c098bc0c1041cb2a4cf926cf171d6715d99a6ae00adc8e27b55cbe1e2dbd7c78

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА РФ
ФИЛИАЛ НОВОРОССИЙСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННОЙ
МОРСКОЙ АКАДЕМИИ
в г. Ростове-на-Дону

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Типовое расчётное задание

Ростов-на-Дону
2002 г.

Составитель Л.В. Сахарова

УДК 517
С 221

Кратные и криволинейные интегралы: Типовое расчётное задание. Ростов-на-Дону: Типография ООО "ВУД", 2002.- 19 с.

Пособие содержит 8 заданий по 30 вариантов в каждом. Предназначено для организации индивидуальной самостоятельной работы курсантов по высшей математике. Может быть использовано преподавателями для проведения занятий и различных форм контроля знаний курсантов.

Печатается по решению общенаучной кафедры филиала НГМА в г. Ростове-на-Дону

Рецензент: начальник общенаучной кафедры филиала НГМА, доцент, к.ф.-м.н. Н.Ю.Сафонцева

Типография ООО "ВУД", 2002

Задание 1

Поменять порядок интегрирования:

1) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$;

2) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x} f(x,y)dy$;

3) $\int\limits_{-3/2}^0 dx \int\limits_{2x^2}^{3-x} f(x,y)dy$;

4) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{x^2/4}^{2\sqrt{x}} f(x,y)dy$;

5) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x,y)dy$;

6) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-1}^{x^2+1} f(x,y)dy$;

7) $\int\limits_{-2}^6 dy \int\limits_{\frac{y^2}{2}-6}^{2y} f(x,y)dx$;

8) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{-\sqrt{2y-y^2}}^{y^2} f(x,y)dx$;

9) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{x^2}^{x^2+2} f(x,y)dy$;

10) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{2^y-1} f(x,y)dx$;

11) $\int\limits_0^4 dy \int\limits_{\frac{3}{2}\sqrt{y}}^{\sqrt{25-y^2}} f(x,y)dx$;

12) $\int\limits_0^4 dy \int\limits_{\sqrt{16-y^2}}^{\frac{3}{2}y+4} f(x,y)dx$;

13) $\int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_{2x^2}^{x+3} f(x,y)dy$;

14) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{y^2}^{y^2+2} f(x,y)dx$;

15) $\int\limits_{-6}^2 dx \int\limits_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)dy$;

16) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx$;

17) $\int\limits_0^4 dy \int\limits_{\frac{1}{2}y+1}^{7-y} f(x,y)dx$;

18) $\int\limits_0^4 dy \int\limits_{\frac{1}{2}y+1}^{\frac{3}{2}y+4} f(x,y)dx$;

19) $\int\limits_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} dx \int\limits_{\sqrt{2+x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x,y)dy$;

20) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{4-2x^2}^{4-x^2} f(x,y)dy$;

21) $\int\limits_{0}^{a} dx \int\limits_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)dy$;

22) $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{2x-x^2}}^{0} f(x,y)dy$;

23) $\int\limits_{-4}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{9+y^2}}^{\frac{5}{4}y} f(x,y)dx$;

24) $\int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{\frac{5}{4}y}^{\sqrt{9+y^2}} f(x,y)dx$;

25) $\int\limits_{-3}^{2} dy \int\limits_{y-2}^{4-y^2} f(x,y)dx$;

26) $\int\limits_{-2}^{3} dx \int\limits_{x^2-1}^{x+5} f(x,y)dy$;

27) $\int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{\frac{x^2}{2}-2}^{2-x} f(x,y)dy$;

28) $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{8-x^2}}^{-\frac{x^2}{2}} f(x,y)dy$;

29) $\int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} f(x,y)dx$;

30) $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{-2-x^2}^{x^2} f(x,y)dy$.

Задание 2

С помощью двойного интеграла найти площади фигур, ограниченных заданными линиями:

1) а) $xy = 9$; $y = 6$; $y = x$; б) $(x^2 + y^2)^5 = 4a^2y^2x^4$;

2) а) $y^2 = x$; $x + y = 2$; б) $(x^2 + y^2)^2 = 3x^2 + y^2$;

3) а) $2y = x^2 - 4x$; $y = x$; б) $(x^2 + y^2)^3 = a^2x^4$;

4) а) $x = \sqrt{y}$; $x + 2y - 3 = 0$; $y = 0$; б) $(x^2 + y^2)^2 = 4xy$;

5) а) $y^2 = 10x + 25$; $y^2 = 9 - 6x$; б) $(x^2 + y^2)^3 = a^2x^3y$;

