$$1 < n < \frac{1}{d}: \qquad e^{-n\delta} > \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^{mn} > (1-d)^n > 1 - nd;$$

$$n > \frac{1}{d}: \qquad e^{-n\delta} > \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^{mn} > (1-d)^n.$$

Из неравенств (1.34) и (1.35) следует, что при любом сроке долга n дисконтирование по любой учетной ставке происходит быстрее дисконтирования по любой из ставок i. Это означает, что метод банковского учета для заданного срока долга даст меньшее значение современной стоимости суммы погашаемого долга, чем любой из методов математического дисконтирования.

1.6. Свойства современной величины суммы погашаемого долга

1. Чем больше срок долга n, тем меньше современная величина $P0$ суммы погашаемого долга Sn.

Действительно, ($P0$)/n < 0 для любого метода дисконтирования.

2. Чем больше процентная ставка, тем сильнее дисконтирование.

Действительно, ($P0$)/процентная ставка < 0 для любого метода дисконтирования.

3. С увеличением m процесс дисконтирования по номинальной процентной ставке $i(m)$ ускоряется, а по номинальной учетной ставке $d(m)$ замедляется.

Из свойств наращенной суммы долга и современной величины суммы погашаемого долга следует, что кредитору выгоднее работать с учетной ставкой, а заемщику – с процентной ставкой i . Рассмотрим некоторые важные понятия, связанные с операциями наращения и дисконтирования суммы долга.

1.7. Эквивалентность процентных ставок

Определение. Процентные ставки различного вида, приводящие к одному и тому же финансовому результату за один и тот же срок, называются эквивалентными.

Равенство финансовых результатов означает то, что три величины - сумма первоначального долга $P0$, погашаемого долга Sn и срок долга n являются постоянными и безразлично, какой метод наращения (или дисконтирования) будет использован в операции. При этом замена одного вида процентной ставки на другой не изменяет финансовых отношений сторон в операции. Соотношения эквивалентности можно получить для любых процентных ставок, приравнивая соответствующие множители наращения или дисконтные множители.

Пример 1.7. Какой простой процентной ставкой можно заменить годовую учетную ставку 15 % при учете векселя за 100 дней до погашения (временная база для процентной ставки 365 дней, для учетной - 360 дней)?

Если $P0$ - сумма, выданная при учете векселя, а Sn - сумма, погашаемая по векселю, то Sn можно рассматривать, как результат наращения суммы $P0$ в течение 100 дней как по ставке i, так и по ставке $d = 0{,}15$. Тогда

$$1 + i\frac{100}{365} = \frac{1}{1 - d\dfrac{100}{360}} ,$$

откуда находим $i = 0{,}158696$ или 15,87 % годовых.

Интенсивность процентов в единицу времени δ удобно использовать в теоретических расчетах и обоснованиях финансовых решений. Используя соотношения эквивалентности, можно перейти от непрерывного начисления процентов к дискретному, что более приемлемо на практике. Чаще возникает необходимость в соотношениях эквивалентности непрерывной и сложной процентных ставок. Для эквивалентных сложных процентных ставок δ, i и d имеем:

$$(1+i)^n = e^{n\delta} = (1-d)^{-n} . \qquad (1.36)$$

Отсюда

$$i = e^{\delta} - 1, \quad \delta = \ln(1+i) ; \qquad (1.37)$$

$$d = 1 - e^{-\delta}, \ \delta = -\ln(1-d) . \qquad (1.38)$$

Пример 1.8. Определить: а) эквивалентную сложную процентную ставку по банковскому вкладу сроком на 5 лет, если банк рассчитывает ее, исходя из постоянной годовой интенсивности процентов 0,07; б) эквивалентную сложную учетную ставку при учете в банке долгового обязательства за 3 года до погашения, если банк исходит из постоянной интенсивности процентов год 0,07.

Здесь $\delta = 0{,}07$. Находим: а) $i = e^{\delta} - 1$ = 0,072508 или 7,25 % годовых; б) $d = 1 - e^{-\delta}$ = 0,067606 или 6,76 % годовых.

Если сумму d отнести к моменту $t = 0$, сумму i – к моменту $t = 1$, а сумма

δ выплачивается непрерывно с постоянной скоростью на временном отрезке [0,1] (каждую из этих сумм можно рассматривать как проценты за время [0,1] на заем 1 д.е., произведенный в момент $t = 0$), то последние равенства можно интерпретировать следующим образом. Наращение суммы d по любой из трех эквивалентных ставок в течение 1 единицы времени даст сумму i. В свою очередь, дисконтирование суммы i по любой из трех эквивалентных ставок в течение 1 единицы времени даст сумму d.

Рассмотрим эквивалентность непрерывной δ и номинальных процентных ставок $i(m)$ и $d(m)$.

Пример 1.9. При условии, что $S10 = 2P0$, найти i, $i(4)$, $i(12)$, $i(52)$, $i(365)$, δ;

Имеем $S_{10} = P_0\left(1+\dfrac{i^{(m)}}{m}\right)^{10m}$ и $S_{10} = P_0 e^{10\delta}$, срок долга 10 лет. Отсюда

$$i^{(m)} = m\left(2^{\frac{1}{10m}} - 1\right) \text{ и } \delta = \frac{\ln 2}{10}.$$

Составим таблицу значений эквивалентных номинальных процентных ставок:

m	1	4	12	52	365	$m \to \infty$
$i\ (m)$	0,071773	0,069918	0,069515	0,069361	0,069321	δ = 0,069315

Пример 1.10. Оценить погрешность приближенного равенства $i \approx \delta + \dfrac{\delta^2}{2}$.

Так как $i = e^{\delta} - 1 = \delta + \dfrac{\delta^2}{2} + \dfrac{\delta^3}{3!} + \dfrac{\delta^4}{4!} = ...$, то задача сводится к оценке суммы остатка ряда: $R_2 = \dfrac{\delta^3}{3!} + \dfrac{\delta^4}{4!} + \dfrac{\delta^5}{5!} + ... = \dfrac{\delta^3}{3!}\left(1 + \dfrac{\delta}{4} + \dfrac{\delta^2}{4\cdot 5} + ...\right) < \dfrac{\delta^3}{3!}\left(1 + \dfrac{\delta}{4} + \left(\dfrac{\delta}{4}\right)^2 + ...\right)$.

Просуммировав бесконечно убывающую геометрическую прогрессию в скобках, получим $R_2 < \dfrac{2\delta^3}{3(4-\delta)}$. Если δ = 0,1, то $R2 < 0{,}00017$. Это значит, что равенство является приближенным с точностью до 0,00017. Если δ = 0,2, то $R2 < 0{,}0014$. Погрешность возросла.

1.8. Номинальные и эффективные процентные ставки

В предыдущих разделах рассматривались годовые номинальные процентные ставки. В этом разделе приводится общее определение номинальной процентной ставки. Оно связано с понятием эффективной процентной ставки.

Определение. Эффективная процентная ставка $i_{ef}^{h}(t)$ за период h единиц времени, начинающийся в момент времени t - это отношение дохода за время h к сумме вложенных средств в начале этого периода.

Если в момент времени t инвестирована сумма Pt , а через время h получена сумма $St + h$, то согласно определению,

$$i_{ef}^{h}(t) = \frac{S_{t+h} - P_t}{P_t}.$$

Отсюда

$$S_{t+h} = P_t\left(1 + i_{ef}^{h}(t)\right). \tag{1.39}$$

Если $h = 1$, то эффективная процентная ставка за единицу времени $ief(t)$ совпадает с процентной ставкой $i(t)$ за единицу времени в момент t.

Например, сложные проценты начисляются ежемесячно по ставке 1% на сумму вклада на 3 месяца. Тогда 1 месяц - единица времени, процентная ставка за единицу времени равна 1%, а эффективная процентная ставка за 3 месяца равна (1,013 – 1).

Пусть N - целое число периодов длиной h в сроке долга. Тогда моменты $t = 0, 1, 2,..., N - 1$ можно рассматривать как моменты вложения средств. Применяя формулу (1.39) последовательно на каждом периоде длиной h в течение всего срока T, получим

$$S_N = P_0(1 + i_{ef}^{h}(0))(1 + i_{ef}^{h}(1))\ldots(1 + i_{ef}^{h}(N-1)), \tag{1.40}$$

где $P0$ - сумма, вложенная в момент $t = 0$. (1.40) можно рассматривать как формулу наращения суммы $P0$ по переменной эффективной ставке.

Если эффективная ставка за период h не зависит от момента времени t, когда производится вложение средств, т.е. $i_{ef}^{h}(t) = i_{ef}^{h}$ для всех t, то сумма, вырученная к концу срока долга, составит

$$S_N = P_0\left(1 + i_{ef}^{h}\right)^N. \tag{1.41}$$

Формула (1.41) представляет собой наращение по сложной процентной ставке i_{ef}^{h} **за период *h***. При $h = 1$ постоянная эффективная процентная ставка за единицу времени совпадает с обычной ставкой сложных процентов i за единицу времени. Постоянную эффективную процентную ставку за единицу времени обозначают через ief. Таким образом, $ief = i$. Как и (1.13), (1.41) остается верной для нецелых значений N. Формула (1.14), полученная ранее для наращенной суммы долга по годовой номинальной процентной ставке, является частным случаем (1.41). Действительно, если сложные проценты начисляются m раз в году через равные промежутки времени, то $h = \frac{1}{m}$, эффективная процентная ставка за $\frac{1}{m}$ часть года равна $\frac{1}{m}i(m)$, где $i(m)$ - годовая номинальная процентная ставка. Если срок долга n лет, то $N = mn$ и формула (1.41) приобретает вид (1.14).

В отличие от эффективной, **номинальную** процентную ставку как правило относят **к единице времени**.

Определение. Процентная ставка $jh(t)$ называется номинальной процентной ставкой за единицу времени по сделке на срок $h > 0$, начинающейся в момент времени t, если эффективной процентной ставкой за период длины h, начинающийся в тот же момент времени t, является величина $h\,jh\,(t)$.

Например, определим годовую номинальную ставку, если эффективная ставка за три месяца составляет 3%. Здесь единица измерения времени 1 год, $h = 0{,}25$ года, t - момент начала трехмесячной сделки. Тогда по определению $0{,}03 = 0{,}25jh(t)$. Отсюда годовая номинальная процентная ставка $jh\,(t) = 0{,}12$.

Таким образом, согласно определению, $i_{ef}^{h}(t) = hjh(t)$. При $h = 1$ номинальная процентная ставка совпадает с эффективной за единицу времени, т.е. $ief\,(t) = j1(t)$. Если номинальная процентная ставка по сделке на срок h является постоянной и не зависит от t, то пишут $jh\,(t) = jh$ для всех t. При этом $i_{ef}^{h} = hjh$. Формулы (1.39) - (1.41) для расчетов с использованием номинальных процентных ставок имеют вид:

$$S_{t+h} = P_t\left(1 + h\,j_h(t)\right) \quad . \tag{1.42}$$

$$S_N = P_0(1 + h\,j_h(0))(1 + h\,j_h(1))\ldots(1 + h\,j_h(N-1)), \tag{1.43}$$

$$S_N = P_0\left(1 + h\,j_h\right)^N \quad . \tag{1.44}$$

Пример 1.11. В августе 2001 года номинальные годовые процентные ставки привлечения на депозит Центрального Банка РФ рублевых вкладов составляли в зависимости от срока: 1 день - 2,0 %; 3 дня - 2,5 %; 7 дней - 7,5 %

Вклады сроком на 1 день называют овернайт (“overnight money”). Здесь единицей измерения времени является один год, а рассматриваемый момент времени, когда производится вложение средств, обозначим через $t0$. Составим следующую таблицу:

Срок h	1/365	3/365	7/365
$jh\,(\,t0\,)$	0,02	0,025	0,075

Накопление по вкладу 1000 д.е. на срок, например, 7 дней согласно формуле (1.42) равно $1000\left(1+\frac{7}{365}0{,}075\right)=1001{,}44$.

Накопление по вкладу на срок 3 дня можно рассчитать двумя способами - по формуле (1.42): $1000\left(1+\frac{3}{365}0{,}025\right)=1000{,}21$ и по формуле (1.44), если считать номинальную процентную ставку для инвестиций на один день постоянной:

$$1000\left(1+\frac{1}{365}0{,}02\right)^3=1000{,}16.$$

Как видим, два последних результата не совпадают. Это можно объяснить тем, что Центральный Банк предпочитает принимать вклады на более длительный срок.

Определение. Значение предела $\delta(t)$ номинальной процентной ставки jh (t), когда срок сделки h стремится к нулю, называется интенсивностью процентов в единицу времени в момент t. Таким образом, согласно определению,

$$\delta(t) = \lim_{h\to 0} j_h(t) . \qquad (1.45)$$

На практике интенсивность процентов в данный момент времени полагают приблизительно равной годовой номинальной процентной ставке по «overnight money». Понятие интенсивности процентов в данный момент времени означает непрерывное начисление сложных процентов. Поэтому $\delta(t)$ называют также процентной ставкой за единицу времени при непрерывном начислении процентов (силой роста). В случае, когда интенсивность процентов является постоянной величиной, т.е. $\delta(t) = \delta$ для всех t, проценты по постоянной силе роста δ начисляются непрерывно с постоянной скоростью (см. вывод формулы 1.15). Получим формулу наращенной суммы долга при непрерывном начислении процентов, когда интенсивность процентов $\delta(t)$ является функцией времени. Из формул (1.42) и (1.45) имеем:

$$\delta(t) = \lim_{h\to 0} j_h(t) = \lim_{h\to 0}\frac{S_{t+h}-P_t}{P_t\,h} = \lim_{h\to 0}\frac{S_{t+h}-S_t}{S_t\,h}=\frac{S_t'}{S_t}.$$

Таким образом, требуется найти решение дифференциального уравнения

$$\frac{S_t'}{S_t} = \delta(t),$$

удовлетворяющее начальному условию $St(t=0) = P0$. Получаем

$$S_t = P_0 e^{\int_0^t \delta(y)dy} . \qquad (1.46)$$

В частном случае, когда $\delta(t) = \delta$ для всех t, эта формула имеет вид:

$$S_t = P_0 e^{t\delta}, \qquad (1.47)$$

что совпадает с выражением (1.15), полученным раньше другим способом.

На практике большое значение имеет понятие годовой эффективной процентной ставки при начислении процентов m раз в году. В этом случае годовая эффективная процентная ставка определяется следующим образом.

Определение. Годовая эффективная процентная ставка при начислении процентов m раз в году ief - это годовая ставка сложных процентов, начисляемых 1 раз в году, эквивалентная годовой номинальной процентной ставке i (m).

Таким образом, согласно определению, $ief = i$, где i - годовая ставка сложных процентов, начисляемых один раз в конце года, и обеспечивающая тот же финансовый результат, что и m – разовое начисление сложных процентов в году по ставке $\frac{i^{(m)}}{m}$. Если срок долга n лет, то из эквивалентности процентных ставок следует равенство множителей наращения:

$$(1+i)^n = \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mn}.$$

Отсюда

$$i = \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m} - 1. \tag{1.48}$$

Пример 1.12. Какой эффективной процентной ставке соответствует ежеквартальное начисление сложных процентов по номинальной годовой процентной ставке 13 %?

Здесь $i(4) = 0{,}13$. По формуле (1.48) находим

$$i = \left(1+\frac{i^{(4)}}{4}\right)^{4} - 1 = 0{,}136476.$$

Значит, реальный относительный доход за год для инвестора больше 13 % и составляет примерно 13,65 %.

Если в контракте указаны требуемая годовая эффективная процентная ставка i и число начислений процентов в году m, то из формулы (1.48) можно найти соответствующую годовую номинальную процентную ставку:

$$i^{(m)} = m\left((1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right). \tag{1.49}$$

Пример 1.13. В контракте указана годовая эффективная процентная ставка 20 %. Банк начисляет проценты два раза в год. Какую номинальную годовую процентную ставку должен назначить банк?

По условию $i = 0{,}2$; $m = 2$. По формуле (1.49) находим

$$i^{(2)} = 2\left((1+0{,}2)^{\frac{1}{2}} - 1\right) = 0{,}190890,$$

т.е. $i^{(2)} \approx 19{,}1\%$.

Определим годовую эффективную учетную ставку def при начислении процентов m раз в году .

Определение. Годовая эффективная учетная ставка при начислении процентов m раз в году def - это годовая учетная ставка сложных процентов, начисляемых и удерживаемых один раз в году, эквивалентная годовой номинальной учетной ставке $d(m)$.

Таким образом, согласно определению, $def = d$, где d - годовая учетная ставка сложных процентов, удерживаемых один раз в начале года, обеспечивающая тот же финансовый результат, что и m – разовое дисконтирование в году по ставке $\frac{d^{(m)}}{m}$. Если срок долга n лет, то из эквивалентности процентных ставок следует равенство дисконтных множителей:

$$(1-d)^n = \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^{mn}.$$ Отсюда

$$d = 1 - \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^{m}. \quad (1.50)$$

Годовая эффективная учетная ставка d измеряет реальный относительный доход, получаемый в целом за год при m – разовом дисконтировании в году. В этом можно убедиться, рассматривая процесс дисконтирования в течение одного года и учитывая свойства сложных дисконтов.

Пример 1.14. Какой годовой эффективной учетной ставкой можно заменить в контракте годовую номинальную учетную ставку 5 % при поквартальном учете суммы погашаемого долга ?

Здесь $m = 4$, $d(4) = 0{,}05$. По формуле (1.50) находим

$$d = 1 - \left(1 - \frac{d^{(4)}}{4}\right)^{4} = 0{,}04907.$$

Для участников сделки безразлично, производить дисконтирование 4 раза в году в начале каждого квартала по ставке $\frac{d^{(4)}}{4} = 0{,}0125$ или один раз в начале года по ставке 0,04907. Финансовые обязательства сторон сохраняются.

Если требуется определить годовую номинальную учетную ставку $d(m)$

при заданных d и m, то из формулы (1.50) получаем

$$d^{(m)} = m\left(1-(1-d)^{\frac{1}{m}}\right). \qquad (1.51)$$

1.9. Переменные процентные ставки

В кредитных соглашениях иногда предусматриваются изменяющиеся во времени процентные ставки. В инвестиционных расчетах понятие переменной процентной ставки является одним из важнейших.

Определение. Процентная ставка называется переменной, если она изменяет свое значение в течение срока долга.

Рассмотрим дискретные переменные процентные ставки. Пусть n - срок долга, $n = n1 + n2 + \ldots + nk$, где nj - период в сроке долга, когда применяется процентная ставка ij или учетная ставка dj, $j = 1,2,\ldots, k$.

1) Наращение и дисконтирование по простой переменной процентной ставке.

Согласно формуле (1.8), проценты за каждый период nj в сроке долга составляют $I(n_j) = P_0 n_j i_j$, $j = 1,2,\ldots,k$. Проценты за весь срок долга

$$I(n) = \sum_{j=1}^{k} I(n_j) = P_0 \sum_{j=1}^{k} n_j i_j .$$

Тогда наращенная сумма к концу срока долга n составит:

$$S_n = P_0 + I(n) = P_0\left(1+\sum_{j=1}^{k} n_j i_j\right). \qquad (1.52)$$

Предположим, что известна сумма погашаемого долга Sn. Формула современной величины суммы Sn при математическом ее учете по простой переменной процентной ставке имеет вид:

$$P_0 = \frac{S_n}{1+\sum_{j=1}^{k} n_j i_j}. \qquad (1.53)$$

Применяя формулу (1.20) последовательно для периодов $nk, nk - 1, \ldots, n2$, $n1$, получим формулу современной величины суммы Sn при банковском ее учете по простой переменной учетной ставке:

$$P_0 = S_n\left(1-\sum_{j=1}^{k} n_j d_j\right). \qquad (1.54)$$

Соответственно, формула наращенной суммы долга по простой переменной учетной ставке имеет вид:

$$S_n = \frac{P_0}{1 - \sum_{j=1}^{k} n_j d_j}. \qquad (1.55)$$

<u>2) Наращение и дисконтирование по сложной переменной процентной ставке.</u>

Применяя формулу (1.13) последовательно для каждого периода наращения $n1$, $n2$, … , nk , получаем формулу наращенной суммы долга по переменной сложной процентной ставке:

$$S_n = P_0 (1 + i_1)^{n_1} (1 + i_2)^{n_2} \ldots (1 + i_k)^{n_k}. \qquad (1.56)$$

Если известна сумма погашаемого долга Sn, то, применяя формулу (1.17) или (1.21) последовательно для каждого периода дисконтирования nk, $nk - 1$, … , $n2$, $n1$, получим формулы приведенной к моменту $t = 0$ величины суммы Sn при математическом и банковском ее учете по сложной переменной процентной ставке:

$$P_0 = \frac{S_n}{(1 + i_k)^{n_k} (1 + i_{k-1})^{n_{k-1}} \ldots (1 + i_1)^{n_1}}. \qquad (1.57)$$

$$P_0 = S_n (1 - d_k)^{n_k} (1 - d_{k-1})^{n_{k-1}} \ldots (1 - d_1)^{n_1}. \qquad (1.58)$$

Формулы (1.40) и (1.43) можно рассматривать как формулы наращения суммы долга по переменным эффективным и номинальным процентным ставкам.

Пример 1.15. Ожидаемая эффективная процентная ставка на первый год – 10 %, на второй – 12 %, на третий и четвертый – 14 %. В конце четвертого года заемщик обязуется погасить долг в размере 2000 д.е. Какова может быть сумма кредита?

Примем за единицу измерения времени 1 год. Тогда по формуле (1.57) получаем

$$P_0 = \frac{2000}{(1 + 0{,}14)^2 (1 + 0{,}12)(1 + 0{,}1)} = 1249{,}14 \text{ (д.е.)}.$$

<u>3) Наращение и дисконтирование по непрерывным переменным процентным ставкам.</u> Переменную непрерывную процентную ставку $\delta(t)$ называют интенсивностью процентов или силой роста в единицу времени в момент t. Формула наращенной суммы долга при непрерывном начислении процентов, когда интенсивность процентов $\delta(t)$ является функцией времени, имеет вид (1.46):

$$S_t = P_0 e^{\int_0^t \delta(y) dy}.$$

Задавая конкретный вид зависимости $\delta(t)$, моделируют поведение интенсивности процентов во времени. Рассмотрим наиболее часто используемые формулы для $\delta(t)$. Для этого введем обозначения. Обозначим через $F(t)$ и $\nu(t)$

множитель наращения и дисконтный множитель соответственно по переменной силе роста $\delta(t)$ в момент t, где $t \geq 0$. $F(t)$ – это накопление (стоимость) в момент t единичного вклада, сделанного в момент $t = 0$. $\nu(t)$ - это современная стоимость 1 д.е., подлежащей выплате в момент t. Для вклада, сделанного в момент $t = 0$, множитель наращения в момент t имеет вид:

$$F(t) = e^{\int_0^t \delta(y)dy}. \qquad (1.59)$$

Тогда дисконтный множитель в момент t равен

$$\nu(t) = e^{-\int_0^t \delta(y)dy} \qquad (1.60)$$

Если $\delta(t)$ интегрируема, то $F(t)$ и $\nu(t)$ являются непрерывными функциями времени t. В случае, когда интенсивность процентов является постоянной величиной, т.е. $\delta(t) = \delta$ для всех t, множитель наращения и дисконтный множитель имеют вид $F(t) = e\delta t$ и $\nu(t) = e–\delta t$. Наращенная сумма долга в момент t может быть найдена по формуле

$$S_t = P_0 F(t) = P_0 e^{\int_0^t \delta(y)dy}, \qquad (1.61)$$

где $P0$ - первоначальная сумма долга в момент $t = 0$. Современная стоимость суммы St, подлежащей выплате в момент t, равна

$$P_0 = S_t \nu(t) = S_t e^{-\int_0^t \delta(y)dy}. \qquad (1.62)$$

§ 2. Доходность финансовой операции

Определение. Финансовой называется операция, начало и конец которой характеризуются денежными суммами $P(0)$ и $P(T)$ соответственно, а цель которой - наращение суммы вложенных средств $P(0)$.

В определении под $P(0)$ понимают реально вложенные средства в момент $t = 0$, под $P(T)$ – реально вырученные денежные средства в результате операции, срок которой T единиц времени. Эффект от вложения естественно измерять в виде процентной ставки наращения, которую в этом случае называют доходностью.

Определение. Ставка простых или сложных процентов, с помощью которой измеряют эффективность финансовой операции, называется доходностью финансовой операции за единицу времени.

Согласно определению, доходность финансовой операции за единицу времени - это положительное число $\bar{r}$, удовлетворяющее равенству:

$$P(0)(1 + \bar{r}\,T) = P(T) \qquad (2.1)$$

или

$$P(0)(1 + \bar{r})T = P(T). \qquad (2.2)$$

Если время измеряется в годах, то $\bar{r}$ - среднегодовая доходность операции. Таким образом, финансовой операции ставится в соответствие эквивалентная операция наращения суммы $P(0)$ по ставке $\bar{r}$ в течение времени T. Такой подход позволяет сравнить полученное значение доходности с доходностями по альтернативным вложениям средств.

Кроме того, можно говорить о доходности за весь срок операции $[0, T]$, определяемой как положительное число r, удовлетворяющее равенству

$$P(0)(1 + r) = P(T). \qquad (2.3)$$

Отсюда $r = \dfrac{P(T) - P(0)}{P(0)}$. Здесь r показывает эффект от вложения, приходящийся на 1 единицу вложенных средств. Этот вид доходности применяется, например, при оценке инвестиций в ценные бумаги.

Учет налогов и инфляции. Налоги и инфляция заметно влияют на эффективность финансовой операции. Рассмотрим учет налогов. Налог начисляется, как правило, на проценты, получаемые при размещении денежной суммы в рост. Предположим, на сумму $P0$ в течение времени n начислялись проценты по ставке i, g - ставка налога на проценты. Тогда величина процентов

$$I(n) = Sn - P0,$$

а сумма налога $Gn = g\,I(n)$. Наращенная сумма после выплаты налога составляет $P(n) = Sn - Gn$. Так как $P(n) < Sn$, то учет налогов фактически сокращает ставку наращения:

$$P(n) = P0\,((1 + i)n(1 - g) + g).$$

Пример 2.1. При выдаче кредита на 2 года под годовую сложную процентную ставку 0,08 кредитор удерживает комиссионные в размере 0,5% от суммы кредита. Ставка налога на проценты 10%. Какова доходность операции для кредитора?

Если $P0$ - сумма кредита, а Sn - сумма погашаемого долга, то $Sn = P0(1 + i)n$, где $i = 0{,}08$, $n = 2$. Сумма комиссионных $cP0$, где $c = 0{,}005$. Тогда сумма, фактически выданная в долг, составит $P(0) = P0(1 - c)$. После выплаты налога у кредитора останется $P(n) = P0\,((1 + i)n(1 - g) + g)$, где $g = 0{,}1$ - ставка налога. Уравнение доходности имеет вид $P(n) = P(0)(1 + \bar{r})n$. Разрешая это уравнение относительно $\bar{r}$, получим

$$\bar{r} = \left(\frac{P(n)}{P(0)}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 = \left(\frac{(1+i)^n(1-g)+g}{1-c}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 = 0{,}07496\,.$$

Заметим, что без учета налога (g = 0) доходность операции составила бы 0,08271.

Инфляция – обесценение денег, проявляющееся в росте цен на товары и услуги, что влечет за собой снижение покупательной способности денег.

Инфляцию характеризуют два количественных показателя – индекс цен и темп инфляции. Предположим, выбрана единица времени. Рассмотрим отрезок времени $[0, t]$, длина которого t единиц времени от начального момента $t = 0$.

Индекс цен за время $[0, t]$ – число

$$J(t) = \frac{K(t)}{K(0)},$$

показывающее во сколько раз выросла стоимость потребительской корзины за период времени $[0, t]$.

Темп инфляции за время $[0, t]$ – число $H(t) = \frac{K(t) - K(0)}{K(0)}$, показывающее на сколько процентов выросла стоимость потребительской корзины за период времени $[0, t]$. Так как $H(t) = \frac{K(t)}{K(0)} - 1$, то соотношения между темпом инфляции и индексом цен имеют вид:

$$H(t) = J(t) - 1 \tag{2.4}$$

и

$$J(t) = 1 + H(t) \tag{2.5}$$

для любого периода времени$[0, t]$.

Пусть $[0,t] = \bigcup_{k=1}^{n}[t_{k-1}, t_k]$, где $[0, t1], \ldots, [tn\text{-}1, tn]$ - отрезки времени в сроке $[0, t]$ ($t0 = 0$, $tn = t$), длины которых $t1$, $(t2 - t1),\ldots,(tn - tn - 1)$ единиц времени. $j(0, t1),\ldots, j(tn - 1, tn)$ и $h(0, t1),\ldots, h(tn - 1, tn)$ – индексы цен и темпы инфляции за периоды $[0, t1], \ldots, [tn–1, tn]$ соответственно. Согласно (2.5),

$$j(tk - 1, tk) = 1 + h(tk - 1, tk),\ \ k = 1,2,\ldots,n.$$

$h(tk - 1, tk)$ - темп инфляции за $(tk - tk - 1)$ единиц времени за период $[tk–1, tk]$. Индекс цен $j(tk–1, tk)$ за период $[tk–1, tk]$ показывает, во сколько раз увеличились цены за этот период по отношению к уровню цен предыдущего периода. Тогда получаем следующие соотношения для индекса цен и темпа инфляции за время $[0, t]$:

$$J(t) = j(0, t1)\, j(t1, t2)\ldots j(tn - 1, tn), \tag{2.6}$$

$$J(t) = (1 + h(0, t1))(1 + h(t1, t2))\ldots(1 + h(tn - 1, tn)), \qquad (2.7)$$

$$1 + H(t) = (1 + h(0, t1))(1 + h(t1, t2))\ldots(1 + h(tn - 1, tn)). \qquad (2.8)$$

Пусть jk и hk - индекс цен и темп инфляции за 1 единицу времени на временном отрезке $[tk–1, tk]$. Тогда

$$jk = 1 + hk, \quad k = 1,2,\ldots,n,$$

а индекс цен за период $[tk–1, tk]$ равен

$$j(tk - 1, tk) = j_k^{t_k - t_{k-1}}, \quad k = 1,2,\ldots,n.$$

Согласно (2.6)

$$J(t) = j_1^{t_1} j_2^{t_2 - t_1} \ldots j_n^{t_n - t_{n-1}}.$$

Тогда

$$J(t) = (1+h_1)^{t_1} (1+h_2)^{t_2 - t_1} \ldots (1+h_n)^{t_n - t_{n-1}}, \qquad (2.9)$$

$$1 + H(t) = (1+h_1)^{t_1} (1+h_2)^{t_2 - t_1} \ldots (1+h_n)^{t_n - t_{n-1}}. \qquad (2.10)$$

Если $h1 = h2 = \ldots = hn = h$, то

$$J(t) = (1 + h)t \qquad (2.11)$$

$$1 + H(t) = (1 + h)t. \qquad (2.12)$$

Здесь h - темп инфляции за 1 единицу времени на временном отрезке $[0, t]$, $J(t)$ и $H(t)$ - индекс цен и темп инфляции за за период времени $[0, t]$.

Пример 2.2. Ожидаемый годовой темп инфляции первых двух лет вклада составляет 3%, а следующих трех - 4%. Какую минимальную годовую ставку сложных процентов должен предложить банк клиенту, чтобы реальная годовая доходность вклада была не меньше 8% ?

Здесь $t = 0$ - момент размещения вклада, 1 год - единица измерения времени, срок вклада $n = 5$ лет. $h1 = 0{,}03$ и $h2 = 0{,}04$ – среднегодовые темпы инфляции на временных отрезках [0,2], [2,5]. Для доходности по вкладу $\bar{r}$ должно быть выполнено условие: $\bar{r} \geq 0{,}8$. Пусть i - годовая сложная процентная ставка, под которую размещена сумма $P0$. Тогда наращенная сумма вклада через n лет $Sn = P0(1 + i)n$. С учетом инфляции реальная сумма вклада составит $P(n) = \frac{S_n}{J(n)}$, где индекс цен согласно (2.9) равен $J(n) = (1 + h1)2(1 + h2)3$. Уравнение доходности имеет вид: $P(n) = P0\,(1 + \bar{r})n$. Разрешая это уравнение относительно $\bar{r}$ и учитывая требуемое условие для доходности, получим:

$$\bar{r} = \frac{1+i}{(1+h_1)^{\frac{2}{5}}(1+h_2)^{\frac{3}{5}}} - 1 \geq 0{,}08.$$

Отсюда $i \geq 0{,}11887$. Значит, минимальная процентная ставка размещения вклада составляет 0,11887 против 0,08 без учета инфляции.

§ 3. Эквивалентные серии платежей

Рассмотрим моменты времени $t1$ и $t2$, где $t2$ не обязательно больше чем $t1$. Пусть сумма C подлежит выплате в момент времени $t2$. Ценность (или стоимость) этой суммы в момент $t1$ определяется как:

а) результат дисконтирования суммы C к моменту $t1$ в течение времени ($t2 - t1$), если $t2 > t1$;

б) результат наращения суммы C к моменту $t1$ в течение времени ($t1 - t2$) если $t1 > t2$.

Для наращения и дисконтирования применяется принятая процентная ставка. Операции наращения и дисконтирования, которые при этом используются, называют **приведением денежной суммы к данному моменту времени**. Таким образом, ценность (стоимость) платежа в момент t - это его приведенная величина к моменту t.

На основе сформулированного утверждения определяется эквивалентность денежных сумм во времени.

Определение. Денежные суммы C_{t_1} в момент $t1$ и C_{t_2} в момент $t2$ называются эквивалентными по принятой процентной ставке, если одна из них является результатом наращения или дисконтирования другой по данной процентной ставке в течение времени $|t_2 - t_1|$.

Из этого определения следует, что все формулы наращения и дисконтирования, полученные в предыдущих разделах, связывают эквивалентные во времени денежные суммы по соответствующим процентным ставкам.

Пример 3.1. По первому обязательству сумма погашаемого долга 500 д.е. через 4 месяца. По второму – 550 д.е. через 10 месяцев. Можно ли считать обязательства эквивалентными, если используется сложная годовая процентная ставка 8%? Если нет, то какое из них является более выгодным?

Результат наращения суммы 500 д.е. в течение 6 месяцев по ставке 0,08 составляет $500 \cdot 1{,}08^{0,5} = 519{,}62 \neq 550$. Следовательно, обязательства не эквивалентны. Чтобы выяснить, какое из них является более выгодным, найдем современные стоимости этих обязательств:

$$\frac{500}{1{,}08^{\frac{1}{3}}} = 487{,}34 \quad \text{и} \quad \frac{550}{1{,}08^{\frac{5}{6}}} = 515{,}83.$$

Значит, второе обязательство является более выгодным.

Перейдем к определению эквивалентности серий платежей. В общем случае серия платежей может состоять из одного платежа.

Определение. Серия платежей $a_{t_1}, a_{t_2}, ..., a_{t_n}$ в моменты $t1$, $t2$,…, tn эквивалентна по принятой процентной ставке серии платежей $b_{\tau_1}, b_{\tau_2}, ..., b_{\tau_m}$ в моменты $\tau 1$, $\tau 2$,..., τm, если сумма платежей одной серии, приведенных по принятой процентной ставке к одному моменту времени, равна сумме платежей другой серии, приведенных к тому же моменту времени по той же процентной ставке.

Равенство, составленное в соответствии с данным определением, называется **уравнением эквивалентности**. Другое название уравнения эквивалентности - **уравнение ценности**, поскольку оно выражает равенство стоимостей (ценностей) обеих серий платежей в заданный момент времени.

Для приведения платежей может быть выбран любой момент времени. Однако более естесственным является выбор настоящего момента времени, когда сведения о процентных ставках на различные сроки являются наиболее достоверными, а денежные суммы реальными. Если серии платежей, указанные в определении, эквивалентны по сложной процентной ставке i, а для приведения выбран настоящий момент времени $t = 0$, то уравнение эквивалентности имеет вид:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{t_i}}{(1+i)^{t_k}} = \sum_{j=1}^{m} \frac{b_{\tau_j}}{(1+i)^{\tau_j}}. \qquad (3.1)$$

Если одна серия платежей - расходы, а другая - доходы, то уравнение эквивалентности (3.1) выражает то, что при данной процентной ставке серия расходов в момент $t = 0$ имеет ту же ценность, что и серия доходов.

Пример 3.2. Существующее обязательство о выплате через 5 лет первоначального долга 90000 д.е. с начисленными на него сложными процентами по годовой ставке 0,08 пересмотрено. По новому обязательству первая выплата размером в 30000 д.е. будет произведена через 2 года, а оставшаяся сумма будет выплачена через 4 года после этой даты. Предполагая, что вычисления делаются на основе исходной процентной ставки, найти величину второго платежа в новом обязательстве.

Обозначим через X сумму второго платежа в пересмотренном обязательстве. Если 90000 д.е. рассматривать как серию расходов кредитора, а 30000 д.е. и X д.е. - серию доходов, то уравнение эквивалентности, составленное относительно момента выдачи долга $t = 0$, имеет вид

$$90000 = \frac{30000}{1{,}08^2} + \frac{X}{1{,}08^6}.$$

Отсюда $X = 102004{,}02$. Таким образом, сумма 90000, предоставленная в долг в момент $t = 0$ при заданной процентной ставке эквивалентна серии из двух погасительных платежей: 30000 д.е. через 2 года и 102004,02 д.е. через 6 лет. Этот же результат будет получен, если для составления уравнения эквивалентности использовать принцип финансовой эквивалентности обязательств по погашению долга. По старому обязательству сумма погашаемого долга $90000 \cdot 1{,}08^5$ через 5 лет. Составим уравнение эквивалентности, приведя все суммы по старому и новому обязательствам на момент поступления искомого платежа $t = 6$: $(90000 \cdot 1{,}08^5) \cdot 1{,}08 = 30000 \cdot 1{,}08^4 + X$. Находим $X = 102004{,}02$.

§ 4. Потоки платежей. Основные характеристики потока платежей

Определение. Поток платежей - это распределенная во времени последовательность платежей.

Сумма отдельного платежа называется **членом потока.** Платеж со знаком “+” означает поступление денег, платеж со знаком “ – “ - расход денег.

Процентная ставка потока платежей - сложная процентная ставка, используемая для наращения и дисконтирования членов потока.

Поток платежей называется **конечным**, если число платежей в нем конечно, и **бесконечным**, если срок действия потока неограничен.

Потоки платежей могут быть как регулярными, так и нерегулярными. Члены **регулярного** потока поступают через одинаковые промежутки времени, имеют одно и то же назначение (одинаковый знак) и изменяются во времени в соответствии с некоторым временным законом. Регулярные финансовые потоки называют также финансовыми рентами. Члены **нерегулярного** потока могут быть как положительными, так и отрицательными, временные интервалы между членами потока неодинаковы, а размеры платежей не подчиняются какому-либо временному закону.

Рассмотрим конечный поток платежей $R1, R2,\ldots,Rn$, члены которого - платежи, поступающие соответственно в моменты $t1$, $t2,\ldots, tn$, где $0 \le t1 < t2 <\ldots< tn \le T$. Момент времени $t = 0$, от которого отсчитаны сроки поступления платежей, называют началом потока, T - срок действия потока. Будем считать, что процентная ставка потока задана и соответствует единице измерения сроков платежей.

Определение. Стоимость потока платежей $P(t)$ в момент $t \in [0,T]$ - это сумма всех членов потока, приведенных к моменту времени t.

Это определение следует непосредственно из определения ценности отдельного платежа в данный момент времени (параграф 1.3).

Пусть $t \in [0,T]$ - произвольный момент времени, причем $t \in [tm,\ tm+1]$, где $t1$, $t2$,.., tm, $tm+1$,.., tn - моменты поступления платежей $R1$, $R2$,.., Rm, $Rm+1$,.., Rn. Согласно определению, стоимость потока в момент t есть:

$$P(t) = \sum_{k=1}^{m} R_k F(t_k, t) + \sum_{k=m+1}^{n} R_k v(t, t_k)\,. \tag{4.1}$$

Здесь $F(tk,\ t)$ - множитель наращения k - го платежа на временном отрезке $[tk,\ t]$ ($t > tk$, где $k = 1, 2, \dots, m$) по процентной ставке потока, $v(t,\ tk)$ - дисконтный множитель k - го платежа на отрезке $[t,\ tk]$ ($t < tk$, $k = m + 1,\dots, n$) по процентной ставке потока. Вид множителя наращения и дисконтного множителя определяется процентной ставкой потока (см. параграф 1.1).

Определение. Современная стоимость потока платежей A - это сумма всех членов потока, приведенных к моменту $t = 0$.

Согласно определению,

$$A = \sum_{k=1}^{n} R_k v(t_k)\,, \tag{4.2}$$

где $v(tk)$ - дисконтный множитель k - го платежа на отрезке $[0,\ tk]$ по процентной ставке потока. Вид дисконтного множителя определяется процентной ставкой потока (см. параграф 1.1). Выражение (4.2) - это уравнение эквивалентности относительно момента $t = 0$ для двух серий платежей: суммы A в момент $t = 0$ и $R1$, $R2$,…, Rn в моменты $t1$, $t2$,…, tn. Отсюда следует, что сумма A в момент $t = 0$ по процентной ставке потока эквивалентна всей совокупности платежей этого потока.

Определение. Наращенная сумма потока платежей S - это сумма всех членов потока с начисленными на них процентами к концу срока потока T.

Согласно определению,

$$S = \sum_{k=1}^{n} R_k F(t_k, T)\,, \tag{4.3}$$

где $F(tk\ ,T\ )$ - множитель наращения k - го платежа на отрезке $[tk\ ,T\ ]$ по процентной ставке потока. Вид множителя наращения определяется процентной ставкой потока (см. параграф 1.1). Выражение (4.3) - это уравнение эквивалентности относительно момента $t = T$ для двух серий платежей: суммы S в момент $t = T$ и $R1$, $R2$,…,Rn в моменты $t1$, $t2$,…, tn. Отсюда следует, что сумма S в момент $t = T$ по процентной ставке потока эквивалентна всей совокупности платежей этого потока.

Полагая в (4.1) $t = 0$, получим $P(0) = A$. Если в (4.1) $t = T$, то $P(T) = S$. Таким образом, **при заданной ставке потока** стоимость потока платежей в момент $t = 0$ - это современная стоимость потока, а стоимость потока в момент его окончания T - это наращенная сумма потока.

Пусть $t \in [0,T]$ - произвольный момент времени. Стоимость потока в момент t можно представить в виде:

$$P(t) = \sum_{k=1}^{n} R_k v(t_k) F(t), \qquad (4.4)$$

где $R_k v(t_k) F(t)$ - приведенная к моменту t величина k - го платежа, $F(t)$ - множитель наращения на временном отрезке $[0, t]$. Выражение (4.4) можно переписать в виде:

$$P(t) = A\,F(t), \qquad (4.5)$$

где $t \in [0,T]$. Согласно (4.5), стоимость потока платежей $P(t)$ в момент t - это результат наращения его современной стоимости A к моменту t по процентной ставке потока. Из (4.5) при $t = T$ получаем связь между наращенной суммой S и современной стоимостью A потока платежей:

$$S = A\,F(T). \qquad (4.6)$$

Формулы (4.1) - (4.6) можно прокомментировать следующим образом. Чтобы получить сумму S через время T можно поступить двумя способами: разместить сумму A на время T под заданную процентную ставку на банковский счет или вносить платежи $R1$, $R2,\ldots,Rn$ в моменты $t1$, $t2,\ldots$, tn для начисления на них процентов по этой же процентной ставке до окончания срока T. Соотношения (4.1) - (4.6) для стоимости потока в различные моменты времени являются основными и используются при решении практических задач.

Пример 4.1. Предприниматель должен выплатить денежные суммы: 1000 д.е. 1 января 2001 года, 5000 д.е. 1 июля 2003 года и 10000 д.е. 1 января 2005 года. Кредит выдан под 20% годовых, начисляемых сложными процентами 1 раз в год. Найти стоимость этих платежей на 1 января 2000 года и на 1 июня 2002 года.

Пусть время измеряется в годах, начиная с 1 января 2000 года. Стоимость долгов в этот день согласно формуле (4.2) есть:

$$A = \frac{1000}{1+i} + \frac{5000}{(1+i)^{3{,}5}} + \frac{10000}{(1+i)^5} = 7493{,}52,$$

где ставка дисконтирования $i = 0{,}2$. Стоимость на 1 июня 2002 года этих же долгов согласно формуле (4.5) есть:

$$P\left(\frac{29}{12}\right) = A(1+i)^{\frac{29}{12}} = 11642{,}34 .$$

Этот результат можно проверить, получив его непосредственно по определению по формуле (4.1):

$$P\left(\frac{29}{12}\right) = 1000(1+i)^{\frac{17}{12}} + \frac{5000}{(1+i)^{\frac{13}{12}}} + \frac{10000}{(1+i)^{\frac{31}{12}}} = 11642{,}34 .$$

Рассмотрим поток платежей $R1, R2,\ldots, Rn$, члены которого - платежи, поступающие соответственно в моменты $t1, t2,\ldots, tn$, где $0 \le t1 < t2 <\ldots< tn \le T$. Пусть **известна** стоимость потока P в момент $t = 0$. P может, например, означать сумму инвестиций в проект, по которому ожидаются доходы $R1, R2,\ldots,Rn$ в моменты $t1, t2,\ldots, tn$. При этом проект не является заведомо убыточным, если $P < \sum_{k=1}^{n} R_k$.

Определение. Доходность потока платежей за единицу времени - это ставка сложных процентов r , по которой современная стоимость потока платежей равна P :

$$P = \sum_{k=1}^{n} \frac{R_k}{(1+r)^{t_k}} . \qquad (4.7)$$

Если сроки поступления платежей $t1, t2,\ldots, tn$ измеряются в годах, то r - годовая доходность. Доходность потока платежей - это не процентная ставка потока. r зависит только от величины и моментов самих платежей. Поэтому ее называют **внутренней доходностью** потока платежей. Уравнение (4.7), вообще говоря, может не иметь корней.

Теорема 4.1. Если все члены потока платежей $R1, R2,\ldots, Rn$ положительны и выполняется условие $P < \sum_{k=1}^{n} R_k$, то уравнение (4.7) имеет единственный положительный корень.

Корень уравнения $F(r) = 0$ является доходностью денежного потока $R1, R2,\ldots, Rn$, стоимость которого в момент $t = 0$ равна P. Для нахождения корня уравнения $F(r) = 0$ применяют приближенные методы. Рассмотрим **метод линейной интерполяции.**

Пример 4.2. Отдача от 400000 д.е., инвестированных в проект, составляет в первый год 30000 д.е., затем через полгода – 70000 д.е., еще через год 150000 д.е., затем через 1,5 года – 200000 д.е. Определить доходность инвестиции.

Условие $P < \sum_{k=1}^{n} R_k$ для данного проекта выполнено, проект не является заведомо убыточным (400000 < 30000 + 70000 + 150000 + 200000 = 450000). Пусть 1 год - единица измерения времени. Функция $F(r)$ имеет вид:

$$F(r) = 400\,000 - \frac{30000}{1+r} - \frac{70000}{(1+r)^{1,5}} - \frac{150000}{(1+r)^{2,5}} - \frac{200000}{(1+r)^{4}}.$$

Согласно доказанной теореме, существует единственный положительный корень уравнения $F(r) = 0$. Так как $F(0{,}04) = -1797{,}908 < 0$, $F(0{,}05) =$ $= 9052{,}552 > 0$, то доходность заключена между 4% и 5% годовых. По формуле (4.8) находим

$$r\text{л} = 0{,}04 + \frac{-(-1797{,}908)}{9052{,}552-(-1797{,}908)}(0{,}05-0{,}04) = 0{,}041657,$$

или 4,1657 % годовых. Если требуется найти доходность с большей степенью точности, надо выполнить еще один шаг согласно изложенному методу. С точностью до четвертого знака после запятой доходность составляет 4,1629 % годовых.

Определения основных характеристик потока платежей справедливы не только для дискретных, но и для непрерывных потоков платежей. Понятие непрерывно выплачиваемого потока платежей хотя и является теоретическим, во многих случаях позволяет упростить расчеты (например, в анализе инвестиций). Предположим, что в течение времени $[0,T]$ непрерывно выплачиваются деньги с интенсивностью выплат в единицу времени $f(t)$ в момент t. Тогда современная стоимость и наращенная сумма такого потока платежей определяются по формулам:

$$A = \int_0^T f(t)v(t)dt, \quad (4.9) \qquad \text{и} \qquad S = \int_0^T f(t)F(t,T)dt, \quad (4.10)$$

где $v(t)$ - дисконтный множитель на отрезке $[0, t]$, $F(t,T)$ - множитель наращения на отрезке $[t, T]$.