6) а) $\frac{x^2}{9} - y = 1$; $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$; б) $(x^2 + y^2)^7 = a^8x^4y^2$;

7) а) $x = y$; $x = 2y$; $x + y = 1$; б) $(x^2 + y^2)^3 = a^2x^2y^2$;

8) а) $y^3 = x$; $y = 1$; $x = 8$; б) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(2x^2 + 3y^2)$;

9) а) $y = x^2$; $y = \sqrt{x}$; б) $\left(x^2 + y^2\right)^2 = ax^3$ $(a > 0)$;

10) а) $y = x^2$; $y = 2x^2$; $x = 1$; $x = 2$; б) $\left(x^2 + y^2\right)^5 = a^6 xy^3$;

11) а) $y = x^2$; $y = \dfrac{x^3}{3}$; б) $x^6 = a^2\left(x^4 - y^4\right)$;

12) а) $y = x^2 + 2x$; $y = x + 2$; б) $\left(x^2 + y^2\right)^3 = a^4 x^2$;

13) а) $xy = 4$; $x + y = 5$; б) $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2y^3$;

14) а) $y = x^2 - 2x$; $y = x$; б) $\left(x^2 + y^2\right)^3 = 9y^4$;

15) а) $y = x$; $y = 2x$; $x + y = 6$; б) $\left(x^2 + y^2\right)^5 = a^4 x^4 y^2$;

16) а) $2x = y^2 - 4y$; $x + y = 0$; б) $\left(x^2 + y^2\right)^7 = a^8 x^2 y^4$;

17) а) $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$; $y = \dfrac{x^2}{2}$; б) $\left(x^2 + y^2\right)^5 = a^6 x^3 y$;

18) а) $y^2 = 16 - 8x$; $y^2 = 24x + 48$; б) $\left(x^2 + y^2\right)^3 = 9\left(x^4 + y^4\right)$;

19) а) $y = \sqrt{x}$; $y = 2\sqrt{x}$; $x = 4$; б) $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 25\left(x^2 - y^2\right)$;

20) а) $y^2 = 4 + 3x$; $x + y = 0$; б) $\left(x^2 + y^2\right)^3 = a^4 y^2$;

21) а) $y = \dfrac{27}{x^2 + 9}$; $y = \dfrac{x^2}{6}$; б) $y^6 = 9\left(x^4 - y^4\right)$;

22) а) $y = e^x$; $y = e^{-x}$; $x = 1$; б) $\left(x^2 + y^2\right)^3 = 4a^2 xy\left(x^2 - y^2\right)$;

23) а) $y = x^2$; $y = 4 - x^2$; б) $\left(x^2 + y^2\right)^2 = x^2 - 3y^2$;

24) а) $x^2 = 2 + y$; $x^2 = 6 - y$; б) $\left(x^2 + y^2\right)^2 = -9xy$;

25) а) $y = 2x - x^2$; $y = -x$; б) $\left(x^2 + y^2\right)^2 = y^2 - 3x^2$;

26) а) $y = x^3$; $y = \sqrt{x}$; б) $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(5x^2 + 7y^2\right)$;

27) а) $y = \dfrac{5}{x}$; $y = 6 - x$; б) $y^4 = x^2 - y^2$;

28) а) $y = \dfrac{x^2}{3}$; $y = 4 - \dfrac{2}{3}x^2$; б) $x^4 = y^2 - x^2$;

29) а) $y = x$; $y = 2x$; $x + y = 4$; б) $\left(x^2 + y^2\right)^5 = 64x^3 y$;

30) а) $y = 2x$; $2y = x$; $xy = 2$; б) $\left(x^2 + y^2\right)^5 = 81x^4y^2$.

Задание 3

Вычислить объём тела, ограниченного заданными поверхностями. Данное тело и область интегрирования изобразить на чертеже.

1) а) $x = 0$; $y = 3$; $y = x^2$; $z = 1 – x^2$; $z = 0$;
б) $x^2 + y^2 = 4$; $z = 0$; $x + y + z = 4$.

2) а) $z = 0$; $z = \frac{1}{4}y^2$; $y = 2x$; $x + y = 9$;
б) $z = 0$; $x^2 + y^2 = 9$; $x + y + z = 5$.

3) а) $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$; $y + z = 1$; $x = y^2 + 1$;
б) $x^2 + y^2 = 4$; $z = 0$; $z = x$.

4) а) $z = 0$; $z = y$; $x = 0$; $x = 4$; $x^2 + y^2 = 25$;
б) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$; $x^2 + y^2 = 2y$.

5) а) $z = 0$; $z = y$; $y = \sqrt{4 - x}$; $y = \frac{1}{3}x$;
б) $x^2 + y^2 =9$; $x^2 + z^2 = 9$.

6) а) $z = 0$; $z = \sqrt{y}$; $y = 3x$; $x = 2$;
б) $z = 4 – y^2$; $z = 0$; $x^2 + y^2 = 4$.

7) а) $z = 0$; $z = 2 – x$; $x = 1$; $x = y^2$;
б) $2x = x^2 + y^2$; $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

8) а) $z = 0$; $y = 0$; $y = -\frac{x}{2} + 1$; $z = 4 – x^2$;
б) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; $x^2 + y^2 = y$.

9) а) $z = 0$; $z = 1 – y^2$; $x = y^2$; $x = 2y^2 +1$;
б) $x^2 + y^2 = z^2$; $x^2 + y^2 = 2y$.

10) а) $z = \frac{1}{2}x$; $x^2 + y = 1$; $y = 0$; $z = 0$;
б) $x^2 + y^2 = a^2$; $x^2 + z^2 = a^2$.

11) а) $z = 3 – x$; $z = 0$; $y = 2\sqrt{x}$; $y = \frac{1}{4}x$;
б) $z = 9 – x^2$; $x^2 + y^2 = 9$; $z = 0$.

12) а) $z = 0$; $z = \frac{x^2}{2}$; $x + y = 6$; $x - y = 2$;

б) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; $x^2 + y^2 = x$.

13) а) $x = y^2 + 1$; $y + z = 1$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$;

б) $z = x^2 + y^2$; $z = 0$; $x^2 + y^2 = 4$.

14) а) $y = \sqrt{1 - z}$; $x + y = 2$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$;

б) $z = x^2 + y^2$; $x^2 + y^2 = 9$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.

15) а) $z = 2x^2 + y^2 + 1$; $x + y = 1$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$;

б) $z = 4 - x^2$; $z = 0$; $x^2 + y^2 = 4$.

16) а) $z = y$; $z = 0$; $y = \sqrt{4 - x}$; $x = \frac{1}{2}y - 1$;

б) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; $x^2 + y^2 = x$.

17) а) $z = 0$; $z = x^2$; $y = 0$; $x + y = 7$;

б) $x^2 + y^2 = 2x$; $z = 0$; $z = 2 - x$.

18) а) $z = 0$; $z = 2x$; $x + y = 3$; $x = \sqrt{\frac{y}{2}}$;

б) $z = 4 - x - y$; $z = 0$; $x^2 + y^2 = 4$.

19) а) $z = 0$; $z = 1 - x^2$; $y = 0$; $y = 3 - x$;

б) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; $z = 0$; $x^2 + y^2 = 2x$.

20) а) $z = 0$; $z = 4x$; $x + y = 3$; $y = 2x^2$;

б) $2 - z = x^2 + y^2$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.

21) а) $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$; $x + y = 2$; $z = 2x^2 + y^2$;

б) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$; $x^2 + y^2 = 2y$.

22) а) $x = 0$; $z = 0$; $y = \sqrt{x}$; $y = 1$; $z = 2 + x^2 + y^2$;

б) $x^2 + y^2 = 2x$; $z = 0$; $x^2 + y^2 = z^2$.

23) а) $z = 0$; $z = \sqrt{1 - y}$; $y = x^2$;

б) $z = 0$; $z = y$; $y = \sqrt{1 - x^2}$.

24) а) $z = 0$; $z = 2 - x$; $y = 2\sqrt{x}$; $y = \frac{x^2}{4}$;

б) $x^2 + y^2 = 1$; $z = 0$; $z = 2 - x - y$.

25) а) $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$; $x = 1$; $x + y = 2$; $z = x^2 + \frac{y^2}{2}$;

б) $x^2 + y^2 = 9$; $z = x^2 + y^2$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.

26) а) $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$; $x + y = 1$; $z = x^2 + 3y^2$;

б) $x^2 + y^2 - 4y = 0$; $z^2 = 4 - y$.

27) а) $z = 0$; $z = x^2$; $2x - y = 0$; $x + y = 9$;

б) $z = 4 - y^2$; $z = 0$; $x^2 + y^2 = 4$.

28) а) $z = 0$; $z = 2 - x$; $x + y = 1$; $x = \sqrt{\frac{y}{2}}$;

б) $z = x^2 + y^2$; $z = 0$; $x = x^2 + y^2$; $2x = x^2 + y^2$.