Пример 4.3. На непрерывно и равномерно поступающие в течение 20 лет платежи с постоянной интенсивностью 100 д.е. в год непрерывно начисляются проценты по силе роста, изменяющейся по закону

$$\delta(t) = \begin{cases} 0{,}03, & 0 \le t < 5 \\ 0{,}05, & 5 \le t < 12 \\ 0{,}07, & t \ge 12 \end{cases}.$$

Найти современную стоимость такого потока платежей.

Найдем дисконтный множитель $v(t)$:

$$v(t)=\begin{cases}\exp(-0{,}03t), & 0\le t<5\\ \exp(0{,}1-0{,}05t), & 5\le t<12\\ \exp(0{,}34-0{,}07t), & t\ge 12\end{cases}.$$

Согласно формуле (4.9), современная стоимость потока платежей равна

$$A=100\int_0^{20}v(t)dt=100\left[\int_0^5\exp(-0{,}03t)dt+\int_5^{12}\exp(0{,}1-0{,}05t)dt+\int_{12}^{20}\exp(0{,}34-0{,}07t)dt\right]=$$

$$=100\left[\frac{1}{0{,}03}(1-\exp(-0{,}15))+\frac{\exp 0{,}1}{0{,}05}(\exp(-0{,}25)-\exp(-0{,}6))+\frac{\exp 0{,}34}{0{,}07}(\exp(-0{,}84)-\exp(-1{,}4))\right]=$$

= 1344,197.

До сих пор предполагалось, что все платежи, дискретные или непрерывные, положительны. Если имеется серия поступающих платежей $a1,\ a2,\ldots,\ an$ в моменты $t1$, $t2,\ldots,\ tn$ и серия расходов $b1,\ b2,\ldots,\ bn$ в те же моменты времени, то член потока Rk можно представить в виде разности $Rk = ak - bk$, $k = 1,2,\ldots,n$, так как положительный платеж соответствует поступлению денег, отрицательный - их расходу (в большинстве случаев только одна из сумм ak и bk будет ненулевой). Тогда $R1,\ R2,\ldots,Rn$ - это **чистый денежный поток**. Этот поток охватывает два встречных потока - расходов и поступлений. Доходность за единицу времени такого потока определяется как ставка сложных процентов r, по которой современная стоимость потока расходов равна современной стоимости потока доходов:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(1+r)^{t_k}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{(1+r)^{t_k}}.$$

Это уравнение можно переписать в виде:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{R_k}{(1+r)^{t_k}}=0. \qquad (4.11)$$

Выражение (4.11) называется **уравнением доходности** денежного потока.

Применительно к непрерывным потокам платежей, если $f1(t)$ и $f2(t)$ - интенсивности расходов и получения денег в момент t соответственно, то **чистую интенсивность** $f(t)$ такого потока в момент t можно представить в виде разности $f(t) = f2(t) - f1(t)$. Для непрерывного денежного потока, поступающего в течение времени $[0,T]$, уравнение доходности имеет вид:

$$\int_0^T\frac{f(t)}{(1+r)^t}dt=0. \qquad (4.12)$$

Из (4.11) и (4.12) получаем уравнение доходности для непрерывно-дискретного потока платежей:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{R_k}{(1+r)^{t_k}} + \int_0^T \frac{f(t)}{(1+r)^t}dt = 0 . \qquad (4.13)$$

Решение этого уравнения, если оно существует, является доходностью за единицу времени такого потока. Имеется важный класс сделок, для которых уравнение доходности имеет единственное положительное решение. Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.2. Если все отрицательные платежи предшествуют всем положительным (или наоборот) и выполняется условие $\sum_{k=0}^{n} R_k > 0$ (или $\sum_{k=0}^{n} R_k + \int_0^T f(t)\,dt > 0$ для непрерывно-дискретного потока платежей), то уравнение доходности имеет единственное положительное решение.

Пример 4.4. В обмен на инвестиции в начале 1997, 1998 и 1999 годов в размере 1000 д.е., 2000 д.е. и 3000 д.е. соответственно инвестор ожидает получить доход в виде единичного платежа в размере 1500 д.е. в начале 2001 года и потока непрерывно и равномерно поступающих платежей с интенсивностью 1000 д.е. в год в течение 10 лет, начиная с 2003 года. Найти доходность инвестиций.

Так как $\sum_{k=1}^{n} R_k + \int_0^{10} 1000\,dt = 5500 > 0$, то финансовая операция имеет смысл. Пусть время измеряется в годах, начиная с 1 января 1997 года. Уравнение доходности (4.13) имеет вид: $F(r) = -1000 - \frac{2000}{1+r} - \frac{3000}{(1+r)^2} + \frac{1500}{(1+r)^4} + \int_6^{16} \frac{1000\,dt}{(1+r)^t} = 0$.

т.е. $$F(r) = -1000 - \frac{2000}{1+r} - \frac{3000}{(1+r)^2} + \frac{1500}{(1+r)^4} + \frac{1000}{\ln(1+r)}\left[\frac{1}{(1+r)^6} - \frac{1}{(1+r)^{16}}\right] = 0 .$$

Так как $F(0{,}08) = 74{,}136 > 0$, $F(0{,}09) = -300{,}899 < 0$, то доходность заключена между 8% и 9% годовых. Методом линейной интерполяции находим 8,1884 % с точностью до четвертого знака после запятой.

§ 5. Финансовая рента.

5.1. Свойства коэффициентов наращения и дисконтирования ренты

Определение. Поток платежей, все члены которого положительны, а временные интервалы между платежами одинаковы, называется финансовой рентой. Основные параметры ренты: **член ренты** - сумма отдельного платежа; **период ренты** - временной интервал между двумя соседними платежами; **срок**

ренты - время от начала первого периода ренты до конца последнего; **процентная ставка ренты** - сложная процентная ставка, используемая для наращения и дисконтирования членов ренты; ***m*** - число начислений процентов в году на члены ренты; ***p*** - число платежей в году.

Если члены ренты выплачиваются раз в год, то рента называется **годовой**. Если члены ренты выплачиваются p раз в году $(p > 1)$, то рента называется p - **срочной**. Если платежи поступают столь часто, что можно считать $p \to \infty$, то ренту называют **непрерывной**. Рента называется **постоянной**, если члены ренты одинаковы и не изменяются во времени. Рента называется **переменной**, если члены ренты изменяются во времени в соответствии с некоторым временным законом. Если платежи производятся в конце каждого периода ренты, то рента называется **обычной** или **постнумерандо**. Рента с платежами в начале каждого периода называется рентой **пренумерандо**.

Рассмотрим расчет современной стоимости и наращенной суммы постоянной **обычной** (постнумерандо) p - срочной ренты. Ежегодно сумма R вносится равными долями p раз в году на банковский счет в течение n лет. Тогда имеем поток из np платежей величиной $\frac{R}{p}$ каждый в моменты $\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \ldots, n$. Примем за единицу измерения времени 1 год. Пусть i - годовая эффективная процентная ставка начисления сложных процентов на поступающие платежи. Согласно современной стоимости потока платежей (формула (4.2)), получаем

$$A = \sum_{k=1}^{np} R_k \nu(t_k) = \frac{R}{p} \sum_{k=1}^{np} (1+i)^{-\frac{k}{p}}.$$

Вычисляя сумму np членов геометрической прогрессии, знаменатель которой $(1+i)^{-\frac{1}{p}}$, получим:

$$A = \frac{R}{p} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1} \tag{5.1}$$

- современная стоимость постоянной обычной p - срочной ренты при начислении процентов на члены ренты 1 раз в году в течение n лет. Отсюда современная стоимость годовой обычной ренты ($p = 1$) при начислении процентов на члены ренты 1 раз в году:

$$A = R \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \tag{5.2}$$

Используя соотношения эквивалентности для эффективной процентной ставки $1+i=(1+\frac{i^{(m)}}{m})^m$ и $1+i=e^{\delta}$ (параграф 1.1), получим современную стоимость обычной p - срочной ренты при начислении на члены ренты сложных процентов m раз в году по номинальной процентной ставке $i(m)$ и непрерывном начислении процентов при постоянной интенсивности процентов δ в год:

$$A=\frac{R}{p}\cdot\frac{1-(1+\frac{i^{(m)}}{m})^{-mn}}{(1+\frac{i^{(m)}}{m})^{\frac{m}{p}}-1} \qquad (5.3)$$

$$A=\frac{R}{p}\cdot\frac{1-e^{-n\delta}}{e^{\frac{\delta}{p}}-1}. \qquad (5.4)$$

Формулы для наращенной суммы ренты можно получить непосредственно по определению согласно формуле (4.3). Например, для постоянной обычной p - срочной ренты при начислении процентов на члены ренты 1 раз в году в течение n лет получаем:

$$S=\sum_{k=1}^{np}R_k F(t_k,T)=\frac{R}{p}\sum_{k=1}^{np}(1+i)^{(n-\frac{k}{p})}=\frac{R}{p}\cdot\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1}\ . \qquad (5.5)$$

Наращенную сумму ренты можно рассчитать, используя формулу связи современной стоимости и наращенной суммы потока платежей (4.6). Например, для годовой ренты при начислении процентов 1 раз в год:

$$S = A\,F(T) = A(1+i)n = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^n=R\frac{(1+i)^n-1}{i} \qquad (5.6)$$

Для других видов обычной ренты из (5.3) и (5.4), используя множители наращения $(1+\frac{i^{(m)}}{m})^{mn}$ и $e^{n\delta}$ соответственно, получим:

$$S=\frac{R}{p}\cdot\frac{(1+\frac{i^{(m)}}{m})^{mn}-1}{(1+\frac{i^{(m)}}{m})^{\frac{m}{p}}-1} \qquad (5.7)$$

$$S=\frac{R}{p}\cdot\frac{e^{n\delta}-1}{e^{\frac{\delta}{p}}-1} \qquad (5.8)$$

В частности, при $m = p$ (период начисления процентов равен периоду ренты) из (5.3) и (5.7) получаем

$$A=R\frac{1-(1+\frac{i^{(p)}}{p})^{-pn}}{i^{(p)}} \qquad (5.9)$$

$$S = R\frac{(1+\frac{i^{(p)}}{p})^{pn}-1}{i^{(p)}} \qquad (5.10)$$

Если единицей измерения времени является 1 год, а R - это выплата за год (единицу времени), то множитель в формулах современной стоимости ренты, равный $\frac{A}{R}$, называется **коэффициентом дисконтирования ренты**. Множитель в формулах наращенной суммы ренты, равный $\frac{S}{R}$, называется **коэффициентом наращения ренты**. Из (5.1)-(5.10) можно получить коэффициенты наращения и дисконтирования всех рассмотренных видов обычной ренты. Рассмотрим некоторые соотношения между этими коэффициентами.

Согласно (5.1) и (5.5), коэффициенты дисконтирования и наращения обычной p – срочной ренты с начислением процентов 1 раз в году в течение n лет равны соответственно

$$a_{n,i}^{(p)} = \frac{1}{p}\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1} \quad \text{и} \quad s_{n,i}^{(p)} = \frac{1}{p}\cdot\frac{(1+i)^{n}-1}{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1}.$$

$a_{n,i}^{(p)}$ и $s_{n,i}^{(p)}$ - это соответственно современная стоимость и наращенная сумма постоянной обычной p – срочной ренты с ежегодной выплатой 1 д.е. равными долями p раз в году в размере $\frac{1}{p}$ в моменты времени $\frac{1}{p},\frac{2}{p},...,n$ с начислением на члены ренты процентов 1 раз в году. Следовательно, $a_{n,i}^{(p)}$ и $s_{n,i}^{(p)}$ связаны соотношением (4.6):

$$s_{n,i}^{(p)} = (1+i)^n a_{n,i}^{(p)} .$$

Аналогичный смысл имеют коэффициенты дисконтирования и наращения других рассмотренных видов обычной ренты. Для этих рент имеем соотношения:

$s_{n,i} = (1+i)^n a_{n,i}$ - годовая рента с начислением процентов 1 раз в год;

$s_{n,i^{(m)}}^{(p)} = (1+\frac{i^{(m)}}{m})^{mn} a_{n,i^{(m)}}^{(p)}$ - p - срочная рента с начислением процентов m раз в год;

$s_{n,\delta}^{(p)} = e^{n\delta} a_{n,\delta}^{(p)}$ - p - срочная рента с непрерывным начислением процентов.

Коэффициенты дисконтирования и наращения годовой ренты при начислении процентов 1 раз в год

$$a_{n,i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \quad \text{и} \quad s_{n,i} = \frac{(1+i)^{n}-1}{i}$$

затабулированы и приводятся в приложениях финансовой литературы. Если применяется p – срочная рента с начислением процентов p раз в год ($m = p$) по годовой номинальной ставке $i(p)$, то за единицу измерения времени можно принять $\frac{1}{p}$ часть года. Тогда $\frac{R}{p}$ - выплата за единицу времени (постнумерандо), $\frac{i^{(p)}}{p}$ - процентная ставка за 1 единицу времени, срок ренты - np единиц времени. Коэффициенты дисконтирования и наращения такой ренты равны соответственно $\frac{A}{R/p} = a_{np,\frac{i^{(p)}}{p}}$ и $\frac{S}{R/p} = s_{np,\frac{i^{(p)}}{p}}$. Из формул (5.9), (5.10) имеем

$$a_{np,\frac{i^{(p)}}{p}} = \frac{1-(1+\frac{i^{(p)}}{p})^{-pn}}{\frac{i^{(p)}}{p}}, \qquad s_{np,\frac{i^{(p)}}{p}} = \frac{(1+\frac{i^{(p)}}{p})^{pn}-1}{\frac{i^{(p)}}{p}},$$

что позволяет для этой ренты использовать те же таблицы коэффициентов. Заметим, что если единицей измерения времени является 1 год, то коэффициенты дисконтирования и наращения этой ренты определяются как $\frac{A}{R} = a^{(p)}_{n,i^{(p)}}$ и $\frac{S}{R} = s^{(p)}_{n,i^{(p)}}$ и рассчитываются по формулам, полученным из (5.9), (5.10):

$$a^{(p)}_{n,i^{(p)}} = \frac{1-(1+\frac{i^{(p)}}{p})^{-pn}}{i^{(p)}}, \qquad s^{(p)}_{n,i^{(p)}} = \frac{(1+\frac{i^{(p)}}{p})^{pn}-1}{i^{(p)}}.$$

Тогда

$$a^{(p)}_{n,i^{(p)}} = \frac{1}{p}\, a_{np,\frac{i^{(p)}}{p}} \quad \text{и} \quad s^{(p)}_{n,i^{(p)}} = \frac{1}{p}\, s_{np,\frac{i^{(p)}}{p}}. \tag{5.11}$$

Пример 5.1. В конце каждого месяца на сберегательный счет инвестируется 200 д.е. На поступающие платежи ежемесячно начисляют сложные проценты по годовой ставке 12 %. Какова величина вклада через 2 года? Какую сумму мог бы разместить инвестор на депозитный счет для получения такой же величины вклада через 2 года?

Взносы на сберегательный счет поступают в виде обычной p - срочной ренты с начислением процентов p раз в году в течение 2 лет. Здесь $n = 2$, $p = 12$, $i^{(p)} = 0{,}12$. Если за единицу измерения времени принять 1 месяц, то $\frac{R}{p} = 200$ д.е. - выплата за единицу времени, $\frac{i^{(p)}}{p} = \frac{0{,}12}{12} = 0{,}01$ - процентная ставка за 1 единицу времени, срок ренты np = 24 единицы времени. По таблице коэффициентов наращения дискретных рент находим s24, 0.01 = 26,97346485. Тогда наращенная сумма вклада через два года $S = \frac{R}{p} s_{np, \frac{i^{(p)}}{p}}$ = 200 s24, 0.01 = 5394,69 (д.е.). Сумма, которую мог бы разместить инвестор на депозитный счет для получения такой же величины вклада через 2 года - это современная стоимость ренты $A = \frac{R}{p} a_{np, \frac{i^{(p)}}{p}}$ = 200a24,0.01 = 4248,68 (д.е.), где коэффициент дисконтирования a24,0.01 = 21,2433873 определен по таблице коэффициентов. Так как $A\left(1+\frac{i^{(p)}}{p}\right)^{np}$ = 4248,68(1+0,01)24 = 5394,69 (д.е.), то размещение суммы 4248,68 д.е. на депозитный счет для начисления на нее ежемесячно сложных процентов по годовой ставке 12 % позволит инвестору через два года получить ту же сумму вклада.

Рассмотрим ренту **пренумерандо**. Связь между коэффициентами дисконтирования и наращения рент **пренумерандо** и **постнумерандо** следует из их определения. Срок дисконтирования каждого платежа ренты пренумерандо уменьшается, а срок наращения увеличивается на один период ренты по сравнению с обычной рентой. По - прежнему единицей измерения времени считаем 1 год. Если $\tilde{a}_{n,i}^{(p)}$ и $\tilde{s}_{n,i}^{(p)}$ - коэффициенты дисконтирования и наращения p - срочной ренты пренумерандо (платежи поступают в начале каждого периода длиной $\frac{1}{p}$) при начислении на члены ренты процентов 1 раз в год, то справедливы соотношения:

$$\tilde{a}_{n,i}^{(p)} = (1+i)^{\frac{1}{p}} a_{n,i}^{(p)} \qquad \tilde{s}_{n,i}^{(p)} = (1+i)^{\frac{1}{p}} s_{n,i}^{(p)} \qquad \tilde{s}_{n,i}^{(p)} = (1+i)n\ \tilde{a}_{n,i}^{(p)}.$$

Отсюда при p = 1 получаем соотношения для годовых рент:

$$\tilde{a}_{n,i} = (1+i) \quad a_{n,i} \qquad \tilde{s}_{n,i} = (1+i)\ s_{n,i} \qquad \tilde{s}_{n,i} = (1+i)n\ \tilde{a}_{n,i}.$$

При непрерывном начислении процентов для p - срочной ренты имеем соотношения:

$$\tilde{a}_{n,\delta}^{(p)} = e^{\frac{1}{p}} a_{n,\delta}^{(p)}, \qquad \tilde{s}_{n,\delta}^{(p)} = e^{\frac{1}{p}} s_{n,\delta}^{(p)}, \qquad \tilde{s}_{n,\delta}^{(p)} = e^{n\delta}\ \tilde{a}_{n,\delta}^{(p)}.$$

Рассмотрим **непрерывную** ренту. Коэффициенты дисконтирования и наращения постоянной непрерывной ренты можно получить из формул для p - срочной ренты при $p \to \infty$ или по определению (формулы (4.9), (4.10)) для непрерывного равномерно выплачиваемого потока платежей с постоянной годовой интенсивностью $f(t) = 1$. Например, для постоянной непрерывной ренты при непрерывном начислении процентов по постоянной силе роста δ получаем: $\bar{a}_{n,\delta} = \lim\limits_{p\to\infty} a_{n,\delta}^{(p)} = \lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{1-e^{-n\delta}}{p(e^{\frac{\delta}{p}}-1)} = \lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{1-e^{-n\delta}}{p\left(\dfrac{\delta}{p}\right)} = \dfrac{1-e^{-n\delta}}{\delta}$, где $a_{n,\delta}^{(p)}$ - коэффициент дисконтирования обычной p - срочной ренты при непрерывном начислении процентов. Заметим, что так как $\lim\limits_{p\to\infty} \tilde{a}_{n,\delta}^{(p)} = \lim\limits_{p\to\infty} e^{\frac{1}{p}} a_{n,\delta}^{(p)} = \lim\limits_{p\to\infty} a_{n,\delta}^{(p)}$, где $\tilde{a}_{n,\delta}^{(p)}$ - коэффициент дисконтирования p - срочной ренты пренумерандо при непрерывном начислении процентов, то

$$\lim_{p\to\infty} a_{n,\delta}^{(p)} = \lim_{p\to\infty} \tilde{a}_{n,\delta}^{(p)} = \bar{a}_{n,\delta}.$$

Действительно, при непрерывно поступающих платежах различие между рентами пренумерандо и постнумерандо исчезает.

Коэффициент дисконтирования постоянной непрерывной ренты при начислении процентов 1 раз в год получим по определению:

$$\bar{a}_{n,i} = \int_0^n f(t)v(t)dt = 1\cdot\int_0^n (1+i)^{-t}\,dt = -\frac{(1+i)^{-t}}{\ln(1+i)}\Bigg|_0^n = \frac{1-(1+i)^{-n}}{\ln(1+i)}.$$

Коэффициенты наращения непрерывных рент можно найти из равенств вида (4.6): $\bar{s}_{n,\delta} = e^{n\delta}\,\bar{a}_{n,\delta} = \dfrac{e^{n\delta}-1}{\delta}$, $\quad \bar{s}_{n,i} = (1+i)^n\,\bar{a}_{n,i} = \dfrac{(1+i)^n-1}{\ln(1+i)}$.

Соотношения между коэффициентами дисконтирования рассмотренных трех видов рент - обычной, пренумерандо и непрерывной - можно установить из следующих соображений. Так как $p\left((1+i)^{\frac{1}{p}}-1\right) = i^{(p)}$, где $i(p)$ - эквивалентная годовая номинальная процентная ставка, то

$$a_{n,i}^{(p)} = \frac{1}{p}\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i^{(p)}} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\cdot\frac{i}{i^{(p)}} = a_{n,i}\,\frac{i}{i^{(p)}}.$$

С другой стороны,

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i^{(p)}} = \frac{1-e^{-n\delta}}{\delta}\cdot\frac{\delta}{i^{(p)}} = \bar{a}_{n,\delta}\,\frac{\delta}{i^{(p)}}.$$

Следовательно

$$a_{n,i}^{(p)} = a_{n,i}\,\frac{i}{i^{(p)}} = \bar{a}_{n,\delta}\,\frac{\delta}{i^{(p)}}, \qquad (5.12)$$

где $a_{n,i}$, $\bar{a}_{n,\delta}$ - коэффициенты дисконтирования обычной годовой ренты с начислением процентов 1 раз в год и постоянной непрерывной ренты при непрерывном начислении процентов. Равенства (5.12) можно продолжить для ренты пренумерандо, если учесть соотношения коэффициентов дисконтирования обеих рент:

$$a_{n,i}^{(p)} = \frac{\tilde{a}_{n,i}^{(p)}}{(1+i)^{\frac{1}{p}}} \quad \text{и} \quad a_{n,i} = \frac{\tilde{a}_{n,i}}{1+i} \quad .$$

Тогда

$$a_{n,i}^{(p)} = \frac{\tilde{a}_{n,i}^{(p)}}{(1+i)^{\frac{1}{p}}} = a_{n,i}\,\frac{i}{i^{(p)}} = \frac{\tilde{a}_{n,i}}{(1+i)}\cdot\frac{i}{i^{(p)}} = \tilde{a}_{n,i}\,\frac{d}{i^{(p)}}. \qquad (5.13)$$

где $d = \frac{i}{1+i}$ - эквивалентная учетная ставка. Из (5.12), (5.13) получаем

$$i\,a_{n,i} = i^{(p)}\,a_{n,i}^{(p)} = d\,\tilde{a}_{n,i} = d^{(p)}\,\tilde{a}_{n,i}^{(p)} = \delta\,\overline{a}_{n,\delta} \quad , \qquad (5.14)$$

где $d^{(p)} = \frac{i^{(p)}}{(1+i)^{\frac{1}{p}}}$ - эквивалентная номинальная учетная ставка. Каждое выражение в этом равенстве - современная стоимость процентов, выплачиваемых по займу 1 д.е. на протяжении n лет в соответствии с различными способами выплаты процентов. Аналогичные соотношения можно получить и для коэффициентов наращения рент.