29) а) $z = 4\sqrt{y}$; $z = 0$; $x = 0$; $x + y = 4$;

б) $z = x^2 + y^2$; $x^2 + y^2 = 9$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.

30) а) $z = x^2 + y^2$; $y = x^2$; $y = 1$; $z = 0$;

б) $z = 1 - x^2 - y^2$; $z = 0$; $y = x$; $y = \sqrt{3}x$.

Задание 4

Вычислить криволинейный интеграл первого рода:

1) $\int\limits_L x^2 d\ell$; L: $y = \ln x$ от точки A(1; 0) до точки B(2; ln 2).

2) $\int\limits_L y^2 d\ell$; L: $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t); \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

3) $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}\, d\ell$; L: $\begin{cases} x = 2(\cos t + t\sin t), \\ y = 2(\sin t - t\cos t); \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

4) $\int\limits_L \frac{d\ell}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; L: $x - 2y = 4$ от точки A(0; –2) до точки B(4; 0).

5) $\int\limits_L (y - x)\, d\ell$; L: $y = x^3$ от точки A(1; 1) до точки B(2; 8).

6) $\int\limits_L y\, d\ell$; L: $y^2 = 2x$ от точки O(0; 0) до точки B(4; $\sqrt{8}$).

7) $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}\, d\ell$; L: $\begin{cases} x = t\cos t, \\ y = t\sin t; \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

8) $\int\limits_L \left(x^2+y^2\right)d\ell$; L: $\begin{cases} x = 3(\cos t + t\sin t), \\ y = 3(\sin t - t\cos t); \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$.

9) $\int\limits_L xy\left(x^2+y^2\right)d\ell$; L – дуга окружности: $x^2+y^2=9$ в первой четверти.

10) $\int\limits_L (x-y)d\ell$; L – отрезок AB от A(0; 0) до B(4; 3).

11) $\int\limits_L \left(\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{y}\right)d\ell$; L: $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t; \end{cases}$ $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

12) $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,d\ell$; L – окружность $x^2+y^2=4x$.

13) $\int\limits_L y\,d\ell$; L: $\begin{cases} x = 4t^2, \\ y = 4t - t^2; \end{cases}$ $0 \le t \le 2$.

14) $\int\limits_L \sqrt[3]{y^2}\,d\ell$; L: $y=\sqrt{x^3}$, $0 \le t \le 2$.

15) $\int\limits_L \dfrac{3d\ell}{\sqrt{x^2+y^2}}$; L: $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t, \\ y = \sin t - t\cos t; \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$.

16) $\int\limits_L xy\,d\ell$; L: $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 3\sin t; \end{cases}$ $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

17) $\int\limits_L x\,d\ell$; L: $\begin{cases} x = t, \\ y = \dfrac{t^2}{2}; \end{cases}$ $t \in [0;1]$.

18) $\int\limits_L \dfrac{y}{x}d\ell$; L: $y=\dfrac{x^2}{2}$ от точки A(1; $\dfrac{1}{2}$) до точки B(2; 2).

19) $\int\limits_L \sqrt{1+2x}\,d\ell$; L: $\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{2}, \\ y = \dfrac{t^3}{3}; \end{cases}$ $t \in [0;1]$.

20) $\int\limits_L \dfrac{y\,d\ell}{\sqrt{x}}$; L: $y^2=\dfrac{4}{9}x^3$ от точки A(3; $2\sqrt{3}$) до B(8; $\dfrac{32\sqrt{2}}{3}$).

21) $\int\limits_L \left(4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{y}\right)d\ell$; L: $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t; \end{cases}$ от точки A(–1; 0) до B(0; 1).

22) $\int\limits_L x^2 y d\ell$; L – дуга окружности: $x^2 + y^2 = 4$, лежащая в I четверти.

23) $\int\limits_L ye^{-x} d\ell$; L: $\begin{cases} x = \ln\left(1 + t^2\right), \\ y = 2\operatorname{arctg} t - t; \end{cases}$ $0 \le t \le 1$.

24) $\int\limits_L \left(x^2 + y^2\right)d\ell$; L – контур 4-угольника с вершинами A(0;0); B(1;0); C(2;2); D(0;2).

25) $\int\limits_L \left(x^2 + y^2\right)d\ell$; L – отрезок AB, соединяющий точки A(1;1) и B(2;2).

26) $\int\limits_L \left(4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y}\right)d\ell$; L – отрезок AB, соединяющий точки A(–1;0) и B(0;1).

27) $\int\limits_L y d\ell$; L: $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(t - \cos t); \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

28) $\int\limits_L x d\ell$; L: $\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 3t - t^2; \end{cases}$ $0 \le t \le \sqrt{3}$.