Если полагают, что срок ренты $n = \infty$, то ренту называют **вечной**. Наращенная сумма вечной ренты бесконечна. Однако современную величину такой ренты можно найти. Для обычной вечной p - срочной ренты с начислением процентов 1 раз в год получаем при $n \to \infty$:

$$a_{\infty,i}^{(p)} = \lim_{n\to\infty} a_{n,i}^{(p)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-(1+i)^{-n}}{i^{(p)}} = \frac{1}{i^{(p)}} \; .$$

Для такой же ренты пренумерандо

$$\tilde{a}_{\infty,i}^{(p)} = \lim_{n\to\infty}\tilde{a}_{n,i}^{(p)} = \lim_{n\to\infty}(1+i)^{\frac{1}{p}}\,a_{n,i}^{(p)} = (1+i)^{\frac{1}{p}}\lim_{n\to\infty} a_{n,i}^{(p)} = \frac{(1+i)^{\frac{1}{p}}}{i^{(p)}} = \frac{1}{d^{(p)}} \; .$$

Кроме того,

$$\tilde{a}_{\infty,i}^{(p)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p}(1+i)^{-\frac{k}{p}} = \frac{1}{p} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{p}(1+i)^{-\frac{k}{p}} = \frac{1}{p} + a_{\infty,i}^{(p)} .$$

Таким образом,

$$a_{\infty,i}^{(p)} = \frac{1}{i^{(p)}} \;, \qquad \tilde{a}_{\infty,i}^{(p)} = \frac{1}{d^{(p)}}, \qquad \tilde{a}_{\infty,i}^{(p)} = \frac{1}{p} + a_{\infty,i}^{(p)} . \qquad (5.15)$$

Если вечная рента является годовой ($p = 1$), то имеем

$$a_{\infty,i}=\frac{1}{i}\quad,\qquad \tilde{a}_{\infty,i}=\frac{1}{d},\qquad \tilde{a}_{\infty,i}\ =\ 1+a_{\infty,i}\ . \tag{5.16}$$

Если начало ренты, т.е. начало ее первого периода, переносится в будущее на t единиц времени относительно текущего момента $t = 0$, то такую ренту называют **отсроченной**. Современная стоимость отсроченной ренты At определяется следующим образом. Согласно определению современной стоимости потока платежей,

$$A_t=\sum_{k=1}^{n}R_k\,\nu(t_k)=\sum_{k=1}^{n}R_k\,\nu(t,t_k)\nu(t)\ =\ \nu(t)\sum_{k=1}^{n}R_k\,\nu(t,t_k)\ =\ \nu(t)\,A\,,$$

где $\nu(t_k)$, $\nu(t,t_k)$, $\nu(t)$ - дисконтные множители k - го платежа на временных отрезках [0, tk], [t, tk], [0, t] соответственно. Так как $A=\sum_{k=1}^{n}R_k\,\nu(t,t_k)$, то A -стоимость ренты, рассчитанная на момент начала ее первого периода, т.е. на момент начала неотсроченной ренты. Следовательно, A - это современная стоимость неотсроченной ренты. Таким образом, современная стоимость отсроченной ренты определяется путем дисконтирования по процентной ставке ренты в течение времени t современной стоимости A неотсроченной ренты:

$$A_t\ =\ \nu(t)\,A\,, \tag{5.17}$$

Пример 5.2. По контракту произведенная продукция стоимостью 2 млн. д.е. оплачивается в рассрочку в конце каждого квартала в течение пяти лет с начислением сложных процентов раз в год по ставке 10% годовых. Найти величину отдельного взноса, если начало оплаты продукции перенесено на полгода после подписания контракта.

Если начало отсчета времени $t = 0$ – это момент подписания контракта, а единица измерения времени – 1 год, то здесь $n = 5$, $p = 4$, $i = 0{,}1$, $t = 0{,}5$. Согласно формуле (5.17), стоимость потока платежей по оплате продукции на момент подписания контракта равна $A_t\ =\ \nu(t)\,A=\ \frac{1}{(1+i)^t}A$, где At = 2 млн. д.е., A - современная стоимость неотсроченной обычной p - срочной ренты с начислением процентов 1 раз в году в течение n лет. Согласно (5.1), $A=\frac{R}{p}\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1}$. Из формул для At и A находим величину отдельного взноса $\frac{R}{p}$ = 133432,20 д.е. против $\frac{1}{(1+i)^t}$ 133432,20 = 127222,61 д.е., если бы начало оплаты продукции не откладывалось.

5.2. Свойства коэффициентов наращения и дисконтирования ренты

Рассмотрим зависимость коэффициентов дисконтирования и наращения ренты от срока ренты и процентной ставки. Поскольку характер зависимости не должен зависеть от числа платежей в году, рассмотрим годовую обычную ренту с начислением процентов 1 раз в год.

1) $i = 0$: $a_{n,i} = \left(\frac{1}{1+i}+\ldots+\frac{1}{(1+i)^n}\right)\Big|_{i=0} = n$, $s_{n,i} = \left((1+i)^{n-1}+\ldots+(1+i)+1\right)\Big|_{i=0} = n$.

Ситуацию можно рассматривать как беспроцентный долг, выданный в сумме n и возвращаемый равными долями в течение n лет.

2) Установим зависимость от i коэффициента наращения ренты $s_{n,i}$:

$$s_{n,i} = (1+i)^{n-1}+\ldots+(1+i)+1.$$

Очевидно, $s_{n,i}$ - возрастающая функция i, что следует из свойств наращенной суммы разового платежа.

3) Установим зависимость от i коэффициента дисконтирования ренты $a_{n,i}$: $a_{n,i} = \frac{1}{1+i}+\ldots+\frac{1}{(1+i)^n}$.

Очевидно, $a_{n,i}$ - убывающая функция i, что следует из свойств современной стоимости разового платежа.

4) Установим зависимость от n коэффициента наращения ренты $s_{n,i}$:

$$s_{n,i} = \frac{(1+i)^n-1}{i}, \text{ где } n \ge 0 .$$

Так как $(s_{n,i})'_n > 0,\ (s_{n,i})''_{nn} > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} s_{n,i} = \infty$, то $s_{n,i}$ - возрастающая выпуклая функция аргумента n.

5) Установим зависимость от n коэффициента дисконтирования ренты $a_{n,i}$: $a_{n,i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$, где $n \ge 0$.

Так как $(a_{n,i})'_n > 0,\ (a_{n,i})''_{nn} < 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n,i} = \frac{1}{i}$ (вечная рента), то $a_{n,i}$ - возрастающая вогнутая функция аргумента n

Эти свойства используются в задачах на определение параметров ренты.

5.3. Определение параметров ренты

Параметры ренты R, n, i рассматриваются как основные, p и m – как вспомогательные. При разработке контрактов возможны случаи, когда задается современная стоимость A или наращенная сумма ренты S и два основных параметра. Требуется найти третий.

Определение члена ренты.

Рассматриваются задачи типа: заданы S, n, i или A, n, i. Найти R (годовая рента). Значения годового взноса R находят из равенств:

$S = R\, s_{n,i}$ и $A = R\, a_{n,i}$.

Определение срока ренты. Заданы A, R, i. Найти n.

Так как $A = R\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$, то $\dfrac{iA}{R} = 1-(1+i)^{-n} < 1$, если n - конечно и $\dfrac{iA}{R} = 1$ при $n \to \infty$ (вечная рента). Отсюда получаем условие разрешимости задачи о сроке ренты: $R > Ai$. В общем случае, когда заданы $A, \dfrac{R}{p}, \dfrac{i^{(m)}}{m}$, то условие разрешимости задачи имеет вид:

$$\frac{R}{p} > A\left((1+\frac{i^{(m)}}{m})^{\frac{m}{p}} - 1\right).$$

Заметим, что если современную стоимость ренты рассматривать как сумму, выданную в долг и погашаемую в соответствии с условиями ренты, то полученные неравенства можно рассматривать как условие возврата долга. Если заданы S, R, i, то задача определения срока ренты n всегда разрешима.

Для нахождения n выражения современной стоимости и наращенной суммы разрешают относительно n.

Определение процентной ставки ренты. Заданы A, R, n. Найти i.

Так как $A = R\left(\dfrac{1}{1+i}+\ldots+\dfrac{1}{(1+i)^n}\right) < R\dfrac{n}{1+i} < Rn$,если $i > 0$, то условие разрешимости задачи имеет вид: $A < Rn$.

Заданы S, R, n. Так как при $i > 0$ $S = R((1+i)^{n-1}+\ldots+(1+i)+1) > Rn$, то условие разрешимости задачи в этом случае имеет вид: $S > Rn$.

При выполнении условия разрешимости процентная ставка ренты находится на основании теорем 4.1, 4.2 (см. примеры 4.2 и 4.4) методом линейной интерполяции (или другим приближенным методом).

§ 6. Оценка эффективности инвестиционных проектов

6.1. Инвестиции и их виды

В соответствии с законом РФ **инвестиции** определяются как вложение денежных средств (или иных ценностей, имеющих денежную оценку) для получения доходов в будущем. Будем рассматривать только такие инвестиции, цели которых выражаются в денежной форме (максимизация дохода, состояния, прибыли и др.). Инвестиции осуществляются, как правило, для достижения долгосрочных целей, не связанных с текущим потреблением. Различают реальные и финансовые инвестиции.

Реальные инвестиции - это вложение денежных средств в материальные ресурсы: землю, недвижимость, оборудование. Производственные инвестиции - один из видов реальных инвестиций. Это вложения в создание, реконструкцию или перепрофилирование производственного предприятия.

Финансовые инвестиции - это вложение денежных средств в финансовые инструменты. Финансовый инструмент - это ценная бумага любого вида. Ценная бумага - это документ, закрепляющий за ее держателем право на получение при определенных условиях доходов в будущем. Различают основные и производные финансовые инструменты. Основные - акции, облигации, векселя, сберегательные счета и депозиты. К производным финансовым инструментам относятся финансовые фьючерсы, опционы, варранты и др.

Как правило, реальные и финансовые инвестиции являются взаимодополняющими. Например, компании требуются средства для строительства завода. Эти реальные инвестиции можно профинансировать за счет продажи новых акций на первичном рынке ценных бумаг. В свою очередь, покупка акций представляет собой финансовые инвестиции для покупателей. В развитых экономиках финансовые инвестиции составляют большую часть всех инвестиций и играют важную роль в финансировании реальных инвестиций в экономику. В данном параграфе изучаются методы оценки эффективности производственных инвестиций.

6.2. Показатели эффективности инвестиционных проектов

Для привлечения производственных инвестиций разрабатывается инвестиционный проект. Основная характеристика инвестиционного проекта – финансовый поток расходов и доходов. Этот поток представляет собой модель предполагаемого потока платежей по проекту и строится на основе совокупности прогнозных оценок на время реализации проекта. Инвестиционный проект, рассматриваемый в условиях определенности, описывается своим чистым денежным потоком $R0, R1, R2,\ldots, Rn$ в моменты времени $t = 0, t1, t2,\ldots, tn$ соответственно, где $0 < t1 < t2 < \ldots < tn = T$. Начало проекта $t = 0$ - момент вложения исходной инвестиции в размере I, T - срок проекта. Как следует из определения чистого денежного потока (параграф 1.4), член потока $Rk = ak - bk$, $k = 0,1, 2,\ldots, n$, где $a0, a1, a2 ,\ldots, an$ – доходы по проекту в моменты $t = 0, t1, t2,\ldots, tn$ и расходы $b0 = I, b1, b2 ,\ldots, bn$ в те же моменты времени (в большинстве случаев только одна из сумм ak и bk будет ненулевой). Член денежного потока $R0 = - b0 = - I$, так как очевидно, что $a0 = 0$. $Rk > 0$ означает превышение поступления над расходом в момент tk,, при обратном соотношении $Rk < 0$. Очевидно, могут быть и нулевые члены денежного потока. Если финансовый поток проекта представляет собой непрерывно-дискретный поток платежей (см. параграф 1.4), то чистый денежный поток проекта содержит чистую интенсивность $f(t) = f2(t) - f1(t)$, где $f2(t)$ и $f1(t)$ – интенсивности потоков доходов и расходов в момент t соответственно, $t \in [\tau_1, \tau_2] \subseteq [0, T]$. Таким образом, инвестиционный проект описывается финансовым потоком вида

($R0, R1, R2,\ldots,Rn$ в моменты $t = 0, t1, t2,\ldots, tn$)

или

($R0, R1, R2,\ldots,Rn$ в моменты $t = 0, t1, t2,\ldots, tn$; $f(t)$, $t \in [\tau1,\tau2] \subseteq [0, T]$),

где $Rk = ak - bk$, $k = 0,1, 2,\ldots, n$;

($a0, a1, a2 ,\ldots, an$ в моменты $t = 0, t1, t2,\ldots, tn$; $f2(t)$, $t \in [\tau1,\tau2] \subseteq [0, T]$)

- поток доходов от проекта;

($b0 = I, b1, b2 ,\ldots, bn$ в моменты $t = 0, t1, t2,\ldots, tn$; $f1(t)$, $t \in [\tau1,\tau2] \subseteq [0, T]$)

- поток инвестиций в проект.

Например, финансовый поток проекта в примере 4.2 (параграф 1.4) имеет вид:

(-400000, 30000, 70000, 150000, 200000 в моменты

$t = 0$, $t1= 1$, $t2=1,5$, $t3 = 2,5$, $t4 = 4$),

а финансовый поток проекта в примере 4.4:

(-1000, -2000, -3000, 1500 в моменты

$t = 0$, $t1= 1$, $t2=2$, $t3 = 4$; $f(t) = 1000$, $6 \le t \le 16$).

Если временные интервалы между членами денежного потока одинаковы, то период проекта - временной интервал между двумя соседними членами денежного потока. Поступления и расходы относят на конец периода. Если период проекта - год, то членам денежного потока $R0, R1, R2,\ldots,Rn$ соответствуют моменты времени, измеряемые в годах, $t = 0$, $t1 = 1$, $t2 = 2,\ldots, tn = n$. Срок проекта $T = n$ лет. Тогда проект описывается финансовым потоком вида

($R0, R1, R2,\ldots,Rn$) (6.1)

или непрерывно-дискретным потоком платежей:

($R0$, $R1$, $R2$,…,Rn; $f(t)$, $t \in [\tau_1, \tau_2] \subseteq [0, T]$). (6.2)

Проект классического характера – это проект, в котором денежный поток вида (6.1) или (6.2) меняет знак только один раз или расходы инвестора предшествуют доходам от проекта. Очевидно, что те проекты, для которых $\sum_{k=0}^{n} R_k + \int_0^T f(t)\,dt \le 0$, неприемлемы. Следует рассматривать лишь те проекты, для которых эта сумма положительна (сумма доходов по проекту превышает сумму расходов).

Для оценки эффективности инвестиционного проекта используют четыре показателя, основанные на дисконтировании членов финансового потока проекта к моменту $t = 0$:

чистая современная стоимость проекта (*net present value*, *NPV*);

внутренняя норма доходности (*internal rate of return, IRR*);

срок окупаемости (*discounted payback period, DPP*);

индекс доходности (*profitability index*, *PI*).

Каждый из показателей – это результат сопоставления современных стоимостей инвестиций в проект и отдач от инвестиций. Для дисконтирования членов финансового потока проекта применяется процентная ставка i. Необходимо, чтобы процентная ставка и сроки платежей по проекту были согласованы между собой. Существует несколько подходов для определения ставки дисконтирования. Будем считать, что i – годовая процентная ставка, по которой инвестор мог бы дать взаймы или занять деньги. Рассмотрим определения и свойства показателей эффективности проектов с классической схемой инвестирования (сначала вложения средств, затем отдача), денежный поток которых имеет вид (6.1) или (6.2). Единица измерения времени – год.

Определение. Чистая современная стоимость проекта $NPV(i)$ при процентной ставке i - это современная стоимость чистого денежного потока проекта по процентной ставке i.

$NPV(i)$ проекта с дискретным потоком платежей (6.1):

$$NPV(i) = \sum_{k=0}^{n} \frac{R_k}{(1+i)^k} \quad . \qquad (6.3)$$

$NPV(i)$ проекта с непрерывно - дискретным потоком платежей (6.2):

$$NPV(i) = \sum_{k=0}^{n} \frac{R_k}{(1+i)^k} + \int_0^T \frac{f(t)}{(1+i)^t}\,dt \quad . \qquad (6.4)$$

Пример 6.1. Вычислим значения показателя $NPV(i)$ для следующих проектов.

A (-1000, -2000, -3000, 1500 в моменты $t = 0$, $t1 = 1$, $t2 = 2$, $t3 = 4$; $f(t) = 1000$, $6 \le t \le 16$)

при ставке дисконтирования 5 % годовых:

$$NPV(i) = -1000 - \frac{2000}{1+i} - \frac{3000}{(1+i)^2} + \frac{1500}{(1+i)^4} + \int_6^{16} \frac{1000\,dt}{(1+i)^t} =$$

$$= -1000 - \frac{2000}{1+i} - \frac{3000}{(1+i)^2} + \frac{1500}{(1+i)^4} + \frac{1000}{\ln(1+i)} \left[\frac{1}{(1+i)^6} - \frac{1}{(1+i)^{16}} \right] = 1513{,}16.$$

Проект B(-1000,-300,500,500,500,500) при ставке дисконтирования 5 % годовых:

$$NPV(i) = -1000 - \frac{300}{1+i} + \frac{500}{(1+i)^2} + \frac{500}{(1+i)^3} + \frac{500}{(1+i)^4} + \frac{500}{(1+i)^5} = 402{,}8.$$

Проект C(-90,30,40,40) при ставке дисконтирования 12 % годовых:

$$NPV(i) = -90 + \frac{30}{1+i} + \frac{40}{(1+i)^2} + \frac{40}{(1+i)^3} = -2{,}86.$$

6.3. Свойства и экономическое содержание *NPV*(*i*)

1) Если $NPV(i) \ge 0$, то доходы от проекта окупают вложенные инвестиции. При $NPV(i) < 0$ доходы не окупают инвестиций. Действительно, например для проекта с непрерывно - дискретным потоком платежей:

$$NPV(i) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(1+i)^k} + \int_0^T \frac{f_2(t)}{(1+i)^t}\,dt - \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{(1+i)^k} - \int_0^T \frac{f_1(t)}{(1+i)^t}\,. \qquad (6.5)$$

Как видим, $NPV(i)$ – это разность между современной стоимостью доходов от проекта и современной стоимостью инвестиций в этот проект. Отсюда следует, что при $NPV(i) > 0$ проект является прибыльным. При $NPV(i) < 0$ проект является убыточным. При $NPV(i) = 0$ проект ни прибыльный, ни убыточный, но, согласно [5], скорее всего будет принят. В примере 6.1 проекты A и B являются прибыльными, проект C приводит к потерям.

2) Чистая современная стоимость проекта $NPV(i)$ характеризует возможный прирост (убытки) капитала инвестора в результате реализации проекта по сравнению с альтернативными вложениями под ставку i.

Чтобы обосновать это свойство, рассмотрим величину $NFV(i)$ (*net future value*), называемую **чистой будущей стоимостью проекта**:

$$NFV(i) = NPV(i)(1+i)T. \qquad (6.6)$$

Отсюда

$$NFV(i) = \sum_{k=0}^{n} R_k (1+i)^{n-k} + \int_0^T f(t)(1+i)^{T-t}\, dt \quad ,$$

или

$$NFV(i) = \sum_{k=0}^{n} a_k (1+i)^{n-k} + \int_0^T f_2(t)(1+i)^{T-t}\, dt \; - \left(\sum_{k=0}^{n} b_k (1+i)^{n-k} + \int_0^T f_1(t)(1+i)^{T-t}\, dt \right).$$

Поясним экономический смысл полученного выражения. Предположим, что проект осуществляется за счет собственных средств инвестора, i – годовая банковская процентная ставка по срочному вкладу на T лет. Тогда первые два слагаемых можно рассматривать как результат реинвестирования к моменту T доходов от проекта. Выражение в скобках – потери инвестора при реализации инвестиционного проекта вследствие того, что он не разместил свои деньги на банковский счет, а вложил их в проект. Если $NFV(i) > 0$, то инвестору выгоднее финансировать проект, а не вкладывать деньги в банк под ставку i, а сама величина $NFV(i)$ показывает насколько выгоднее. Если $NFV(i) < 0$, то вывод противоположный, а сама величина $NFV(i)$ показывает в этом случае размер убытков инвестора в случае реализации проекта. При $NFV(i) = 0$ инвестор предпочтет тот способ вложения денег – в проект или на банковский счет – который является более надежным. Таким образом, $NFV(i)$ – это показатель конечного состояния инвестора в случае реализации проекта по сравнению с альтернативным вложением средств. Так как показатели $NFV(i)$ и $NPV(i)$ связаны соотношением (6.6), то величина $NPV(i)$ характеризует конечное состояние инвестора в результате реализации проекта следующим образом. $NPV(i) > 0$ означает, что проект является выгодным, так как позволяет получить прибыль по сравнению с альтернативным вложением инвестиций. $NPV(i) < 0$ означает, что инвестору выгоднее положить свой капитал в банк на T лет под ставку i, чем финансировать проект.

Пример 6.2. Является ли выгодным проект, по которому вложение 1 млн. д.е. приносит ежегодно доход 100 тыс. д.е. в течение 15 лет? Банковская ставка по депозитам на этот срок 5 % годовых.

Чистый денежный поток проекта имеет вид:

(-1000000,100000,…,100000 в моменты $t = 0$, $t1 = 1$, …, $t15 = 15$).

Инвестиции – разовые в размере $I = 1000000$ д.е. в момент $t = 0$, поток доходов – годовая обычная рента. Современная стоимость потока доходов составляет Ran,i, где $R = 100000$, $n = 15$, $i = 0{,}05$. Чистая современная стоимость проекта равна

$NPV(i) = Ran,i - I = 100000\ a15; 0,05 - 1000000 = 37965,80$ д.е.

Так как $NPV(i) > 0$, то проект является выгодным. По окончании проекта прибыль инвестора по сравнению с размещением денег на депозит составит

$NFV(i) = NPV(i)(1+i)15 = 78928,18$ д.е.

При этом на банковском счете инвестора будет накоплена сумма Rsn,i = 2157856,36 д.е. (доходы от проекта реинвестируются под ставку 5% годовых) против суммы $1000000(1 + i)15 = 2078928,18$, которая была бы получена инвестором при вкладе 1000000 д.е. на депозит на 15 лет под ставку 5 %. Разность $Rsn,i - 1000000(1 + i)15$ составляет величину $NFV(i)$.

3) Если $NPV(i) > 0$, то $NPV(i)$ – это максимальная величина, на которую можно увеличить инвестиции в проект при данных доходах и ставке дисконтирования i так, чтобы проект не стал убыточным.

Действительно, пусть в (6.5) $NPV(i) > 0$. Если увеличить инвестиции в проект в момент $t = 0$, сохраняя все остальные параметры проекта неизменными, то величина $NPV(i)$ очевидно станет меньше. Если инвестиции в проект увеличить на величину $\Delta = NPV(i) > 0$, то чистая современная стоимость полученного проекта станет равной нулю:

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(1+i)^k} + \int_0^T \frac{f_2(t)}{(1+i)^t} dt - \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{(1+i)^k} - \int_0^T \frac{f_1(t)}{(1+i)^t} - \Delta .$$

Дальнейшее увеличение инвестиций в проект сделает его убыточным, так как приведет к отрицательному значению чистой современной стоимости проекта.

Определение. Внутренняя норма доходности проекта (*IRR*) – это ставка дисконтирования r, при которой чистая современная стоимость проекта равна нулю:

$$NPV(r) = 0. \qquad (6.7)$$

Для проектов с непрерывно-дискретным и дискретным потоком платежей это уравнение имеет вид соответственно:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{R_k}{(1+r)^k} + \int_0^T \frac{f(t)}{(1+r)^t} dt = 0 \qquad (6.8)$$

и

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{R_k}{(1+r)^k} = 0. \qquad (6.9)$$

Эти выражения совпадают с уравнениями доходности денежного потока (4.11) и (4.13) в параграфе 1.4. Поэтому решение уравнения (6.7), если оно существует, называют доходностью проекта. Существование решения устанавливается теоремой 4.2. Согласно этой теореме, уравнение (6.7) для проекта классического характера, удовлетворяющего условию $\sum_{k=0}^{n} R_k + \int_0^T f(t)\,dt > 0$ (или $\sum_{k=0}^{n} R_k > 0$ для проекта с дискретным потоком платежей), имеет единственное положительное решение. Это решение находят, используя приближенные методы, например метод линейной интерполяции (рассмотрен в параграфе 1.4, примеры 4.2, 4.4). Таким образом, решение уравнения (6.7) – это значение показателя *IRR* проекта. Величина *IRR* полностью определяется "внутренними" характеристиками самого проекта и не зависит, например, от ставки дисконтирования *i*. Расчет *IRR* часто применяют в качестве первого шага анализа инвестиций.