29) $\int\limits_L \left(x^2 + y^4\right)d\ell$; L: y = 3x – 1; x ≥ 0; y ≤ 0.

30) $\int\limits_L x d\ell$; L: $\begin{cases} x = 3(\cos t + t\sin t), \\ y = 3(\sin t - t\cos t); \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$.

Задание 5

Вычислить работу силы $\bar{F}$ по перемещению материальной точки по заданному пути.

1) $\bar{F} = (x - y)\bar{i} + (x + y)\bar{j}$ по дуге окружности $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$ в I четверти против часовой стрелки.

2) $\bar{F} = y\bar{i} + \dfrac{x}{y}\bar{j}$ вдоль дуги $y = e^{-x}$ от точки (0; 1) до точки (–1; e).

3) $\bar{F} = \frac{y}{x^2+y^2}\bar{i} - \frac{x}{x^2+y^2}\bar{j}$ вдоль верхней полуокружности $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$ по часовой стрелке.

4) $\bar{F} = \frac{y^2+1}{y}\bar{i} - \frac{x}{y^2}\bar{j}$ вдоль отрезка AB, соединяющего точки A(1; 2) и B(2; 4).

5) $\bar{F} = y\bar{i} + 2x\bar{j}$ вдоль дуги $y^2 = x$ от точки A(1; 1) до B(4; 2).

6) $\bar{F} = -y\bar{i} + x\bar{j}$ вдоль верхней половины эллипса $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$ против часовой стрелки.

7) $\bar{F} = \frac{y}{x}\bar{i} + x\bar{j}$ вдоль дуги $y = \ln x$ от точки (1; 0) до точки (e; 1).

8) $\bar{F} = -y\bar{i} + x\bar{j}$ вдоль дуги $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ от точки (0; 0) до точки ($2\pi a$; 0).

9) $\bar{F} = (x^2 - 2xy)\bar{i} + (y^2 - 2xy)\bar{j}$ вдоль дуги $y = x^2$ от точки (–1; 1) до точки (1; 1).

10) $\bar{F} = xe^{x^3}\bar{j} + y\bar{i}$ вдоль дуги $y = x^2$ от точки (0; 0) до точки (1; 1).

11) $\bar{F} = -y\bar{i} + x\bar{j}$ вдоль дуги астроиды $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ в I четверти против часовой стрелки.

12) $\bar{F} = (xy - 1)\bar{i} + x^2y\bar{j}$ вдоль прямой $2x + y = 2$; $0 \le x \le 1$.

13) $\bar{F} = y\bar{i} - x\bar{j}$ вдоль кривой $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t); \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$.

14) $\bar{F} = y^2\bar{i} + x^2\bar{j}$ вдоль кривой $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 3\sin t; \end{cases}$ $y \ge 0$; $-2 \le x \le 2$.

15) $\bar{F} = xy\bar{i} + (x + y)\bar{j}$ вдоль дуги $y = x^2$; $0 \le x \le 1$.

16) $\bar{F} = (x^2 - 2y)\bar{i} + (y^2 - 2x)\bar{j}$ вдоль отрезка AB: A(–4; 0), B(0; 2).

17) $\bar{F} = (xy - x)\bar{i} + \frac{x^2}{2}\bar{j}$ вдоль дуги $y = x^3$; $0 \le x \le 2$.

18) $\bar{F} = 2x^2\bar{i} + xy\bar{j}$ вдоль дуги $y = 2x^2$; $0 \le x \le 2$.

19) $\overline{F} = x\overline{i} + 2xy\overline{j}$ вдоль дуги $y = e^x$; $0 \le x \le 1$.

20) $\overline{F} = y\overline{i} + 2y\overline{j}$ вдоль дуги $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t; \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

21) $\overline{F} = 2xy\overline{i} + x^2\overline{j}$ вдоль дуги $y^2 = x$; $0 \le x \le 1$.

22) $\overline{F} = x^3\overline{i} + y^3\overline{j}$ вдоль верхней полуокружности $x^2 + y^2 = 4$ против часовой стрелки.

23) $\overline{F} = (x + y)^2\overline{i} - (x^2 + y^2)\overline{j}$ вдоль отрезка AB: A(1; 0), B(0; 1).

24) $\overline{F} = y\overline{i} - (y + x^2)\overline{j}$ вдоль дуги $y = 2x - x^2$ от точки (0; 0) до точки (2; 0).

25) $\overline{F} = -\frac{1}{y}\overline{i} + \frac{1}{x}\overline{j}$ вдоль дуги $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t; \end{cases}$ $t \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$.