Пример 6.3. Значение показателя *IRR* проекта *A*(-1000, -2000, -3000, 1500 в моменты $t = 0$, $t1 = 1$, $t2 = 2$, $t3 = 4$; $f(t) = 1000$, $6 \le t \le 16$) получено в примере 4.4 (параграф 1.4): $r \approx 0{,}081884$ ($\approx$ 8,2 % годовых).

Значение показателя *IRR* проекта *B*(-1000,-300,500,500,500,500) находим из уравнения доходности:

$$-1000 - \frac{300}{1+r} + \frac{500}{(1+r)^2} + \frac{500}{(1+r)^3} + \frac{500}{(1+r)^4} + \frac{500}{(1+r)^5} = 0.$$

Методом линейной интерполяции определяем

$r \approx 0{,}14425$ ($\approx$ 14,43 % годовых).

Для проекта *C*(-90,30,40,40) уравнение доходности имеет вид:

$$-90 + \frac{30}{1+r} + \frac{40}{(1+r)^2} + \frac{40}{(1+r)^3} = 0.$$

Методом линейной интерполяции находим

$r \approx 0{,}10230$ ($\approx$ 10,23 % годовых).

6.4. Свойства и экономическое содержание внутренней нормы доходности

1) При ставке дисконтирования, равной *IRR*, инвестиционные вложения в точности окупаются доходами, но не приносят прибыль. Действительно, как следует из свойств чистой современной стоимости проекта, равенство $NPV(r) = 0$ означает, что при ставке дисконтирования, равной *IRR*, проект ни прибыльный, ни убыточный.

Уравнения (6.8) и (6.9) можно записать иначе:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(1+r)^k} + \int_0^T \frac{f_2(t)}{(1+r)^t}\,dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{(1+r)^k} + \int_0^T \frac{f_1(t)}{(1+r)^t} \quad (6.10)$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{(1+r)^k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{b_k}{(1+r)^k}\ . \qquad (6.11)$$

Равенства (6.10) и (6.11) означают, что при ставке дисконтирования, равной *IRR*, современные стоимости потока инвестиций в проект и потока доходов совпадают.

2) Выясним, при каких условиях внутренняя норма доходности проекта r, т.е. значение показателя *IRR*, является среднегодовой доходностью этого проекта. Рассмотрим проект с дискретным потоком платежей, члены которого удовлетворяют условию $\sum_{k=0}^{n} R_k > 0$. Реализацию проекта будем рассматривать как финансовую операцию за счет собственных средств инвестора. При ставке дисконтирования, равной r, денежная оценка начального состояния инвестора имеет вид:

$$P(0) = \sum_{k=0}^{n}\frac{b_k}{(1+r)^k}\ . \qquad (6.12)$$

Если доходы от проекта реинвестируются по ставке r до окончания проекта, то денежная оценка момента окончания проекта T для инвестора имеет вид:

$$P(T) = \sum_{k=0}^{n} a_k (1+r)^{T-k}\ . \qquad (6.13)$$

Тогда согласно формуле (2.2) $P(T) = P(0)(1+\bar{r})^T$, где $\bar{r}$ - среднегодовая доходность инвестиций в проект. Подставим в это равенство выражения (6.12) и (6.13):

$$\sum_{k=0}^{n} a_k (1+r)^{T-k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{b_k}{(1+r)^k}\ (1+\bar{r})^T\ .$$

Отсюда

$$(1+r)^T\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{(1+r)^k}=(1+\bar{r})^T\sum_{k=0}^{n}\frac{b_k}{(1+r)^k}\ .$$

Учитывая равенство (6.11), получим $r = \bar{r}$. Таким образом, внутренняя норма доходности проекта r является среднегодовой доходностью этого проекта, если в течение всего срока проекта ставка дисконтирования равна r и все доходы от проекта реинвестируются по ставке r до окончания проекта. Тогда для *IRR* справедлива формула:

$$IRR=\left(\frac{P(T)}{P(0)}\right)^{\frac{1}{T}}-1\ . \qquad (6.14)$$

IRR - это относительный показатель, показывает среднегодовой темп увеличения капитала инвестора. Чем выше *IRR*, тем больше эффективность инвестиций. На этот показатель ориентируются при стремлении максимизировать относительную отдачу от инвестиций.

Оценка проекта в значительной мере зависит от того, насколько отличаются ставка дисконтирования i и показатель *IRR* проекта. Установим связь между $NPV(i)$ проекта и разностью $(IRR - i)$. Рассмотрим проект классического характера с дискретным потоком платежей. Тогда $NPV(i) = \sum_{k=0}^{n} \frac{R_k}{(1+i)^k}$, причем $NPV(i=0) = \sum_{k=0}^{n} R_k > 0$, иначе проект не рассматривается, так как является заведомо убыточным. Пусть r – решение уравнения $NPV(r) = 0$, которое имеет вид $\sum_{k=0}^{n} \frac{R_k}{(1+r)^k} = 0$. Согласно теореме 4.2, для проекта классического характера, удовлетворяющего условию $\sum_{k=0}^{n} R_k > 0$, это решение является положительным и единственным.

Так как $NPV(i) = NPV(i) - NPV(r)$, то

$$NPV(i) = \sum_{k=0}^{n} \frac{R_k}{(1+i)^k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{R_k}{(1+r)^k} = \sum_{k=0}^{n} R_k \left(\frac{1}{(1+i)^k} - \frac{1}{(1+r)^k} \right) = \sum_{k=0}^{n} R_k \frac{(1+r)^k - (1+i)^k}{(1+r)^k (1+i)^k} =$$

$$= (r-i) \sum_{k=0}^{n} R_k \frac{\left((1+r)^{k-1} + (1+r)^{k-2}(1+i) + \ldots + (1+r)(1+i)^{k-2} + (1+i)^{k-1} \right)}{(1+r)^k (1+i)^k} = (r-i) \sum_{k=0}^{n} R_k a_k(r,i) =$$

$= (r - i)\, A(r, i)$. Таким образом,

$$NPV(i) = (r - i)\, A(r, i),$$

где $A(r, i) = \sum_{k=0}^{n} R_k a_k(r,i)$. Покажем, что $A(r, i) > 0$ для всех $i \in [0, +\infty[$. Так как r – единственное положительное решение уравнения $NPV(r) = 0$, то $A(r, i) \neq 0$ при всех $i \in [0, +\infty[$. Значит, $A(r, i)$ сохраняет знак на множестве $i \in [0, +\infty[$. Рассмотрим значение $A(r, i = 0)$. Полагая $i = 0$, получим

$$NPV(i = 0) = rA(r, i = 0) = \sum_{k=0}^{n} R_k > 0 .$$

Отсюда $A(r, i = 0) > 0$. Следовательно, $A(r, i) > 0$ для всех $i \in [0, +\infty[$. (Заметим, что непосредственное вычисление дает $A(r,\ i = 0) = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{n} R_k \left(1 - \frac{1}{(1+r)^k} \right) =$

$= \frac{1}{r}\left(\sum_{k=0}^{n} R_k - \sum_{k=0}^{n} \frac{R_k}{(1+r)^k}\right) = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{n} R_k > 0$). Так как r – значение показателя *IRR* проекта, то окончательно получаем

$$NPV(i) = (IRR - i)\, A(IRR, i), \qquad (6.15)$$

где $A(IRR, i) > 0$ при $i \in [0, +\infty[$. Из (6.15) следует, что для проекта классического характера знаки показателя $NPV(i)$ и разности $(IRR - i)$ совпадают. Кроме того, можно показать, что с увеличением разности $(IRR - i)$ значение $NPV(i)$ возрастает и наоборот (см. рисунки 7.8 и 7.11, параграф 1.7). На основе полученного выражения (6.15) сформулируем следующие свойства показателя *IRR*.

3) Для проекта классического характера справедливы следующие утверждения:

$NPV(i) > 0$ тогда и только тогда, когда ставка дисконтирования $i < IRR$;

$NPV(i) < 0$ тогда и только тогда, когда ставка дисконтирования $i > IRR$;

$NPV(i) = 0$ тогда и только тогда, когда ставка дисконтирования $i = IRR$.

Эти утверждения следуют непосредственно из выражения (6.15).

Для проектов *A* и *B* в примерах 6.1 и 6.3 получено $NPV(i) > 0$ и $i < IRR$; для проекта *C* значение $NPV(i) < 0$, при этом ставка дисконтирования $i > IRR$.

Таким образом, оценка проекта по показателю *IRR* формулируется следующим образом: если ставка дисконтирования $i < IRR$, то проект является выгодным; если $i > IRR$, то проект является убыточным. $i = IRR$ – это максимальная ставка дисконтирования, при которой проект не является убыточным.

Пример 6.4. Уравнение доходности для проекта примера 6.2 имеет вид:

$$NPV(r) = 100000\, a_{n,r} - 1000000 = 0.$$

Приближенное решение этого уравнения методом линейной интерполяции есть $r \approx 0{,}055568$. Так как $r > i = 0{,}05$, то проект является выгодным, что подтверждает оценку этого проекта по показателю $NPV(i)$.

Рассмотрим проект классического характера вида (6.1) или (6.2), i – годовая ставка дисконтирования. В ходе реализации проекта ставка дисконтирования может измениться, как правило, в сторону увеличения. Тогда, если значения *IRR* и i близки, проект является рисковым. В результате увеличения ставки дисконтирования оценка проекта может измениться на противоположную.

Пример 6.5. Рассмотрим проект (-100,-20,20,20,80,50,10,20). Ставка дисконтирования 13 % годовых. Внутренняя норма доходности проекта 13,3 % годовых. Так как $i < IRR$, то проект является выгодным. Чистая современная стоимость проекта $NPV(i) = 1{,}3 > 0$. Если ставка дисконтирования увеличится до 14

% годовых, то проект окажется неприемлем, так как его $NPV(i) = -2{,}8 < 0$. Кроме того, в ходе реализации проекта может возникнуть необходимость увеличения инвестиций в проект, что также влечет изменение оценки проекта. По свойству 3 $NPV(i)$, максимальная величина, на которую можно увеличить инвестиции в проект при данных доходах и ставке дисконтирования i так, чтобы проект не стал убыточным – это значение показателя $NPV(i)$ проекта, где $NPV(i) > 0$. Что влияет на величину $NPV(i) > 0$ и на сколько может увеличиться ставка дисконтирования, чтобы проект не стал убыточным? Рассмотрим следующее свойство *IRR*.

4) Чем больше разность ($IRR - i$), где $i < IRR$, тем больше резерв безопасности (или экономическая «прочность») проекта. Разность ($IRR - i$) определяет устойчивость проекта в отношении изменения ставки дисконтирования. Кроме того, разность ($IRR - i$) определяет предельную возможность увеличения инвестиций в проект, позволяющую избежать убытков при данных доходах и ставке дисконтирования i.

Действительно, из (6.15) следует, что разность ($IRR - i$), где $i < IRR$, представляет собой максимальную величину, на которую можно увеличить ставку дисконтирования: увеличение ставки дисконтирования до значения *IRR* проекта приводит к $NPV(i = IRR) = 0$, когда проект ни прибыльный, ни убыточный. Увеличение ставки дисконтирования на величину, превышающую ($IRR - i$), делает проект убыточным (пример 6.5). Таким образом, чем больше разность ($IRR - i$), тем больше устойчивость проекта в отношении процентного риска.

С другой стороны, как следует из (6.15), разность $IRR - i > 0$ определяет значение $NPV(i) > 0$, а следовательно, максимальную величину, на которую можно увеличить инвестиции в проект так, чтобы избежать убытков (см. свойство 3 $NPV(i)$). Инвестору важно знать срок возврата вложенных средств.

Определение. Срок окупаемости проекта (*DPP*) – это срок действия проекта $n^* \le T$, за который современная стоимость потока доходов становится равной современной стоимости потока инвестиций в проект.

Таким образом, если n^* – срок окупаемости проекта, то

$$\sum_{k=0}^{n^*} \frac{a_k}{(1+i)^k} + \int_0^{n^*} \frac{f_2(t)}{(1+i)^t} dt = \sum_{k=0}^{n^*} \frac{b_k}{(1+i)^k} + \int_0^{n^*} \frac{f_1(t)}{(1+i)^t}, \qquad (6.16)$$

и для проекта с дискретным потоком платежей

$$\sum_{k=0}^{n^*} \frac{a_k}{(1+i)^k} = \sum_{k=0}^{n^*} \frac{b_k}{(1+i)^k}. \qquad (6.17)$$

Так как не всегда существует целое n^*, при котором выполняются равенства (6.16), (6.17), то приближенное значение срока окупаемости определяют следующим образом: n^* - наименьшее целое, не превышающее срок проекта $T = n$ лет, такое, что

$$\sum_{k=0}^{n^*}\frac{a_k}{(1+i)^k}+\int_0^{n^*}\frac{f_2(t)}{(1+i)^t}dt \geq \sum_{k=0}^{n^*}\frac{b_k}{(1+i)^k}+\int_0^{n^*}\frac{f_1(t)}{(1+i)^t}\ , \qquad (6.18)$$

и для проекта с дискретным потоком платежей

$$\sum_{k=0}^{n^*}\frac{a_k}{(1+i)^k} \geq \sum_{k=0}^{n^*}\frac{b_k}{(1+i)^k}\ . \qquad (6.19)$$

При сроке действия проекта (n^*– 1) лет современная стоимость потока доходов меньше современной стоимости потока расходов:

$$\sum_{k=0}^{n^*-1}\frac{a_k}{(1+i)^k}+\int_0^{n^*-1}\frac{f_2(t)}{(1+i)^t}dt < \sum_{k=0}^{n^*-1}\frac{b_k}{(1+i)^k}+\int_0^{n^*-1}\frac{f_1(t)}{(1+i)^t}\ , \qquad \sum_{k=0}^{n^*-1}\frac{a_k}{(1+i)^k} < \sum_{k=0}^{n^*-1}\frac{b_k}{(1+i)^k}\ .$$

6.5. Свойства и экономическое содержание срока окупаемости

1) Срок окупаемости – это время, необходимое для полной компенсации инвестиций в проект доходами от проекта. Это утверждение следует из определения срока окупаемости.

2) Если ставка дисконтирования равна внутренней норме доходности проекта *IRR*, то срок окупаемости проекта совпадает с его сроком, т.е. $n^* = T = n$ лет. Это утверждение следует из определения показателей *IRR* и *DPP* (см. также равенства (6.10), (6.11) и (6.16), (6.17)).

3) Срок окупаемости проекта n^* - это срок действия проекта $n^* \leq n$, за который его чистая современная стоимость становится неотрицательной.

Пример 6.6. Расчет срока окупаемости проекта *B*(-1000,-300,500,500,500,500). Ставка дисконтирования 5 % годовых.

	0	1	2	3	4	5
Rk	-1000	-300	500	500	500	500
Rk/(1+*i*)*k*	-1000	-286	454	432	411	392
Σ*Rk*/(1+*i*)*k*	-1000	-1286	-832	-400	11,1	402,8

Нижняя строка таблицы – чистая современная стоимость проекта для сроков его действия от 0 до 5 лет. Период отдачи – 4 года, начиная со 2-го года. Сроки действия проекта от 2-х до 5 лет содержат период отдачи. Чистая современная стоимость проекта возрастает, начиная с 2-хлетнего срока его действия, т.е. с началом периода отдачи. Из таблицы следует, что срок окупаемости проекта n*= 4 года. Действительно, так как $NPV3(i) = -400 < 0$, $NPV4(i) = 11{,}1 > 0$, то наименьшее целое $n^* \le 5$, при котором выполняется неравенство $NPVn^*(i) \ge 0$, это $n^* = 4$ (точное значение срока окупаемости меньше 4).

4) Проект классического характера имеет срок окупаемости тогда и только тогда, когда его показатель $NPV(i) \ge 0$. Если $NPV(i) < 0$, то проект не имеет срока окупаемости.

Действительно, предположим, проект имеет срок окупаемости. Тогда существует наименьшее целое $n^* \le n$, при котором $NPVn^*(i) \ge 0$. Отсюда показатель проекта $NPV(i) \ge 0$. И наоборот. Из того, что $NPV(i) \ge 0$ следует, что существует наименьшее целое $n^* \le n$, при котором $NPVn^*(i) \ge 0$. Второе утверждение является следствием первого и доказывается методом от противного.

5) Проект классического характера имеет срок окупаемости тогда и только тогда, когда его ставка дисконтирования $i \le IRR$. Если ставка дисконтирования проекта $i > IRR$, проект не имеет срока окупаемости. Это утверждение является следствием предыдущего свойства *DPP* проекта и свойства 3 показателя *IRR*.

Проекты *A* и *B* (пример 6.6) имеют срок окупаемости. Ранее для этих проектов в примерах 6.1 и 6.3 получено $NPV(i) > 0$ и $i < IRR$. Проект из примера 6.2 имеет срок окупаемости $n^* = 15$ лет. Ранее для этого проекта установлено $NPV(i) > 0$ и $i < IRR$ (примеры 6.2 и 6.4).

Проект *C*, для которого $NPV(i) < 0$ и ставка дисконтирования $i > IRR$ (примеры 6.1 и 6.3), не имеет срока окупаемости (i = 12 %):

	0	1	2	3
Rk	-90	30	40	40
$Rk/(1+i)k$	-90	26,79	31,9	28,5
$\Sigma Rk/(1+i)k$	-90	-63,2	-31	-2,9

Очевидно, что если не существует срок окупаемости, то проект не принимается. Один из критериев оценки проекта – минимизация срока окупаемости. Однако этот критерий не является самым важным при выборе инвестиционного проекта. Расчет срока окупаемости является целесообразным, если инвестиции сопряжены с высокой степенью риска. Тогда чем меньше срок окупаемости, тем менее рискованным является проект.

Пример 6.7. Рассмотрим два инвестиционных проекта, сроки которых одинаковы: D(-100,-10,20,60,60,60,20,5) и E(-40,-50,-50,-20,90,90,80,70), ставка дисконтирования 13 % годовых. Сроки окупаемости проектов $n_D^* = 5$ лет и $n_E^* = 6$ лет. $NPV(i)D = 29{,}49$ и $NPV(i)E = 34{,}96$. Оба проекта выгодны. Однако $NPV(i)E > NPV(i)D$. Сравним величины $NFV(i)$ проектов. $NFV(i)D = NPV(i)D(1+0{,}13)7 = 69{,}38$; $NFV(i)E = NPV(i)E(1+0{,}13)7 = 82{,}25$. Несмотря на то, что $n_D^* < n_E^*$, проект E выгоднее проекта D, так как на момент окончания проектов фактически получаемый доход по E больше, чем по проекту D.

Определение. Индекс доходности (PI) проекта – это число d, равное отношению современных стоимостей доходов и инвестиций в проект:

$$d = \frac{\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(1+i)^k} + \int_0^T \frac{f_2(t)}{(1+i)^t}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{(1+i)^k} + \int_0^T \frac{f_1(t)}{(1+i)^t}} . \qquad (6.21)$$

Для проекта с дискретным потоком платежей

$$d = \frac{\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(1+i)^k}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{(1+i)^k}} . \qquad (6.22)$$

Пример 6.8.

Индекс доходности проекта A (-1000, -2000, -3000, 1500 в моменты $t = 0$, $t1 = 1$, $t2=2$, $t3 = 4$; $f(t) = 1000$, $6 \le t \le 16$), $i = 5$ % годовых:

$$d = \frac{\frac{1500}{(1+i)^4} + \int_6^{16} \frac{1000dt}{(1+i)^t}}{1000 + \frac{2000}{1+i} + \frac{3000}{(1+i)^2}} = \frac{\frac{1500}{(1+i)^4} + \frac{1000}{\ln(1+i)}\left[\frac{1}{(1+i)^6} - \frac{1}{(1+i)^{16}}\right]}{1000 + \frac{2000}{1+i} + \frac{3000}{(1+i)^2}} = 1{,}27.$$

Индекс доходности проекта B (-1000,-300,500,500,500,500), $i = 5$ % годовых:

$$d = \frac{\frac{500}{(1+i)^2} + \frac{500}{(1+i)^3} + \frac{500}{(1+i)^4} + \frac{500}{(1+i)^5}}{1000 + \frac{300}{1+i}} = 1{,}31.$$

Индекс доходности проекта C (-90,30,40,40), $i = 12$ % годовых:

$$d = \frac{\frac{30}{(1+i)} + \frac{40}{(1+i)^2} + \frac{40}{(1+i)^3}}{90} = 0{,}97.$$

6.6. Свойства и экономическое содержание индекса доходности

1) Показатель *PI* характеризует уровень доходов на единицу затрат, т.е. эффективность вложений. $d > 1$ – доходы окупают вложенные инвестиции; $d < 1$ - инвестиции в проект не окупаются; $d = 1$ – проект ни прибыльный ни убыточный.

Проекты *A* и *B* примера 6.8 являются прибыльными, так как их $PI > 1$. Проект *C* – убыточный, так как его $PI < 1$. Эти выводы подтверждают оценку этих проектов по показателям $NPV(i)$ и *IRR*.

2) Если ставка дисконтирования равна внутренней норме доходности проекта *IRR*, то индекс доходности проекта $d = 1$. Это утверждение следует из определений показателей *IRR* и *PI* (см. также равенства (6.16), (6.17) и (6.21), (6.22)).

3) Если срок проекта совпадает с его сроком окупаемости, то индекс доходности проекта $d = 1$. Это утверждение следует из определений показателей *DPP* и *PI* (см. также равенства (6.10), (6.11) и (6.21), (6.22)).

4) Показатели *PI* и $NPV(i)$ согласуются между собой в оценке проекта. Действительно, преобразуем, например, выражение (6.22):

$$d = 1 + \frac{NPV(i)}{\sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{(1+i)^k}} \ . \tag{6.23}$$

Тогда

$d > 1$ тогда и только тогда, когда $NPV(i) > 0$;

$d < 1$ тогда и только тогда, когда $NPV(i) < 0$;

$d = 1$ тогда и только тогда, когда $NPV(i) = 0$.

Из этого свойства следует эквивалентность оценки проекта по показателям $NPV(i)$ и *PI*.

5) Показатели *PI* и *IRR* согласуются между собой в оценке проекта. Подставим выражение (6.15) в (6.23):

$$d = 1 + \frac{(IRR - i)\ A(IRR, i)}{\sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{(1+i)^k}} \ , \tag{6.24}$$

где $A(IRR, i) > 0$ для всех $i \in [0, +\infty[$. Тогда

$d > 1$ тогда и только тогда, когда ставка дисконтирования $i < IRR$;

$d < 1$ тогда и только тогда, когда ставка дисконтирования $i > IRR$;

$d = 1$ тогда и только тогда, когда ставка дисконтирования $i = IRR$.

6) Чем больше показатель *PI* превосходит единицу, тем больше резерв

безопасности проекта. Действительно, чем больше $d > 1$, тем больше разность ($IRR - i$) > 0 (см. рис. 7.10 и 7.13, параграф 1.7), а следовательно, по свойству 4 *IRR*, экономическая «прочность» проекта.

PI - относительный показатель. Если требуется сделать выбор из нескольких проектов по этому показателю, то выбирается проект с наибольшим индексом доходности среди всех проектов, для которых этот показатель больше либо равен единице.

Как установлено (свойство 2 *IRR*), среднегодовая доходность проекта совпадает с его *IRR*, если доходы от проекта реинвестируются под ставку r = *IRR* до окончания проекта. Практически эти доходы можно инвестировать под ставку дисконтирования i (i – ставка, по которой инвестор может одолжить или дать деньги взаймы). Тогда среднегодовая доходность проекта r^* рассчитывается следующим образом. Согласно формуле (2.2):

$$P(T) = P(0)(1+r^*)^T ,$$

где $P(0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{(1+i)^k}$ - современная стоимость инвестиций в проект по ставке i; $P(T) = \sum_{k=0}^{n} a_k (1+i)^{T-k}$ - результат реинвестирования доходов по проекту под ставку i к моменту T окончания проекта (будущая стоимость доходов по ставке i). r^* называют **модифицированной внутренней нормой доходности** проекта (*MIRR*). Тогда

$$MIRR = \left(\frac{P(T)}{P(0)}\right)^{\frac{1}{T}} - 1 , \qquad (6.25)$$

где $P(0)$ и $P(T)$ рассчитываются по приведенным здесь формулам. По этому показателю проект принимается, если ставка дисконтирования проекта $i < MIRR$.

6.7. Сравнение двух инвестиционных проектов

Если требуется сделать выбор из нескольких проектов, то согласованность между показателями эффективности уже отсутствует: один проект имеет большее значение $NPV(i)$, другой – показателя *IRR* и т.д. Исследования показывают, что при сравнении проектов в случае противоречия между показателями чаще отдается предпочтение показателю $NPV(i)$. По этому показателю проект 1 является более выгодным, чем проект 2, если $NPV(i)1 > NPV(i)2$.

Пример 6.9. Инвестор рассматривает возможность помещения денег в один из следующих проектов. Проект *F*, по которому инвестирование 11000 д.е.

обеспечивает годовой доход 600 д.е., выплачиваемых ежегодно на протяжении 15 лет, и возмещение расходов инвестора в конце этого срока. Проект *G*, по которому инвестирование 20000 д.е. обеспечивает годовой доход 2655 д.е., выплачиваемых ежегодно на протяжении 10 лет.

Инвестор может ссужать или занимать деньги под 5 % годовых. Какой проект является более выгодным для инвестора?

Денежный поток проекта *F* имеет вид: (-11000, 600,…, 600 + 11000). Поток доходов – годовая обычная рента в течение 15 лет плюс дополнительный платеж в конце этого срока. Тогда

$$NPV(i)F = -11000 + 600a15;\ 0{,}05\ +\ \frac{11000}{(1+i)^{15}}\ = 518{,}98.$$

Показатель *IRR* находим из уравнения доходности проекта $NPV(r)F = 0$, откуда получаем $IRRF = 5{,}45$ % годовых.

Денежный поток проекта *G* имеет вид: (-20000, 2655, …, 2655). Поток доходов - годовая обычная рента в течение 10 лет.

$$NPV(i)G\ = -20000 + 2655a10;\ 0{,}05 = 501{,}21.$$

Решение уравнения доходности $NPV(r)G\ = 0$ дает $IRRG\ =\ 5{,}51$ % годовых.

Так как $IRRF,\ IRRG > i = 5$ %, то оба проекта выгодны. При этом $IRRF < IRRG$, однако $NPV(i)F\ > NPV(i)G$. Хотя доходность по проекту *F* меньше, чем по проекту *G*, инвестор может извлечь большую выгоду из проекта *F*. Прибыль инвестора (по сравнению с размещением денег на банковский счет) в результате реализации проекта *F* составит

$$NFV(i)F = NPV(i)F(1+0{,}05)15 = 1078{,}93,$$

а проекта *G* соответственно

$$NFV(i)G = NPV(i)G(1+0{,}05)15 = 1047{,}97.$$

Таким образом, проект *F* является более выгодным с точки зрения максимизации прибыли.

§ 8. Внутренняя доходность облигации

8.1. Временная структура процентных ставок

Анализ финансовых инвестиций в условиях определенности будем изучать на примере ценных бумаг с фиксированным доходом. Наиболее распространенным видом таких ценных бумаг являются облигации.

Облигация – это обязательство выплатить в определенные моменты времени в будущем заранее установленные денежные суммы. Основные параметры облигации – номинальная цена (номинал), дата погашения, размеры и сроки платежей по облигации. С момента эмиссии и до погашения облигации продаются и покупаются на фондовом рынке. Рыночная цена облигации устанавливается на основе спроса и предложения и может быть равна ее номиналу, выше или ниже номинала.

Будем рассматривать облигации в условиях определенности: эмитент не может отозвать облигацию до установленной даты погашения, платежи по облигации задаются фиксированными значениями в определенные моменты времени. При этом поступление будущих доходов точно в указанные сроки и в полном объеме считается гарантированным. Про такие облигации говорят, что они не имеют кредитного риска. Основным фактором риска остается процентный риск – риск изменения рыночных процентных ставок.

Рассмотрим облигацию, по которой через $t1$, $t2,\ldots$, tn лет от текущего момента времени $t = 0$, где $0 < t1 < t2 <\ldots< t\mathrm{n}$, обещают выплатить денежные суммы $C1$, $C2,\ldots$, Cn соответственно. Очевидно, что $Ci > 0$, $i = 1, 2,\ldots, n$. Пусть P – рыночная стоимость облигации в момент $t = 0$. Тогда естественно считать, что $P < C1 + C2 +\ldots+ Cn$. Момент времени $t = 0$ – это момент, в который предполагается произвести инвестицию в облигацию или момент покупки облигации. Момент времени $t = tn$, когда выполняется последний платеж по облигации, называют моментом погашения облигации, а срок $T = tn$ (в годах) – сроком до погашения. Два показателя в основном интересуют инвестора – доходность и цена облигации. **Внутренняя доходность** – самый важный и наиболее широко используемый показатель оценки облигации. Известен также как **доходность к погашению**.

Определение. Годовая внутренняя доходность облигации r – это годовая ставка сложных процентов, по которой современная стоимость потока платежей по облигации равна рыночной стоимости облигации в момент $t = 0$:

$$P = \frac{C_1}{(1+r)^{t_1}} +\ldots+ \frac{C_n}{(1+r)^{t_n}} . \qquad (8.1)$$

Здесь внутренняя доходность облигации определяется как годовая доходность денежного потока $C1$, $C2,\ldots,Cn$, стоимость которого P (см. параграф 1.4). В зарубежной практике существует рыночное соглашение, согласно которому если платежи по облигации выплачиваются через равные промежутки времени m раз в году, то для дисконтирования членов денежного потока применяется годовая номинальная ставка внутренней доходности j :

$$P = \frac{C_1}{(1+\frac{j}{m})^{t_1 m}} + \ldots + \frac{C_n}{(1+\frac{j}{m})^{t_n m}}.$$

8.2. Свойства внутренней доходности облигации

1. Ставка внутренней доходности облигации равна преобладающей рыночной процентной ставке для инвестиций в альтернативные финансовые инструменты с такой же степенью риска. Или короче – ставка внутренней доходности облигации равна доходности сравнимых с ней инструментов.

2. Годовая внутренняя доходность облигации – это ставка доходности, получаемая инвестором, если выполняются два условия:

1) инвестор владеет облигацией до момента ее погашения $t = tn$;

2) все платежи по облигации реинвестируются по ставке, равной внутренней доходности облигации r в момент ее покупки.

Покажем, что при выполнении этих условий среднегодовая доходность инвестиции в облигацию равна ее внутренней доходности. Покупку облигации, затем владение ею до момента погашения с реинвестированием поступающих доходов будем рассматривать как финансовую операцию (см. параграф 1.2). Срок операции $T = tn$ лет. Денежная оценка начала операции $P(0)$ – это рыночная цена покупки облигации P в момент $t = 0$. Согласно (8.1), $P = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}$. Денежная оценка момента погашения облигации $t = tn$ для инвестора при выполнении условий 1), 2) – это сумма $P(tn) = \sum_{i=1}^{n} C_i (1+r)^{t_n - t_i}$. Согласно определению доходности финансовой операции (2.2):

$$P(tn) = P(1+\bar{r})^{t_n},$$

где $\bar{r}$ - среднегодовая доходность инвестиции в облигацию на срок $T = tn$ лет. Подставим в это равенство выражения для P и $P(tn)$:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i (1+r)^{t_n - t_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}} (1+\bar{r})^{t_n}.$$

Откуда получаем $r = \bar{r}$.

Таким образом, среднегодовая доходность инвестиции в облигацию, равная r, реализуется в день погашения облигации при выполнении условий 1), 2). Отсюда другое название внутренней доходности – доходность к погашению. Если пункты 1) или 2) не выполняются, то реальная доходность, получаемая инвестором, может быть выше или ниже внутренней доходности облигации. Риск, с которым сталкивается инвестор при покупке облигации, – это риск того, что будущие ставки реинвестирования будут ниже ставки внутренней доходности. Этот риск называется реинвестиционным риском, или риском ставки реинвестирования.

Внутренняя доходность облигации используется для оценки привлекательности альтернативных инструментов инвестирования. При прочих равных условиях, чем выше доходность к погашению облигаций данного выпуска, тем более привлекательным он является.

Рассмотрим задачу определения внутренней доходности облигации. Внутренняя доходность облигации – это решение уравнения (8.1). Согласно теореме 4.1, это уравнение при выполнении условия $P < C1 + C2 +\ldots+ Cn$ имеет единственное положительное решение. Это решение находят, используя приближенные методы. Один из них – метод линейной интерполяции (изложен в параграфе 1.4, примеры 4.2, 4.4).

Пример 8.1. Определить годовую внутреннюю доходность r облигации, поток платежей по которой указан в таблице:

Срок, годы	0	1	2
Платеж, д.е.	-948	50	1050

Приближенное значение внутренней доходности облигации найдем методом линейной интерполяции. Согласно определению годовой внутренней доходности облигации: $948 = \frac{50}{(1+r)} + \frac{1050}{(1+r)^2}$.

Необходимо найти решение уравнения $F(r) = 0$, где

$$F(r) = 948 - \frac{50}{(1+r)} - \frac{1050}{(1+r)^2} .$$

Так как 948 < 50 + 1050, то согласно теореме 4.1 существует единственное положительное решение этого уравнения. Так как $F(0{,}07) = -15{,}8396$, $F(0{,}08) = 1{,}4979$, то искомая внутренняя доходность $r \in (0{,}07;\ 0{,}08)$. По формуле (4.8) находим первое приближение

$$r\text{л}1 = 0{,}07 + \frac{-(-15{,}8396)}{1{,}4979-(-15{,}8396)}(0{,}08-0{,}07) = 0{,}079140 .$$

При этом значение функции $F(r\text{л}1) = 0{,}02567 > 0$. Значит, решение $r \in (0{,}07;\ 0{,}07914)$. Следующий шаг метода дает

$$r\text{л}2 = 0{,}07 + \frac{-(-15{,}8396)}{0{,}02567-(-15{,}8396)}(0{,}079140-0{,}07) = 0{,}079125 .$$

Поэтому можно считать, что $r \approx 0{,}07913$ или 7,913 % с точностью до третьего знака после запятой.

Определение. Облигация называется чисто дисконтной, если по этой облигации производится только одна выплата.

Определение. Внутренняя доходность чисто дисконтной облигации без кредитного риска, срок до погашения которой t лет, называется годовой безрисковой процентной ставкой для инвестиций на t лет. Другое название – годовая **спот-ставка**.

Пусть A – погашаемая сумма по чисто дисконтной облигации, t лет - срок до погашения, P – рыночная цена облигации в момент $t = 0$, $r(t)$ – внутренняя доходность облигации. Тогда согласно определению внутренней доходности облигации, $P = \frac{A}{(1+r(t))^t}$. Отсюда

$$r(t) = \left(\frac{A}{P}\right)^{\frac{1}{t}} - 1 \qquad (8.2)$$

– годовая безрисковая процентная ставка для инвестиций на t лет.

В качестве примера чисто дисконтных облигаций, не имеющих кредитного риска, можно привести бескупонные облигации Казначейства США. Доходности казначейских бумаг служат эталоном при оценке всех видов облигаций.

Рассмотрим, как можно оценить любую облигацию, если на рынке имеются чисто дисконтные облигации. Пусть на рынке имеется облигация B без кредитного риска, по которой через $t1$, $t2,\ldots, tn$ лет обещают выплатить денежные суммы $C1$, $C2,\ldots, Cn$ соответственно. Облигацию B можно оценить, если рассматривать ее как портфель из чисто дисконтных облигаций $B1$, $B2,\ldots, Bn$ со сроками погашения через $t1$, $t2,\ldots, tn$ лет соответственно. Предположим, выполняются следующие условия:

1) известны годовые безрисковые процентные ставки $r(t1)$, $r(t2)$, …, $r(tn)$ для инвестиций на $t1$, $t2,\ldots, tn$ лет, отсчитанных от момента $t = 0$;

2) чисто дисконтные облигации $B1$, $B2,\ldots, Bn$ можно приобрести на рынке в любом количестве без трансакционных расходов. Тогда для этих облигаций имеем

$$P_i = \frac{A_i}{(1+r(t_i))^{t_i}},$$

$i = 1, 2, \ldots, n$, где Pi – текущая рыночная цена одной облигации i – го вида, Ai – погашаемая сумма по этой облигации, $r(ti)$ - ее внутренняя доходность. Платеж $C1$ от портфеля погашается облигациями $B1$, платеж $C2$ – облигациями $B2$, и т.д., платеж Cn – облигациями Bn. Тогда в портфеле $\frac{C_i}{A_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, облигаций каждого вида. Следовательно, стоимость портфеля в момент $t = 0$ равна

$$P = \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{C_i}{A_i} .$$

Тогда рыночная стоимость облигации B в момент $t = 0$ составляет

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{\left(1 + r(t_i)\right)^{t_i}} . \qquad (8.3)$$

Каждый платеж по облигации B индивидуально дисконтируется по соответствующей безрисковой процентной ставке.

Определение. Набор годовых безрисковых процентных ставок $r(t1)$, $r(t2)$, …, $r(tn)$ для инвестиций на $t1$, $t2$,…, tn лет, отсчитанных от момента $t = 0$, где $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, называется временной структурой процентных ставок.

Таким образом, если известна временная структура процентных ставок, то стоимость облигации, не имеющей кредитного риска, может быть рассчитана по формуле (8.3).

Определение. График функции $r = r(t)$, где $r(t)$ - годовая безрисковая процентная ставка для инвестиций на t лет, называется кривой доходностей (или кривой спот-ставок).

В условиях реального рынка всегда существует лишь конечный набор чисто дисконтных облигаций (например, не существует бескупонных долговых обязательств Казначейства США со сроком погашения больше одного года). Поэтому кривую доходностей невозможно построить только по наблюдениям на рынке. В связи с этим строят теоретическую кривую доходностей. Для этого, используя доходности реально существующих чисто дисконтных облигаций, рассчитывают теоретические значения доходностей для различных сроков инвестирования. Существует несколько методов получения теоретических значений доходностей. Один из них называется **«процедурой бутстреппа».** Рассмотрим этот метод на примере.

Пример 8.2. На рынке имеются государственные облигации A, B, C, D, E, потоки платежей по которым и цены в момент $t = 0$ указаны в таблице:

	Срок в годах					P
	0,5	1	1,5	2	2,5	
A	108					105,27
B		121				113,83

C	10	11	109			118,71
D	11	11	11	120		135,64
E	8	8	8	8	108	118,84

A и B – чисто дисконтные облигации. Их внутренние доходности $r(0,5) = 5,25$ % и $r(1) = 6,3$ %, определенные по формуле (8.2), являются безрисковыми процентными ставками для инвестиций на 0,5 года и 1 год. Зная эти две ставки, можно вычислить теоретическую безрисковую процентную ставку для инвестиций на 1,5 года, используя облигацию C. Цена облигации C по формуле (8.3) равна

$$118{,}71 = \frac{10}{\left(1+r(0{,}5)\right)^{0,5}} + \frac{11}{\left(1+r(1)\right)} + \frac{109}{\left(1+r(1{,}5)\right)^{1,5}},$$

где $r(0,5) = 0,0525$, $r(1) = 0,063$. Тогда

$$118{,}71 = \frac{10}{\left(1+0{,}0525\right)^{0,5}} + \frac{11}{\left(1+0{,}063\right)} + \frac{109}{\left(1+r(1{,}5)\right)^{1,5}}.$$

Откуда получаем теоретическую годовую безрисковую процентную ставку для инвестиций на 1,5 года: $r(1,5) = 6,9$ %. Данная ставка – это та ставка, которую предлагал бы рынок по 1,5 - годовым чисто дисконтным облигациям, если бы такие ценные бумаги существовали на самом деле.

Зная теоретическую 1,5 – годовую безрисковую процентную ставку, можно вычислить теоретическую двухлетнюю безрисковую процентную ставку, используя облигацию D:

$$135{,}64 = \frac{11}{\left(1+0{,}0525\right)^{0,5}} + \frac{11}{\left(1+0{,}063\right)} + \frac{11}{\left(1+0{,}069\right)^{1,5}} + \frac{120}{\left(1+r(2)\right)^{2}}.$$

Откуда $r(2) = 7,1$ % - теоретическая двухлетняя безрисковая процентная ставка. Применяя еще раз описанную процедуру для облигации E, определяем теоретическую 2,5 - летнюю безрисковую процентную ставку: $r(2,5) = 7,9$ %.

Безрисковые процентные ставки $r(0,5)$, $r(1)$, $r(1,5)$, $r(2)$, $r(2,5)$, построенные с помощью такого процесса, задают временную структуру процентных ставок по 2,5 - летнему диапазону относительно момента времени, к которому относятся цены облигаций.

§ 9. Купонная облигация. Зависимость цены облигации от внутренней доходности, купонной ставки, срока до погашения

Облигация называется **купонной**, если по этой облигации производятся регулярные выплаты фиксированного процента от номинала, называемые купонными, и выплата номинала при погашении облигации. Последний купонный платеж производится в день погашения облигации.

Будем использовать следующие обозначения: A - номинал облигации; f - годовая купонная ставка; m - число купонных платежей в году; q - сумма отдельного купонного платежа; t = 0 – момент покупки облигации или момент, когда предполагается инвестирование в облигацию; T (в годах) - срок до погашения облигации от момента t = 0; τ - время, прошедшее от последней перед продажей облигации купонной выплаты до покупки облигации (до t = 0).

Период времени $\frac{1}{m}$, измеряемый в годах, называется **купонным периодом**. В конце каждого купонного периода производится купонный платеж. Так как облигация может быть куплена в любой момент между купонными выплатами, то τ изменяется в пределах от 0 до $\frac{1}{m}$. Если облигация куплена сразу после купонной выплаты, то τ = 0. $\tau = \frac{1}{m}$ означает покупку облигации непосредственно перед купонным платежом. Так как покупка облигации производится только после оплаты очередного купона, то τ не принимает значение $\frac{1}{m}$. Таким образом, $0 \le \tau < \frac{1}{m}$. Если облигация продается через время τ после купонной выплаты, а до погашения остается n купонных платежей, то срок до погашения облигации равен $T = \frac{n}{m} - \tau$.

Тогда $0 \le \frac{n}{m} - T < \frac{1}{m}$. Отсюда $Tm \le n < Tm+1$, где n – целое неотрицательное число. Следовательно,

если $T\,m$ – целое, то $n = T\,m$ и τ = 0;

если $T\,m$ – не целое, то $n = [T\,m] + 1$ и $\tau = \frac{n}{m} - T$.

Пример 9.1. По облигации производятся купонные выплаты каждые три месяца. Срок до погашения облигации а) 10,5 месяцев; б) 6 месяцев. Определить число купонных платежей, оставшихся до погашения облигации, а также время, прошедшее от последней перед продажей облигации купонной выплаты до покупки облигации.

а) Число купонных платежей в году m = 4. Срок до погашения облигации (в годах) равен $T=\frac{10,5}{12}$. Так как Tm = 3,5 – не является целым, то число купонных платежей, оставшихся до погашения облигации, n = [3,5] + 1 = 4. Время, прошедшее от последней перед продажей облигации купонной выплаты до покупки облигации, равно $\tau = \frac{n}{m} - T = \frac{4}{4} - \frac{10,5}{12}$ = 0,125 года. Значит, облигация куплена через 1,5 месяца после купонной выплаты.

б) Число купонных платежей в году m = 4. Срок до погашения облигации $T=\frac{6}{12}$ = 0,5 года. Так как $T\,m$ = 2 – является целым, то n = $T\,m$ = 2. Тогда τ = 0. Действительно, $\tau = \frac{n}{m} - T = \frac{2}{4} - 0,5$ = 0. Значит, облигация куплена сразу после купонной выплаты.

Пусть P – рыночная стоимость облигации в момент t = 0, купоны по которой выплачиваются m раз в год. Предположим, облигация продается через время τ после купонной выплаты, когда до погашения остается n купонных выплат. Формула (8.1) для купонной облигации имеет вид:

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{q}{(1+r)^{\frac{i}{m}-\tau}} + \frac{A}{(1+r)^{\frac{n}{m}-\tau}} \qquad (9.1)$$

Годовая внутренняя доходность r купонной облигации может быть определена из равенства (9.1). Так как обычно величина r мала, то

$$(1+r)^{\frac{1}{m}} \approx 1+\frac{r}{m}.$$

Тогда последнее равенство можно переписать в виде:

$$P = \left(1+\frac{r}{m}\right)^{\tau m} \sum_{i=1}^{n} \frac{q}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{i}} + \frac{A}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n}}.$$

Вычислив сумму n членов геометрической прогрессии и учитывая, что $q=\frac{1}{m} f A$, получим еще одну формулу для расчета внутренней доходности купонной облигации:

$$P = A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\tau m}\left[\frac{f}{r}\left(1-\frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n}}\right)+\frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n}}\right]. \qquad (9.2)$$

Для приблизительной оценки внутренней доходности купонной облигации пользуются «купеческой» формулой:

$$r = \frac{Af + \frac{A-P}{T}}{\frac{A+P}{2}}. \qquad (9.3)$$

Пример 9.2. По 9 % - й купонной облигации номиналом 1000 д.е. обещают производить каждые полгода купонные выплаты. Требуется определить внутреннюю доходность облигации, если ее стоимость равна 1050 д.е., а до погашения остается 3,8 года.

Здесь значения параметров облигации следующие: A = 1000 д.е., f = 0,09, m = 2, $q = \frac{1}{m} f A$ = 45 д.е., T = 3,8 года, P = 1050 д.е. Найдем число купонных платежей n, оставшихся до погашения облигации, а также время τ, прошедшее от последней перед продажей облигации купонной выплаты до покупки облигации.

Так как произведение Tm = 7,6 – не является целым, то n = [7,6] + 1 = 8. Тогда $\tau = \frac{n}{m} - T = \frac{8}{2} - 3{,}8$ = 0,2 года.

§ 10. Факторы, влияющие на величину изменения цены облигации при изменении ее внутренней доходности

В предыдущем параграфе установлено основное свойство облигации - ее цена изменяется в направлении, противоположном направлению изменения ее внутренней доходности. Однако, изменение цены неодинаково при снижении и повышении доходности на одну и ту же величину. Справедлива следующая теорема.

Теорема 10.1. Уменьшение внутренней доходности облигации приводит к росту ее цены на величину большую, чем соответствующее падение цены при увеличении доходности на ту же величину.

$$\frac{P(r-\Delta r) - P(r)}{P(r)} > \frac{P(r) - P(r+\Delta r)}{P(r)}.$$

Пример 10.1. По 8% - ной купонной облигации номиналом 1000 д.е. и сроком до погашения 10,25 лет обещают производить каждые полгода купонные платежи. Внутренняя доходность облигации равна 8% годовых. Найти изменения цены облигации при изменении ее внутренней доходности на величину Δr = 1%.

Значения параметров облигации: A = 1000 д.е., f = 0,08, r = 0,08; m = 2, T =

10,25 года. Так как Tm = 20,5, то n = [20,5] + 1 = 21. Тогда $\tau = \frac{n}{m} - T$ = $\frac{21}{2} - 10{,}25$= 0,25 (года). По формуле (9.2) находим

$$P(0{,}08) = 1000\left(1+\frac{0{,}08}{2}\right)^{0{,}5} = 1019{,}8039,$$

$$P(0{,}09) = 1000\left(1+\frac{0{,}09}{2}\right)^{0{,}5}\left[\frac{0{,}08}{0{,}09}\left(1-\frac{1}{\left(1+\frac{0{,}09}{2}\right)^{21}}\right)+\frac{1}{\left(1+\frac{0{,}09}{2}\right)^{21}}\right] = 953{,}7374,$$

$$P(0{,}07) = 1000\left(1+\frac{0{,}07}{2}\right)^{0{,}5}\left[\frac{0{,}08}{0{,}07}\left(1-\frac{1}{\left(1+\frac{0{,}07}{2}\right)^{21}}\right)+\frac{1}{\left(1+\frac{0{,}07}{2}\right)^{21}}\right] = 1092{,}1144.$$

Следовательно,

$P(0{,}08) - P(0{,}09) = 66{,}067 = \Delta^{-}P(0{,}08)$,

$P(0{,}07) - P(0{,}08) = 72{,}310 = \Delta^{+}P(0{,}08)$,

$\Delta^{+}P(0{,}08) > \Delta^{-}P(0{,}08)$.

Для относительного изменения цены получаем

$$\frac{\Delta^{+}P(0{,}08)}{P(0{,}08)} = 0{,}071 > 0{,}065 = \frac{\Delta^{-}P(0{,}08)}{P(0{,}08)}.$$

Характер изменения цены облигации при изменении ее внутренней доходности одинаков для всех облигаций, однако степень этого процесса зависит и от уровня процентных ставок рынка.