26) $\overline{F} = (x - y)^2\overline{i} + (x + y)^2\overline{j}$ вдоль ломаной OAB, соединяющей точки O(0; 0), A(2; 0), B(4; 2).

27) $\overline{F} = (x^2 + y^2)\overline{i} + xy\overline{j}$ вдоль отрезка AB: A(1; 1), B(3; 4).

28) $\overline{F} = (xy - 1)\overline{i} + x^2y\overline{j}$ по дуге эллипса $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 2\sin t; \end{cases}$ от точки A(1; 0) до точки B(0; 2).

29) $\overline{F} = x^2y\overline{i} + x^3\overline{j}$ вдоль дуги параболы $y = x^2$ от точки A(–1; 1) до точки B(1; 1).

30) $\overline{F} = y^2\overline{i} + x^2\overline{j}$ вдоль верхней половины эллипса $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 3\sin t; \end{cases}$ по ходу часовой стрелки.

Задание 6

Вычислить криволинейный интеграл по замкнутому контуру L двумя способами: непосредственно и по формуле Грина.

1) $\oint\limits_L y^2dx + 3xdy$; L: y = 0; $y = \frac{x}{2}$; x = 2.

2) $\oint\limits_L y^3dx - 5dy$; L: y = 0; y = 2x; x = 4.

3) $\oint\limits_L 2ydx + x^2dy$; L: y = –x; y = x; x = 3.

4) $\oint\limits_L y^2dx - x^2dy$; L: y = –x; y = 2; x = 0.

5) $\oint\limits_L 3dx - x^2dy$; L: $y = -\frac{x}{3}$; y = 0; x = 2.

6) $\oint\limits_L 5ydx + 3xdy$; L: y = x^2; y = 0; x = 2.

7) $\oint\limits_L xydx - y^2dy$; L: y = x; y = 3x; x = 1.

8) $\oint\limits_L e^y dx + ydy$; L: y = x; y = 2x; x = 1.

9) $\oint\limits_L ydx - xydy$; L: y = –x; y = x^2; x = 2.

10) $\oint\limits_L x^2ydx + x^2dy$; L: y = x; y = –x; y = –2.

11) $\oint\limits_L xy^3dx - 3dy$; L: y = x^2; y = $-x^2$; x = 2.

12) $\oint\limits_L 3y^2dx + 2dy$; L: y = sin x; y = 0; $x = \frac{\pi}{2}$.

13) $\oint\limits_L \sin ydx - ydy$; L: y = x; y = 0; $x = \frac{\pi}{2}$.

14) $\oint\limits_L 2dx - e^{2x}dy$; L: y = x; y = –x; x = 1.

15) $\oint\limits_L xy^2dx + 5x^2ydy$; L: y = 2x; y = –x; y = 2.

16) $\oint\limits_L y^3dx + 2dy$; L: y = –x; y = –2x; x = 2.

17) $\oint\limits_L x^2dx - e^{2x}dy$; L: $y = \frac{x}{2}$; y = x; x = 1.

18) $\oint\limits_L 3dx + \sin xdy$; L: y = x; y = 2x; $x = \frac{\pi}{2}$.

19) $\oint\limits_L 2ydx - 3xdy$; L: y = cos x; x = 0; y = 0.

20) $\oint\limits_L y^2dx + xydy$; L: $x = \sqrt{4-y}$; $x = 0$; $y = 0$.

21) $\oint\limits_L \sin ydx + 2xdy$; L: $y = 0$; $y = x$; $x = \pi$.

22) $\oint\limits_L x^2y^2dx + 3dy$; L: $y = -x$; $y = 3x$; $x = 1$.

23) $\oint\limits_L 2dx - x^3dy$; L: $y = x^2$; $y = -x$; $x = 1$.

24) $\oint\limits_L xy(dx - dy)$; L: $x = \sqrt{y}$; $x = 0$; $y = 4$.

25) $\oint\limits_L ydx - 3xdy$; L: $y = e^{2x}$; $x = 0$; $y = e$.

26) $\oint\limits_L 2ydx + x^2dy$; L: $y = -x^2$; $y = x^2$; $x = 1$.

27) $\oint\limits_L 2xydx - x^2dy$; L: $y = x^3$; $x = 0$; $y = 1$.

28) $\oint\limits_L xdx + e^xdy$; L: $y = -x$; $y = x$; $x =2$.

29) $\oint\limits_L y^3dx - xydy$; L: $y = x$; $x = 0$; $y = 2$.

30) $\oint\limits_L y^2dx + xdy$; L: $x = \sqrt{-y}$; $x = 0$; $y = -1$.