Теорема 10.2. Чем выше уровень процентных ставок рынка, тем меньше изменение цены облигации при изменении ее внутренней доходности на заданную величину.

Пример 10.2. Рассмотрим облигацию с параметрами: A = 100 д.е., f = 0,09; m = 1; T = 25 лет, продающуюся при двух уровнях доходности: rн = 0,07 и rв = 0,13. В обоих случаях доходность увеличилась на 1%.

По формуле (9.2) находим (τ = 0)

$$P(0{,}07) = 100\left[\frac{0{,}09}{0{,}07}\left(1-\frac{1}{(1+0{,}07)^{25}}\right)+\frac{1}{(1+0{,}07)^{25}}\right] = 123{,}3072$$

$$P(0{,}08) = 100\left[\frac{0{,}09}{0{,}08}\left(1-\frac{1}{(1+0{,}08)^{25}}\right)+\frac{1}{(1+0{,}08)^{25}}\right] = 110{,}6748$$

$$P(0{,}13) = 100\left[\frac{0{,}09}{0{,}13}\left(1-\frac{1}{(1+0{,}13)^{25}}\right)+\frac{1}{(1+0{,}13)^{25}}\right] = 70{,}6801$$

$$P(0{,}14) = 100\left[\frac{0{,}09}{0{,}14}\left(1-\frac{1}{(1+0{,}14)^{25}}\right)+\frac{1}{(1+0{,}14)^{25}}\right] = 65{,}6354$$

Увеличение доходности в каждом случае привело к снижению цены на величину

$\Delta^{-}P(r_{н}) = \Delta^{-}P(0{,}07) = P(0{,}07) - P(0{,}08) = 12{,}6324,$

$\Delta^{-}P(r_{в}) = \Delta^{-}P(0{,}13) = P(0{,}13) - P(0{,}14) = 5{,}0447.$

$\Delta^{-}P(0{,}07) > \Delta^{-}P(0{,}13)$. Для относительных изменений цен получаем

$$\frac{\Delta^{-}P(0{,}07)}{P(0{,}07)} > \frac{\Delta^{-}P(0{,}13)}{P(0{,}13)},$$

поскольку

$$\frac{\Delta^{-}P(r_H)}{P(r_H)} = \frac{\Delta^{-}P(0{,}07)}{P(0{,}07)} = 0{,}1024, \qquad \frac{\Delta^{-}P(r_B)}{P(r_B)} = \frac{\Delta^{-}P(0{,}13)}{P(0{,}13)} = 0{,}0714.$$

В следующих теоремах устанавливается зависимость величины изменения цены облигации от купонной ставки и срока до погашения.

Теорема 10.3. Пусть срок до погашения облигации больше одного купонного периода. Тогда относительное изменение цены облигации при изменении ее внутренней доходности тем больше, чем меньше купонная ставка.

Пример 10.3. По купонной облигации номиналом 1000 д.е. и сроком до погашения 9,25 лет обещают производить каждые полгода купонные платежи. Внутренняя доходность облигации равна 9% годовых. Сравнить величины относительного роста и падения цены облигации при изменении ее внутренней доходности на величину $\Delta r = 2\%$ для купонных ставок 8% годовых.

Параметры облигации: $A = 1000$ д.е., $r = 0{,}09$; $f1 = 0{,}08$; $f2 = 0{,}09$; $m = 2$, $T = 9{,}25$ года. Так как $Tm = 18{,}5$, то $n = [18{,}5] + 1 = 19$. Тогда $\tau = \frac{n}{m} - T$ = = $\frac{19}{2} - 9{,}25 = 0{,}25$ (года). Здесь $f1 < f2$.

Сравним величины относительного роста цены при уменьшении внутренней доходности облигации на 2%. По формуле (9.2) находим

$$P_{f_1}(0{,}09) = 1000\left(1+\frac{0{,}09}{2}\right)^{0{,}5}\left[\frac{0{,}08}{0{,}09}\left(1-\frac{1}{\left(1+\frac{0{,}09}{2}\right)^{19}}\right)+\frac{1}{\left(1+\frac{0{,}09}{2}\right)^{19}}\right] = 957{,}8848,$$

$$P_{f_1}(0{,}07) = 1000\left(1+\frac{0{,}07}{2}\right)^{0,5}\left[\frac{0{,}08}{0{,}07}\left(1-\frac{1}{\left(1+\frac{0{,}07}{2}\right)^{19}}\right)+\frac{1}{\left(1+\frac{0{,}07}{2}\right)^{19}}\right] = 1087{,}0878,$$

$$P_{f_2}(0{,}09) = 1000\left(1+\frac{0{,}09}{2}\right)^{0,5} = 1022{,}252$$

$$P_{f_2}(0{,}07) = 1000\left(1+\frac{0{,}07}{2}\right)^{0,5}\left[\frac{0{,}09}{0{,}07}\left(1-\frac{1}{\left(1+\frac{0{,}07}{2}\right)^{19}}\right)+\frac{1}{\left(1+\frac{0{,}07}{2}\right)^{19}}\right] = 1156{,}826.$$

Тогда

$$\frac{P_{f_1}(0{,}07)-P_{f_1}(0{,}09)}{P_{f_1}(0{,}09)} = 0{,}1349 > 0{,}1317 = \frac{P_{f_2}(0{,}07)-P_{f_2}(0{,}09)}{P_{f_2}(0{,}09)}.$$

Теорема 10.4. Если внутренняя доходность купонной облигации не изменяется в течение срока ее обращения, то изменение размера премии или дисконта тем больше, чем меньше срок до погашения.

Пример 10.4. Для облигации, рассмотренной в примерах 9.3 и 9.4 с параметрами A = 1000 д.е., f = 0,08, m = 1 при условии, что ее внутренняя доходность r не изменяется в течение срока обращения, имеем:

а) облигация продается с дисконтом, r = 0,09:

Д20 = 91,285; Д19 = 89,501; Д20 – Д19 = 1,784;

Д10 = 64,177; Д9 = 59,952; Д10 – Д9 = 4,224.

Следовательно, Д10 – Д9 > Д20 – Д19.

б) облигация продается с премией, r = 0,07:

П20 = 105,940; П19 = 103,356; П20 – П19 = 2,584;

П10 = 70,236; П9 = 65,152; П10 – П9 = 5,083.

Следовательно, П10 – П9 > П20 – П19.

§ 11. Дюрация и показатель выпуклости облигации

Для облигации, не имеющей кредитного риска, всегда существует процентный риск. Это риск уменьшения цены облигации вследствие изменения процентных ставок на рынке. Чувствительность цены облигации к изменению процентных ставок характеризуется величиной $\frac{\Delta P(r)}{P(r)}$. Ранее установлено, что на относительное изменение цены облигации $\frac{\Delta P(r)}{P(r)}$ при изменении ее внутренней доходности влияют уровень начальной доходности, купонная ставка, срок до погашения. Однако существует показатель, который позволяет оценить возможные значения величины $\frac{\Delta P(r)}{P(r)}$, не производя вычислений цены облигации до и после изменения процентных ставок.

Рассмотрим облигацию, по которой через $t1$, $t2,\dots, tn$ лет от текущего момента времени $t = 0$ обещают выплатить денежные суммы $C1$, $C2,\dots, Cn$ соответственно. Предположим, временная структура процентных ставок в этот момент такова, что безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны r. Тогда рыночная стоимость облигации равна

$$P(r) = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}} . \qquad (11.1)$$

Предположим, временная структура процентных ставок мгновенно изменилась так, что безрисковые процентные ставки для всех сроков изменились на одну и ту же величину Δr. Тогда стоимость облигации станет равной

$$P(r + \Delta r) = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+r+\Delta r)^{t_i}} . \qquad (11.2)$$

$\Delta r > 0$ означает увеличение процентных ставок, $\Delta r < 0$ – уменьшение. Приращение стоимости $\Delta P(r) = P(r + \Delta r) - P(r)$ является положительной величиной при $\Delta r < 0$ и означает рост стоимости облигации при снижении процентных ставок на рынке. Отрицательное значение величины $\Delta P(r) = P(r + \Delta r) - P(r)$ означает падение цены облигации при увеличении процентных ставок на величину $\Delta r > 0$. Такой же смысл имеет знак относительного приращения стоимости облигации $\frac{\Delta P(r)}{P(r)}$. Относительное приращение стоимости облигации при изменении процентных ставок на величину Δr равно

$$\frac{\Delta P(r)}{P(r)} = \frac{P(r+\Delta r) - P(r)}{P(r)}, \qquad (11.3)$$

где $P(r)$ и $P(r + \Delta r)$ рассчитываются по формулам (11.1) и (11.2). Рассмотрим, как можно оценить величину $\frac{\Delta P(r)}{P(r)}$, не используя точных вычислений по формуле (11.3). Считая Δr достаточно малым по абсолютной величине, получим по формуле Тейлора

$$\Delta P(r) = P(r + \Delta r) - P(r) \approx P/(r)\Delta r$$

или с учетом членов разложения второго порядка

$$\Delta P(r) = P(r + \Delta r) - P(r) \approx P/(r)\Delta r + \frac{1}{2} P//(r)(\Delta r)2.$$

Члены более высокого порядка считаются незначительными при определении чувствительности цены облигации к изменению процентных ставок на рынке. Для относительных приращений цены облигации имеем

$$\frac{\Delta P(r)}{P(r)} \approx \frac{P^{/}(r)}{P(r)}\Delta r \tag{11.4}$$

или

$$\frac{\Delta P(r)}{P(r)} \approx \frac{P^{/}(r)}{P(r)}\Delta r + \frac{1}{2}\frac{P^{//}(r)}{P(r)}(\Delta r)^2 . \tag{11.5}$$

Так как $P(r) = \sum_{i=1}^{n}\frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}$, то $P/(r) = -\frac{1}{1+r}\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}} = -\frac{1}{1+r}\sum_{i=1}^{n} t_i C_i(0)$ и

$$P//(r) = \frac{1}{(1+r)^2}\sum_{i=1}^{n} t_i(t_i+1)\frac{C_i}{(1+r)^{t_i}} = \frac{1}{(1+r)^2}\sum_{i=1}^{n} t_i(t_i+1)C_i(0),$$

где $Ci\ (0) = \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ - приведенные к моменту $t = 0$ платежи по облигации. Тогда

$$\frac{P^{/}(r)}{P(r)} = -\frac{1}{1+r}\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{C_i(0)}{P(r)}, \qquad \frac{P^{//}(r)}{P(r)} = \frac{1}{(1+r)^2}\sum_{i=1}^{n} t_i(t_i+1)\frac{C_i(0)}{P(r)}.$$

Определение. Число

$$D = \sum_{i=1}^{n} t_i \frac{C_i(0)}{P(r)} \tag{11.6}$$

называется дюрацией облигации, или дюрацией Маколея.

Дюрация облигации представляет собой средневзвешенный срок выплат по облигации, где весами являются текущие стоимости выплат $Ci(0)$, деленные на рыночную цену облигации $P(r)$. Таким образом, коэффициент $\frac{C_i(0)}{P(r)}$ выражает долю рыночной цены облигации, которая будет получена через ti лет, $i = 1, 2, \ldots, n$. Сумма коэффициентов в формуле (11.6) равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{C_i(0)}{P(r)} = \frac{1}{P(r)}\sum_{i=1}^{n} C_i(0) = \frac{1}{P(r)}\sum_{i=1}^{n}\frac{C_i}{(1+r)^{t_i}} = \frac{1}{P(r)}P(r) = 1.$$

Определение. Число

$$C = \sum_{i=1}^{n} t_i(t_i+1)\frac{C_i(0)}{P(r)} \tag{11.7}$$

называется показателем выпуклости облигации.

Таким образом,

$$\frac{P^{/}(r)}{P(r)} = -D\frac{1}{1+r}, \qquad \frac{P^{//}(r)}{P(r)} = C\frac{1}{(1+r)^2}.$$

Тогда из формул (11.4) и (11.5) получаем

$$\frac{\Delta P(r)}{P(r)} \approx -D\frac{\Delta r}{1+r} \qquad (11.8)$$

или

$$\frac{\Delta P(r)}{P(r)} \approx -D\frac{\Delta r}{1+r} + \frac{1}{2}C\left(\frac{\Delta r}{1+r}\right)^2 . \qquad (11.9)$$

Проанализируем эти выражения. Так как чувствительность цены облигации к изменению процентных ставок характеризуется величиной $\frac{\Delta P(r)}{P(r)}$, то из (11.8) следует, что дюрация облигации оценивает чувствительность цены облигации к изменению временной структуры процентных ставок. Следовательно, дюрацию облигации можно рассматривать как меру процентного риска облигации – чем больше дюрация, тем больше процентный риск облигации.

Пусть $\frac{\Delta P(r)}{P(r)} \approx -D\frac{\Delta r}{1+r} + \frac{1}{2}C\left(\frac{\Delta r}{1+r}\right)^2$ и показатель выпуклости C таков, что вторым слагаемым нельзя пренебречь по сравнению с первым. Следовательно, чем больше показатель выпуклости, тем хуже дюрация облигации оценивает величину $\frac{\Delta P(r)}{P(r)}$. И наоборот – чем меньше C, тем более верным является приближенное равенство (11.8). Следовательно, чем меньше C, тем лучше дюрация облигации оценивает чувствительность цены облигации к изменениям временной структуры процентных ставок. Таким образом, показатель выпуклости облигации можно интерпретировать как показатель того, насколько точно дюрация облигации оценивает величину $\frac{\Delta P(r)}{P(r)}$.

Таким образом, в момент $t = 0$ дюрация облигации является мерой ее процентного риска при следующих условиях:1) в начальный момент времени безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны r (кривая доходностей является горизонтальной); 2) процентные ставки для всех сроков изменились мгновенно в этот же момент на одну и ту же величину Δr (кривая доходностей переместилась параллельно самой себе); 3) Δr мало; 4) показатель выпуклости облигации мал, т.е. справедлива формула (11.8).

На рис. 1.11.1 показана зависимость стоимости облигации $P(r + \Delta r)$ от доходности $(r + \Delta r)$. Кривая 1 построена по формуле (11.2) для точного поведения цены. Из формул (11.8) и (11.9) получим выражения для приближенного поведения цены:

$$P(r+\Delta r) \approx P(r) - DP(r)\frac{\Delta r}{1+r}\,, \qquad (11.10)$$

$$P(r+\Delta r) \approx P(r) - DP(r)\frac{\Delta r}{1+r} + \frac{1}{2}CP(r)\left(\frac{\Delta r}{1+r}\right)^2. \qquad (11.11)$$

Зависимость (11.10), описывающая изменение цены только с помощью дюрации облигации, является линейной относительно ($r + \Delta r$) (кривая 2). Зависимость (11.11), описывающая изменение цены облигации с помощью дюрации и показателя выпуклости, является квадратичной.

Пример 11.1. Дана 6% - ная купонная облигация номиналом 1000 д.е., по которой обещают производить купонные выплаты каждые полгода в течение 3 лет. Безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и составляют 8% в год. Определить:

1. Дюрацию и показатель выпуклости облигации;

2. Относительное изменение цены облигации $\frac{\Delta P(r)}{P(r)}$ при изменении процентных ставок на величину Δr = 0,01; 0,02; – 0,01 по формулам: (11.3) – точное значение, (11.8) – приближенное с учетом только дюрации облигации, (11.9) - приближенное с учетом дюрации и показателя выпуклости облигации.

Здесь значения параметров облигации следующие: A = 1000 д.е., f = 0,06, m = 2, T = 3 года, r = 0,08.

1. Результаты расчета дюрации и показателя выпуклости облигации приведены в таблице:

Номер платежа	Срок платежа ti	Сумма платежа Ci	Ci(0)	$\frac{C_i(0)}{P(r)}$	$ti\ \frac{C_i(0)}{P(r)}$	$ti\ (ti+1)\frac{C_i(0)}{P(r)}$
1	0,5	30	28,867513	0,030339	0,015170	0,022754
2	1	30	27,777778	0,029194	0,029194	0,058388
3	1,5	30	26,729179	0,028092	0,042138	0,105345
4	2	30	25,720165	0,027031	0,054063	0,162189
5	2,5	30	24,749240	0,026011	0,065028	0,227596
6	3	1030	817,647208	0,859332	2,577997	10,311990
		Сумма	951,491083	1,000000	2,783589	10,888262

Таким образом, цена облигации P(0,08) = 951,491 д.е., ее дюрация D = 2,784 года, показатель выпуклости C = 10,888 лет2.

2. Расчеты относительного изменения цены по формулам (11.3), (11.8), (11.9) для трех значений Δr приведены в таблице:

Δr		0,01	0,02	-0,01
$\frac{\Delta P(r)}{P(r)}$	Формула (11.3)	-0,025314	-0,049736	0,026248
	Формула (11.8)	-0,025774	-0,051548	0,025774
	Формула (11.9)	-0,025307	-0,049681	0,026241

Свойства дюрации и показателя выпуклости облигации

Дюрация облигации не превосходит срока до ее погашения T.

Действительно,

$$D = \sum_{i=1}^{n} t_i \frac{C_i(0)}{P(r)} \le \sum_{i=1}^{n} t_n \frac{C_i(0)}{P(r)} = t_n \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i(0)}{P(r)} = t_n = T ,$$

где $P(r)$ – рыночная стоимость облигации в момент $t = 0$, r – ее внутренняя доходность.Дюрация чисто дисконтной облигации равна сроку до ее погашения. Действительно, для чисто дисконтной облигации имеем

$$P(r) = \frac{A}{(1+r)^T} ,$$

где A – номинал облигации. Тогда дюрация облигации равна

$$D = T \frac{\frac{A}{(1+r)^T}}{P(r)} = T .$$

Свойства

1. Если облигация не является чисто дисконтной, то чем больше внутренняя доходность облигации, тем меньше ее дюрация и показатель выпуклости.
2. Если все платежи по облигации отсрочить на $t0$ лет, не изменяя ее внутренней доходности r, то дюрация облигации увеличится на $t0$ лет, а показатель выпуклости – на ($t02$ + 2 $t0D$ + $t0$) лет2.
3. Если до погашения облигации остается больше одного купонного периода, то при заданном значении внутренней доходности r дюрация облигации и показатель выпуклости тем больше, чем меньше купонная ставка.

Зависимость дюрации облигации от срока до погашения при неизменных f и r, где f и r – купонная ставка и внутренняя доходность облигации соответственно, сформулируем в виде следующих утверждений.

Пусть Dn – дюрация облигации, платежи по которой выплачиваются m раз в год и до погашения которой остается n купонных периодов. Тогда

6*a*. $\lim\limits_{n\to\infty} D_n \approx \dfrac{r+m}{rm}$.

6*b*. Если $f \geq r$, то последовательность $\{Dn\}$ является возрастающей.

6*c*. Если $f < r$, то можно указать число $n0$ такое, что для облигаций с числом периодов до погашения $n < n0$ последовательность $\{Dn\}$ является возрастающей.

6*c*. Пусть $f < r$. Дюрация купонной облигации, платежи по которой выплачиваются раз в год (m = 1) и до погашения остается n лет (τ = 0), равна

$$D_n = \frac{fA\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i}{(1+r)^i} + n\dfrac{A}{(1+r)^n}}{fA\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{(1+r)^i} + \dfrac{A}{(1+r)^n}}.$$

§ 12. Временная зависимость стоимости инвестиции в облигацию. Иммунизирующее свойство дюрации облигации

Рассмотрим облигацию, по которой через $t1, t2,\ldots, tn = T$ лет от текущего момента времени $t = 0$ обещают выплатить денежные суммы $C1, C2,\ldots,Cn$ соответственно.

Определение. Стоимость инвестиции в облигацию в момент $t \in [0, T]$ – это стоимость потока платежей по облигации $C1, C2,\ldots,Cn$ в момент t.

Обозначим стоимость инвестиции в облигацию через t лет после покупки через $P(t)$. Как следует из определения, $P(t)$ - это сумма всех членов потока платежей по облигации, приведенных к моменту времени t. Пусть $t1, t2,\ldots, tm, tm + 1,\ldots, tn$ – моменты поступления платежей $C1, C2,\ldots, Cm$, $Cm+1,\ldots, Cn$ соответственно и $t \in [tm, tm + 1]$. Тогда

$$P(t) = \sum_{k=1}^{m} C_k F(t_k, t) + \sum_{k=m+1}^{n} C_k v(t, t_k), \tag{12.1}$$

где $F(tk, t)$ - множитель наращения k – го платежа на временном отрезке $[tk, t]$, $k = 1, 2,\ldots, m$; $v(t, tk)$ - дисконтный множитель k – го платежа на отрезке $[t, tk]$, $k = m + 1,\ldots, n$.

Таким образом, стоимость инвестиции в облигацию в момент t имеет две составляющие – результат реинвестирования поступивших до момента t платежей по облигации:

$$Rt = \sum_{k=1}^{m} C_k F(t_k, t)$$

и рыночную цену облигации в момент t:

$$Pt = \sum_{k=m+1}^{n} C_k v(t,t_k).$$

Как следует из этих выражений, стоимость инвестиции в момент $t = 0$ - это рыночная цена покупки облигации, т.е. $P(0) = P$.

Таким образом, стоимость инвестиции в облигацию через t лет после покупки получают, исходя из следующих предположений:

1) все платежи, полученные от облигации до момента t, реинвестируются;

2) в момент t облигации данного выпуска имеются на рынке. Облигация, купленная t лет назад, может быть продана на рынке по существующей на этот момент времени рыночной цене Pt.

Тогда

$$P(t) = Rt + Pt. \qquad (12.2)$$

Очевидно, что Rt определяется набором годовых безрисковых ставок для инвестиций на сроки $(t - t1)$, $(t - t2)$ лет и т.д. для всех платежей по облигации до момента t. Рыночная цена Pt определяется количеством оставшихся до погашения платежей по облигации и временной структурой процентных ставок на момент t по временному диапазону $(T - t)$ лет.

Рассмотрим облигацию, по которой через $t1, t2, \ldots, tm, tm + 1, \ldots, tn$ лет от текущего момента времени $t = 0$ обещают выплатить денежные суммы $C1, C2, \ldots, Cm, Cm+1, \ldots, Cn$ соответственно. Пусть $t \in [tm, tm + 1]$. Тогда

$$Rt = C_1(1 + r(t - t_1))^{t - t_1} + \ldots + C_m(1 + r(t - t_m))^{t - t_m}, \qquad (12.3)$$

$$Pt = \frac{C_{m+1}}{(1 + r(t_{m+1} - t))^{t_{m+1} - t}} + \ldots + \frac{C_n}{(1 + r(t_n - t))^{t_n - t}}, \qquad (12.4)$$

где $r(t - t1), \ldots, r(t - tm)$ – годовые безрисковые процентные ставки для инвестирования на $(t - t1), \ldots, (t - tm)$ лет соответственно в моменты $t1, t2, \ldots, tm$; $r(tm + 1 - t), \ldots, r(tn - t)$ – годовые безрисковые процентные ставки для инвестирования на $(tm+1 - t), \ldots, (tn - t)$ лет соответственно в момент t.

Пример 12.1. Дана облигация со следующим потоком платежей на момент покупки ($t = 0$):

Срок, годы	1	2	3	4	5	6
Платеж, д.е.	20	20	20	15	15	135

Определить стоимость инвестиции в эту облигацию через 3,5 года после покупки для безрисковых процентных ставок, приведенных в таблице:

Ставка, %	17	16	15	15	15,5	16
Срок инвестирования, годы	2,5	1,5	0,5	0,5	1,5	2,5
Момент инвестирования	1	2	3	3,5	3,5	3,5

Результат реинвестирования поступивших до момента t = 3,5 платежей по облигации составляет

Rt = 20(1 + 0,17)2,5 + 20(1 + 0,16)1,5 + 20(1 + 0,15)0,5 = 76,0486 (д.е.)

Рыночная стоимость облигации через 3,5 года после ее покупки будет

$$Pt = \frac{15}{(1+0{,}15)^{0{,}5}} + \frac{15}{(1+0{,}155)^{1{,}5}} + \frac{135}{(1+0{,}16)^{2{,}5}} = 119{,}2231 \text{(д.е.)}$$

Таким образом, стоимость инвестиции в облигацию через 3,5 года после ее покупки составит 76,0486 + 119,2231 = 195,2717 (д.е.).

Теперь предположим, что в момент покупки облигации t = 0 временная структура процентных ставок такова, что безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны r. Рассмотрим стоимость инвестиции в облигацию через t лет после покупки для двух случаев:

1) временная структура процентных ставок остается неизменной до погашения облигации;

2) сразу после покупки облигации безрисковые процентные ставки для всех сроков мгновенно изменились на одну и ту же величину и стали равными $\tilde{r}$, а затем уже не менялись.

Стоимость инвестиции в облигацию в момент t в первом случае называют **планируемой** и обозначают через $P(r,t)$, во втором случае – **фактической** и обозначают через $P(\tilde{r}, t)$.

Свойства планируемой и фактической стоимостей инвестиции.

1. $P(r, t)$ и $P(\tilde{r}, t)$ – непрерывные возрастающие функции времени:

$$P(r, t) = P(r)(1+r)^t \ , \tag{12.5}$$

$$P(\tilde{r}, t) = P(\tilde{r})(1+\tilde{r})^t \ . \tag{12.6}$$

2. Существует и притом единственный момент времени t^*, когда фактическая стоимость инвестиции равна планируемой.

3. Теорема 12.1 (об иммунизирующем свойстве дюрации облигации). Пусть $D = D(r)$ – дюрация облигации в момент t = 0, когда безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны r. Тогда в момент времени, равный дюрации облигации, $t = D$, фактическая стоимость инвестиции в облигацию не меньше планируемой, т.е.

$$P(\tilde{r}, D) \geq P(r, D) \qquad (12.10)$$

для любых значений $\tilde{r}$.

Замечание. На основании доказанной теоремы можно сформулировать **иммунизирующее свойство дюрации** облигации. Пусть в момент инвестирования $t = 0$ безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы. Тогда в момент времени, равный дюрации облигации, инвестиция в облигацию иммунизирована (защищена) против изменений безрисковых процентных ставок сразу после $t = 0$ на одну и ту же величину (или до момента $t1$ – первого платежа по облигации, в чем несложно убедиться). Таким образом, иммунизирующее свойство дюрации облигации имеет место при условии горизонтальности кривой доходностей и параллельности ее сдвигов.

Следствие. Пусть $D = D(r)$ – дюрация облигации в момент $t = 0$, когда безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны r, а $r1$ и $r2$ – безрисковые процентные ставки сразу после $t = 0$. Тогда если $r1 < r < r2$, то

$$t^*(r2) < D < t^*(r1). \qquad (12.12)$$

Пример 12.2. Дана 10% - ная купонная облигация номиналом 100 д.е., по которой ежегодно обещают производить купонные выплаты в течение трех лет. Безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны 10% годовых. Сразу после покупки облигации процентные ставки а) снизились до 9% годовых; б) увеличились до 11 % годовых. Найти:

1) планируемую и фактическую стоимость инвестиции в облигацию в момент времени, равный дюрации облигации;

2) моменты времени, когда планируемая и фактическая стоимости инвестиции совпадают.

В таблице приведены расчеты цены $P(r)$ и дюрации облигации $D = D(r)$ на момент покупки облигации, где r = 10% годовых, а также величин $P(r1)$ и $P(r2)$, где $r1$ = 9%, $r2$ = 11% годовых.

Номер платежа	Срок платежа ti	Сумма платежа Ci	$Ci(0)$			$\frac{C_i(0)}{P(r)}$	$ti\ \frac{C_i(0)}{P(r)}$
			$r = 0,1$	$r1 = 0,09$	$r2 = 0,11$		
1	1	10	9,0909	9,1743	9,0090	0,09091	0,09091
2	2	10	8,2645	8,4168	8,1162	0,08264	0,16529
3	3	110	82,6446	84,9402	80,4311	0,82645	2,47934
		Сумма	100,0000	102,5313	97,5563	1,00000	2,73554

Таким образом, дюрация облигации в момент ее покупки $D = 2{,}73554$ лет. Цена покупки $P(0{,}1) = 100{,}00$ д.е. Величины $P(0{,}09) = 102{,}5313$ д.е. и $P(0{,}11) = 97{,}5563$ д.е. – оценки облигации на момент $t = 0$, соответствующие новой временной структуре процентных ставок после $t = 0$. Тогда планируемая стоимость инвестиции в облигацию на момент времени $t = D$ равна

$$P(0{,}1;\, D) = P(0{,}1)(1 + 0{,}1)D = 129{,}7870.$$

Фактические стоимости

$$P(0{,}09;\, D) = P(0{,}09)(1 + 0{,}09)D = 129{,}7891.$$

$$P(0{,}11;\, D) = P(0{,}11)(1 + 0{,}11)D = 129{,}7891.$$

В обоих случаях фактическая стоимость инвестиции в момент $t = D$ больше планируемой. В первом случае в момент $t = D$ снижение ставки реинвестирования компенсировано ростом рыночной цены облигации в момент $t = D$ по сравнению с планируемой. Во втором случае снижение рыночной цены в момент $t = D$ вследствие роста процентных ставок компенсировано возросшей ставкой реинвестирования по сравнению с планируемой.

2) Моменты времени, когда планируемая и фактическая стоимости инвестиции совпадают, равны соответственно

$$t^*(0{,}09) = \frac{\ln\left(\dfrac{P(0{,}1)}{P(0{,}09)}\right)}{\ln\left(\dfrac{1{,}09}{1{,}1}\right)} = 2{,}73726,$$

$$t^*(0{,}11) = \frac{\ln\left(\dfrac{P(0{,}1)}{P(0{,}11)}\right)}{\ln\left(\dfrac{1{,}11}{1{,}1}\right)} = 2{,}73381.$$

Таким образом, $t^*(0{,}11) < D < t^*(0{,}09)$.

Задачи

1. Срок погашения долга – 10 лет. При выдаче кредита была использована сложная учетная ставка 4 % годовых. Величина дисконта за 6-й год срока долга составила 339,738624 д.е. Какова величина дисконта за 3-й и 8-й годы в сроке долга? Какова сумма кредита? Ответ получить двумя способами.

2. На вклад начисляются сложные проценты 8 % годовых. Проценты за 6-й год вклада составили 117,546246 д.е. Какова величина процентов за 3-й и 8-й годы вклада? Какова сумма вклада к концу 8-го года? Ответ получить двумя способами.

3. Сравнить темпы наращения суммы долга по простым процентным ставкам i и d, полагая их равными. Результат сравнения показать на рисунке в виде кривых наращения. Покажите на рисунке величину дохода кредитора, считая заданным срок долга. Для каждой из процентных ставок i и d сделать расчеты суммы погашаемого долга в следующей кредитной операции: ссуда в 10 тыс. д.е. выдана под ставку 12 % годовых с ежемесячным начислением простых процентов. Срок долга 0,5 года, 1 год, 1,5 года. Сравнить для ставок i и d доход кредитора за каждый месяц и весь срок долга. Соответствуют ли результаты расчетов построенным кривым ? Какой можно сделать вывод?

4. Используя выкладки из предыдущей задачи, сравнить скорости дисконтирования по простым ставкам i и d. Нарисовать дисконтные кривые. На рисунке показать величину дисконта, считая заданным срок долга. Сравнить результаты учета векселя на сумму 300 тыс. д.е. методами математического и банковского дисконтирования простыми процентами 6 % годовых за три месяца до погашения. Каков ежемесячный доход кредитора в каждом случае и доход за весь срок? На какую сумму был бы учтен вексель каждым из методов за 0,5 года и 9 месяцев до погашения? Соответствуют ли результаты расчетов построенным кривым?

5. Сравнить между собой методы наращения по номинальным процентным ставкам $i(m)$ и $d(m)$, полагая их равными. Результат сравнения показать на рисунке в виде кривых наращения. Рассчитать сумму погашаемого долга, полученную каждым из методов, для ссуды в 1000 д.е. при ежемесячном начислении процентов по номинальной ставке 6% годовых в течение 0,5 года, 1 года, 2 лет, 3 лет. Проверьте соответствие результатов расчетов построенным кривым.

6. В условиях предыдущей задачи рассчитать соответствующие эффективные процентные ставки. Как объяснить неравенство $ief > def$?

7. Доказать, что эффективная процентная ставка измеряет реальный относительный доход, получаемый в целом за год от начисления процентов.

8. Сравнить скорости дисконтирования по номинальным процентным ставкам $i(m)$ и $d(m)$. Показать на рисунке дисконтные кривые. Для заданного срока долга показать на этом рисунке величину дисконта. Используя данные методы дисконтирования, сделать расчеты современной стоимости и величины дисконта для следующей финансовой операции. Финансовый инструмент на сумму 8000 д.е. продан за 5 лет до погашения. Дисконтирование долга осуществляется ежеквартально по номинальной ставке 5 % годовых. Соответствуют ли результаты расчетов построенным кривым ?

9. Сумма 1000 д.е. размещена на депозит. Определить величину вклада через 1 год и через 3 года, если для наращения применяется номинальная процентная ставка 8 % годовых при начислении процентов а) ежемесячно б) каждые полгода. Сформулировать зависимость от m наращенной суммы долга при наращении по номинальной процентной ставке. Для случаев а) и б) рассчитать соответствующие эффективные процентные ставки. Объяснить полученное соотношение между эффективными ставками.

10. Известно, что эффективная процентная ставка составляет 15 % годовых. Найти соответствующие номинальные процентные ставки $i(4)$, $i(12)$, $i(52)$, $i(365)$. Объяснить поведение процентных ставок.

11. Известно, что эффективная учетная ставка составляет 12 % годовых. Найти соответствующие номинальные учетные ставки $d(4)$, $d(12)$, $d(52)$, $d(365)$. Объяснить поведение процентных ставок.

12. 5000 д.е. должны быть возвращены через 4 года. Определить современную величину погашаемого долга и величину дисконта, если дисконтирование долга осуществляется по номинальной учетной ставке 6 % годовых а) ежеквартально б) каждые полгода. Сформулировать зависимость от m современной величины погашаемого долга, если для дисконтирования применяется номинальная учетная ставка. Для случаев а) и б) рассчитать соответствующие эффективные учетные ставки.

13. Определить результат наращения суммы 100 д.е. по ставкам простых и сложных процентов iпр. = iсл. = $i(m)$ = δ = $d(m)$ = dсл. = dпр. = 10 % годовых для следующих сроков: 90 дней, 180 дней, 1 год, 2 года и $m = 2$. Финансовый год равен 360 дням.

Какие свойства наращенной суммы долга можно установить по этим расчетам? Какая схема начисления процентов и для каких сроков выгоднее кредитору (заемщику)? Привести пример операции, когда применяется наращение по процентной ставке i, по учетной ставке d, по непрерывной ставке δ.

14. Определить современную величину 1000 д.е., если дисконтирование долга производится по ставкам простых и сложных процентов iпр. = iсл. = $i(m)$ = δ = $d(m)$ = dсл. = dпр. = 13 % годовых для следующих сроков долга: 90 дней, 180 дней, 1 год, 2 года и $m = 2$.

Финансовый год равен 360 дням. Какие свойства современной стоимости долга можно установить по этим расчетам? Какая схема начисления процентов и для каких сроков выгоднее кредитору (заемщику)? Привести пример операции, когда для учета долга применяется математическое дисконтирование, банковское дисконтирование.

15. Определить срок долга, за который сумма 5000 д.е. вырастет до значения 7000 д.е. при начислении сложных процентов по ставкам

$i = i(4) = i(12) = d = d(4) = d(12) = \delta = 0{,}15.$

Результат проиллюстрировать на рисунке. Какое свойство наращенной суммы долга можно установить по этим расчетам?

16. При условии, что $\delta = 0{,}1$, найти значения эквивалентных процентных ставок:

а) i, $i(4)$, $i(12)$, $i(52)$, $i(365)$; б) d, $d(4)$, $d(12)$, $d(52)$, $d(365)$.

17. Определить величину силы роста при непрерывном начислении процентов в течение 3 лет, которая эквивалентна: а) учету в банке долгового обязательства за 3 года до погашения по годовой учетной ставке 15 %; б) сложной процентной ставке 14 % годовых с ежемесячным начислением процентов; в) сложной процентной ставке 8,5 % годовых с начислением процентов каждые 3 месяца.

18. В условиях предыдущей задачи срок долга 9 месяцев.

19. Определить сложную процентную ставку с ежемесячным начислением процентов, эквивалентную силе роста 8 % при непрерывном начислении процентов в течение 9 месяцев.

20. Предполагается, что годовая интенсивность процентов является кусочно-непрерывной функцией времени:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0{,}09 & 0 \le t < 3, \\ 0{,}08 & 3 \le t < 7, \\ 0{,}05 & t \ge 7 \end{cases}.$$

Найти дисконтный множитель $v(t)$ для всех $t \ge 0$. Определить современную величину 500 д.е., подлежащих выплате через: а) 3 года; б) 10 лет.

21. Долг в размере 1000 д.е. должен быть погашен через 1,5 года. При выдаче кредита использовалась переменная годовая процентная ставка: в первые три месяца срока долга 8 %, в следующие три месяца 8,5 %, затем полгода 9 % и последние полгода 10 %. Какова сумма кредита? Рассмотреть математическое и банковское дисконтирование по простым и сложным процентным ставкам, включая непрерывную.

22. Необходимо учесть долговое обязательство на сумму 50000 д.е. за 4 года до погашения. Банк для учета обязательств применяет сложную процентную ставку 5 - 7% годовых. Проценты могут начисляться 1, 2 или 4 раза в год. Указать условия договора, по которому это обязательство может быть учтено.

23. При выдаче кредита на 200 дней под 10% годовых кредитор удерживает комиссионные в размере 0,5% от суммы кредита. Ставка налога на проценты 10%. Какова доходность операции для кредитора?

24. Обязательство об уплате 8000 д.е. 01.03 и 12000 д.е. 30.09 пересмотрено так , что первая выплата в сумме 6000 д.е. будет произведена 01.02, а остальная часть долга гасится 15.11. Для замены обязательства применялась сложная процентная ставка 6% годовых. В финансовом году 365 дней.

1) Определить сумму погашаемого остатка. Уравнение эквивалентности составить относительно 01.03 и относительно 01.02. Что выражает уравнение эквивалентности в каждом случае? Зависит ли ответ от выбранного момента времени для составления уравнения эквивалентности?

2) Какой суммой, выплачиваемой сегодня, можно было бы заменить старое обязательство?

25. Реструктуризация государственного долга была произведена следующим образом. Долг в сумме 1,4 млрд. д.е., который должен быть выплачен 1 января 1995 года, преобразован в облигации, выпущенные под гарантии правительства. По этим облигациям государство, начиная с 1 января 1995 года дважды в год выплачивает равные суммы до 2007 года. Для реструктуризации долга использовалась ставка (сложная) 3 % годовых. Какова сумма отдельного погасительного платежа ?

26. Предполагается, что годовая интенсивность процентов – показательная функция времени. Начальное значение интенсивности процентов 0.1, а годовой темп изменения интенсивности процентов установлен на уровне 1,1; 1; 0,9. Рассчитать значения множителя наращения для следующих сроков долга: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 лет. Сделать рисунок.

27. Годовая интенсивность процентов – показательная функция времени $\delta(t) = \delta 0at$. Получить зависимость от времени дисконтных множителей для возможных значений a. Сделать рисунок.

28. Предполагается, что годовая интенсивность процентов - показательная функция времени $\delta(t) = 0{,}12\ at$. Найти современную стоимость 500 д.е., подлежащих выплате через 2 года, если годовой темп изменения интенсивности процентов установлен на уровне 0,8; 1,1; 1. Объяснить соотношение между полученными суммами. Проверьте соответствие результатов расчетов рисунку, полученному в предыдущей задаче.

29. Предполагается, что годовая интенсивность процентов – линейная функция времени. Определить срок удвоения суммы долга, если начальное значение интенсивности процентов 0.1, а годовой прирост интенсивности процентов составляет 0.05, – 0.05 и 0. Результат показать на рисунке.

30. Годовая интенсивность процентов - линейная функция времени $\delta(t) = \delta 0 + at$. Получить зависимость от времени дисконтных множителей для возможных значений a. Сделать рисунок.

31. Предполагается, что годовая интенсивность процентов - линейная функция времени $\delta(t) = 0{,}13 + at$. Найти современную стоимость 2000 д.е., подлежащих выплате через 3 года, если годовой прирост интенсивности процентов составляет 0.04, – 0.04 и 0. Объяснить соотношение между полученными суммами. Проверьте соответствие результатов расчетов рисунку, полученному в предыдущей задаче.

32. Заем величиной 10000 д.е. должен быть оплачен в течение 10 лет постоянной обычной рентой, выплачиваемой ежемесячно. Сумма ежемесячного платежа рассчитывается на основе ежемесячной процентной ставки 1%. Найти:
а) сумму ежемесячного взноса; б) величину погашенного основного долга и выплаченных процентов к концу первого года; в) номер платежа, после которого невыплаченный долг становится меньше 5000 д.е.

33. Четырехгодичный контракт предусматривает взносы в два этапа с начислением на них сложных процентов по годовой процентной ставке 0,08 на первом этапе в течение первых 1,5 лет и по годовой процентной ставке 0,1 на втором этапе в последующие 2,5 года. На первом этапе взносы по 5000 д.е. производятся в конце каждого полугодия. На втором этапе взносы по 8000 д.е. производятся в конце каждого квартала. Найти величину вклада к концу четвертого года контракта.

34. Должник согласен оплатить заем величиной 3000 д.е. пятнадцатью годовыми выплатами величиной 500 д.е. с первой выплатой через 5 лет. Найти доходность этой сделки.

35. Заем величиной 5000 д.е. погашается одинаковыми ежемесячными взносами. На долг ежемесячно начисляются сложные проценты по ставке 12% годовых. За какой срок долг будет погашен, если ежемесячный взнос составляет: а) 50 д.е.; б) 100 д.е.?

36. Для покупки через 12 лет оборудования за 200 000 д.е. фирма каждый год вкладывает деньги в резервный фонд для начисления сложных процентов по годовой процентной ставке 0,06. Первоначальные взносы были по 11855,41 д.е. После 8 лет банк увеличил годовую процентную ставку до 0,08. Какой величины были взносы в оставшийся период?

37. Определите ставку внутренней нормы доходности инвестиционного проекта со следующим потоком платежей:

(-20, -35, -25, 25, 45, 45, 20).

Ставка банковского процента равна 20 %. Следует ли осуществлять проект?

38. Рассчитать показатели эффективности инвестиционного проекта с начальными инвестициями 10000 д.е. и постоянными доходами 4000 д.е. в год. Ставка процента 8% годовых.

39. Сравнить проекты

(-50, -50, -45, 65, 85, 85, 20, 20) и

(-60, -70, -50, -40, 110, 110, 110, 110)

по критерию максимального NPV и по критерию максимального IRR. Указать преимущество выбранного проекта в каждом случае. Ставка процента 15 % годовых.

40. Инвестор рассматривает возможность помещения денег в один из следующих займов. Заем А: за цену покупки 10000 д.е. инвестор будет получать 1000 д.е. в год, выплачиваемых ежеквартально на протяжении 15 лет. Заем В: за цену покупки 11000 д.е. инвестор будет получать годовой доход 605 д.е., выплачиваемых ежегодно на протяжении 18 лет, и возмещение его расходов в конце этого срока.

41. Инвестор может ссужать или занимать деньги под 4 % годовых. Какой проект является более выгодным для инвестора?

42. Определить годовую внутреннюю доходность облигации А со следующим потоком платежей:

Облигация	*ti* [годы]				
	0	1	1,5	1,8	2
А	-100	+10	+20	+30	+140

43. Известны безрисковые процентные ставки
$r(1) = 0{,}05$; $r(1{,}5) = 0{,}06$; $r(2) = 0{,}065$.

Построить кривую доходностей, используя квадратичное интерполирование. Зная кривую доходностей, определить рыночную цену облигации со следующим потоком платежей:

Срок, годы	0,5	1	1,5	1,8
Платеж	10	10	10	110

44. Купонные 10%-ные облигации, каждая номиналом 1000 д.е. и годовой внутренней доходностью 8%, имеют сроки до погашения 10 и 20 лет соответственно. Определить размер премии для каждой облигации в данный момент и через год при условии, что внутренняя доходность облигаций остается постоянной до их погашения. Сравнить изменения премий. Купонные платежи производятся ежегодно. Решение задачи показать на рисунке.

45. Купонные 10%-ные облигации, каждая номиналом 1000 д.е. и годовой внутренней доходностью 12%, имеют сроки до погашения 8 и 15 лет соответственно. Определить размер дисконта для каждой облигации в данный момент и через год при условии, что внутренняя доходность облигаций остается постоянной до их погашения. Сравнить изменения дисконтов. Купонные платежи производятся ежегодно. Решение задачи показать на рисунке.

46. По 6% купонной облигации номиналом 200 д.е. обещают производить каждый квартал купонные платежи. Определить цену облигации в момент, когда до погашения облигации остается: а) 16 месяцев; б) 15 месяцев.

47. По 10% - ной купонной облигации номиналом 1000 д.е. в конце каждого квартала обещают производить купонные выплаты в течение 5,2 лет. Внутренняя доходность облигации составляет 8% годовых. Определить котируемую цену облигации и величину накопленного купонного дохода, который должен оплатить покупатель облигации.

48. Дана 10%-ная купонная облигация номиналом 1000 д.е., по которой обещают производить купонные выплаты дважды в году течение 4-х лет. Опре-

делите величину дюрации и показателя выпуклости облигации, если безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны:

а) 10%; б) 9%; в) 8% годовых.

49. Дана купонная облигация номиналом 1000 д.е., по которой обещают производить купонные выплаты дважды в году в течение 4-х лет. Безрисковые процентные ставки одинаковы для всех сроков и составляют 10% годовых. Определите величину дюрации и показателя выпуклости облигации, если купонная ставка составляет: а) 7%; б) 8% ; в) 10% годовых.

50. Даны две облигации с 10%-ными купонными ставками и номиналом 1000. Одна из них имеет срок до погашения 4 года, а другая - 15 лет. По обеим облигациям производятся ежегодные процентные платежи. Предположив, что доходность облигаций возрастает с 10% до 14%, рассчитайте цену облигаций до и после изменения процентных ставок. Объясните различия в процентных изменениях цен облигаций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Четыркин Е.М. Финансовая математика. Учебник. М.: Изд-во “Дело”, 2000.
2. Чуйко А.С., Шершнев В.Г. Математические основы финансового обслуживания. М.: Изд-во РЭА, 2000.
3. МакКачион Дж.Дж., Скотт У.Ф. Введение в математику финансов. – М.: 1997.
4. Ковалев В.В., Уланов В.А. Курс финансовых вычислений. – М.: “Финансы и статистика”, 1999.
5. Ковалев В.В. Методы оценки инвестиционных проектов. – М.: “Финансы и статистика”, 1999.
6. Четыркин Е.М. Финансовый анализ производственных инвестиций. М.: Изд-во “Дело”, 1998.
7. Капитоненко В.В. Финансовая математика и ее приложения. Учебн.-практ. пособие для вузов. – М.: Изд-во “ПРИОР”, 1999.
8. Барбаумов В.Е., Гладких И.М., Чуйко А.С. Финансовые инвестиции. Ч.1. Инвестиции с фиксированными доходами. Учебное пособие. М.: Изд-во РЭА, 2000.
9. Воронцовский А.В. Методы обоснования инвестиционных проектов в условиях определенности. Учебное пособие. Изд-во Санкт-Петербургского университета, 1999.
10. Аньшин В.М. Инвестиционный анализ. Учебное пособие. М.: Изд-во “Дело”, 2000.
11. Лоренс Дж. Гитман, Майкл Д. Джонк. Основы инвестирования. – М.: Изд-во Дело, 1999.
12. МакЛафлин Д.Дж. Ценные бумаги: как добиться высоких доходов. М.: Изд-во «ДЕЛО», 1999.
13. Фрэнк Дж. Фабоцци Управление инвестициями. – М.: Изд-во «ИНФРА-М», 2000.
14. Шарп У.Ф., Александер Г.Дж., Бэйли Дж.В. Инвестиции. - М.: ИНФРА-М, 1999.
15. Benninga S. Financial Modeling. MIT, 2000.
16. Broverman S.A. Mathematics of investment and credit. Winsted, ACTEX Publ. 1996.
17. Zima P., Brown R.L. Mathematics of Finance. McGraw-Hill, 1993.

Оглавление