Задание 7

Проверить, является ли заданное выражение полным дифференциалом некоторой функции U(x, y). В случае положительного ответа найти U(x, y) с помощью криволинейного интеграла.

1) $\left(\frac{1}{x+y} + 2\right)dx + \left(\frac{1}{x+y} - 3\right)dy$.

2) $(x + y\sin^2 y)dx + (1 + x\sin^2 y + xy\sin 2y)dy$.

3) $\frac{1-2y}{x^2y}dx + \frac{1-x}{xy^2}dy$.

4) $\left(e^{-x}-\dfrac{2}{yx^3}\right)dx+\left(\sin 3y-\dfrac{1}{x^2y^2}\right)dy$.

5) $\left(2xy-\dfrac{1}{x^2}\right)dx+\left(x^2-\dfrac{2}{y^3}\right)dy$.

6) $\left(\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{\cos x}{y-1}\right)dx+\dfrac{1-\sin x}{(y-1)^2}dy$.

7) $\left(\ln y+\dfrac{y}{x}-x\right)dx+\left(\ln x+\dfrac{x}{y}+1\right)dy$.

8) $\left(2\cos 2x\cos 3y-\dfrac{1}{x}\right)dx+\left(\dfrac{2}{y}-3\sin 2x\sin 3y\right)dy$.

9) $\left(\dfrac{2}{x^2}+\cos^2 y\right)dx+(y-x\sin 2y)dy$.

10) $\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y}\right)dx+\dfrac{1-x}{y^2}dy$.

11) $(\sin^2 y-y\sin 2x)dx+(x\sin 2y+\cos^2 x+1)dy$.

12) $\left(\dfrac{y}{x}+\ln y+2x\right)dx+\left(\ln x+\dfrac{x}{y}+1\right)dy$.

13) $\left(\dfrac{1}{y-1}-\dfrac{y}{(x-1)^2}-1\right)dx+\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{x}{(y-1)^2}+2y\right)dy$.

14) $\left(\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}+x^2\right)dx+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}+y\right)dy$.

15) $\left(\dfrac{y}{1+x^2y^2}-1\right)dx+\left(\dfrac{x}{1+x^2y^2}-10\right)dy$.

16) $\dfrac{1-y}{x^2y}dx+\dfrac{1-2x}{y^2x}dy$.

17) $\left(y^2e^{xy^2}+3\right)dx+\left(2xye^{xy^2}-1\right)dy$.

18) $\left(\dfrac{y^2}{(x+y)^2}-\dfrac{1}{x}\right)dx+\left(\dfrac{x^2}{(x+y)^2}+\dfrac{1}{y}\right)dy$.

19) $\left(x-\frac{y}{x^2+y^2}\right)dx+\left(\frac{x}{x^2+y^2}-y\right)dy$.

20) $\left(\sin x+\frac{\cos x\cos y}{\sin^2 x}\right)dx+\left(\frac{\sin y}{\sin x}-\cos y\right)dy$.

21) $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-4y}}-\frac{2y}{x^3}\right)dx+\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{\sqrt{x^2-4y}}\right)dy$.

22) $\left(2\ln y\cos 2x+y^2e^{xy^2}\right)dx+\left(\frac{\sin 2x}{y}+2xye^{xy^2}\right)dy$.

23) $\left(3x^2\sin 2y-\frac{6}{(2x+3y)^2}\right)dx+\left(2x^3\cos 2y-\frac{9}{(2x+3y)^2}\right)dy$.

24) $\left(\frac{2x}{y^3}-\frac{y}{x}\right)dx-\left(\ln x+\frac{3x^2}{y^4}\right)dy$.

25) $\left(\frac{y}{x^2+y^2}+2xy^3\right)dx+\left(3x^2y^2-\frac{x}{x^2+y^2}\right)dy$.

26) $\left(e^{y^2}+\frac{x}{x^2+2y}\right)dx+\left(2xye^{y^2}+\frac{y}{x^2+2y}\right)dy$.

27) $\left(\frac{2xy}{x^2-3}-\frac{\sin x}{y+2}\right)dx+\left(\ln\left(x^2-3\right)-\frac{\cos x}{(y+2)^2}\right)dy$.

28) $\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}+\frac{y^2}{x^2}\right)dx+\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}-\frac{2y}{x}\right)dy$.

29) $\left(\frac{y^2}{x}+2x\ln y+2xy\right)dx+\left(2y\ln x+\frac{x^2}{y}+x^2\right)dy$.

30) $\left(y\sin 2x+2x\cos^2 y-3\right)dx+\left(\sin^2 x-x^2\sin 2y+1\right)dy$.

Задание 8

1) Найти момент инерции однородной пирамиды относительно оси Oz, если её вершины находятся в точках O(0; 0; 0), A(a; a; 0), B(0; a; 0) и

$C(0; 0; a)$, где $a > 0$.

2) Найти момент инерции относительно оси Oy однородного цилиндра $x^2 + y^2 \le R^2$, $0 \le z \le H$.
3) Найти момент инерции относительно оси Ox однородного тела, ограниченного поверхностями $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; $x^2 + y^2 = R^2$ и $z = 0$.
4) Найти центр тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$; $x^2 + y^2 = R^2$ и $z = 0$.
5) Найти массу пирамиды с вершинами в точках (0; 0; 0); (1; 0; 0); (0; 1; 0) и (0; 0; 1), если плотность в точке (x; y; z) равна $(x + y + z + 1)^{-3}$.
6) Найти массу тела, ограниченного поверхностями $z = 0$; $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $x^2 + y^2 = R^2$, если плотность в каждой его точке численно равна расстоянию от этой точки до оси Oz.
7) Найти центр тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$ и $z = 4$.
8) Найти центр тяжести половины однородного шара $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$, расположенной над плоскостью xOy.
9)* Найти момент инерции однородного конуса относительно оси Oy, если его вершина находится в начале координат, высота конуса равна радиусу основания R и ось его направлена по оси Oz.
10)* Найти момент инерции однородного тела, ограниченного параболоидом вращения $x^2 + y^2 = 2pz$ и плоскостью $z = H$, относительно оси Oz.
11) Найти массу пирамиды, ограниченной координатными плоскостями и плоскостью $3x + 2y + 3z = 6$, если плотность в каждой её точке равна абсциссе этой точки.
12) Найти центр тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$; $x = 2$; $y = 4$ и $x + y + z = 8$.
13) Найти массу тела, ограниченного поверхностями $z = 0$; $y = 0$; $y = x$; $x = \sqrt{4 - z}$, если плотность в каждой его точке равна ординате этой точки.
14) Найти момент инерции однородного шара $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$ массы M

относительно оси Oz.

15)* Найти центр тяжести однородного тела, ограниченного конусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$ и плотностью z = 2.

16) Найти массу тела, ограниченного координатными плоскостями и плоскостью $x+y+z=1$, если плотность в каждой его точке численно равна произведению координат этой точки.

17) Найти момент инерции относительно оси Oz тела, ограниченного поверхностями z = 0; y = 0; y = 2x; $x=\sqrt{4-z}$, если плотность в каждой его точке численно равна абсциссе этой точки.

18) Найти момент инерции однородной прямой треугольной призмы массы M относительно её бокового ребра, если все рёбра равны a = 2.

19) Найти центр тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями z = 0 и $z=4-x^2-y^2$.

20) Найти центр тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями z = 0; y = 0; y = x; x = 1; $x=\sqrt{4-z}$.

21) Найти центр тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $z=\frac{1}{2}y^2$; x = 0; y = 0; z = 0; $2x+3y-12=0$.

22) Найти центр тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $y=\sqrt{x}$; $y=2\sqrt{x}$; z = 0; x + z = 6.

23) Найти момент инерции относительно оси Oz тела, ограниченного поверхностями $z=4-x^2-y^2$; z = 0, если плотность в каждой его точке численно равна расстоянию этой точки от оси Oz.

24) Найти массу тела, ограниченного поверхностями z = 0; z = 2 – x; y = x; y = –x, если плотность в каждой его точке (x; y; z) численно равна $(x+z)^{-2}$.

25) Найти центр тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями z = 0; $z=\frac{H}{R}\sqrt{x^2+y^2}$ и $x^2+y^2=R^2$.

26) Найти массу тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=8$ и $z=\sqrt{x^2+y^2}$, если плотность в каждой его точке численно равна ап-

пликате этой точки.

27) Найти момент инерции относительно оси Oz однородного тела, ограниченного поверхностями $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$; $x + y = 3$; $y + z = 2$.

28) Найти момент инерции относительно оси Oy однородного тела, ограниченного поверхностями $z = 0$; $y = 0$; $z = x$ и $x + y = 1$.

29) Найти момент инерции относительно оси Ox однородного тела, ограниченного поверхностями $z = 0$; $y = 0$; $z = x^2$; $x + y = 2$.

30) Найти массу тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$ и $z = 8 - x^2 - y^2$, если плотность в каждой его точке численно равна расстоянию этой точки от оси Oz.