

# НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ И ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

## Индивидуальное задание

### Теоретические вопросы

1. Понятие первообразной функции. Теоремы о первообразных.
2. Неопределенный интеграл, его свойства.
3. Таблица неопределенных интегралов.
4. Замена переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле.
5. Разложение дробной рациональной функции на простейшие дроби.
6. Интегрирование простейших дробей. Интегрирование рациональных функций.
7. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции.
8. Интегрирование иррациональных выражений.
9. Понятие определенного интеграла, его геометрический смысл.
10. Основные свойства определенного интеграла.
11. Теорема о среднем.
12. Производная определенного интеграла по верхнему пределу. Формула Ньютона – Лейбница.
13. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.
14. Интегрирование биномиальных дифференциалов.
15. Вычисление площадей плоских фигур.
16. Определение и вычисление длины кривой, дифференциал длины дуги кривой.

### Теоретические упражнения

1. Считая, что функция  $\frac{\sin x}{x}$  равна 1 при  $x = 0$ , доказать, что она интегрируема на отрезке  $[0, 1]$ .
2. Какой из интегралов больше:

$$\int_0^1 \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 dx \text{ или } \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx ?$$

3. Пусть  $f(t)$  – непрерывная функция, а функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  дифференцируемые. Доказать, что

$$\frac{d}{dx} \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt = f[\psi(x)]\psi'(x) - f[\varphi(x)]\varphi'(x).$$

4. Найти  $\frac{d}{dx} \int_{\sqrt{x}}^{x^2} e^{t^2} dt$ .

5. Найти точки экстремума функции

$$f(x) = \int_0^x (t-1)(t-2)e^{-t^2} dt.$$

6. Пусть  $f(x)$  – непрерывная периодическая функция с периодом  $T$ . Доказать, что

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx \quad \forall a.$$

7. Доказать, что если  $f(x)$  – четная функция, то

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_0^{+a} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} f(x) dx.$$

8. Доказать, что для нечетной функции  $f(x)$  справедливы равенства

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = -\int_0^{+a} f(x) dx \quad \text{и} \quad \int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

Чему равен интеграл  $\int_{-1}^{+1} \sin^2 x \ln \frac{2+x}{2-x} dx$ ?

9. При каком условии, связывающем коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$  интеграл  $\int \frac{ax^2 + bx + c}{x^3(x-1)^2} dx$  является рациональной функцией?

10. При каких целых значениях  $n$  интеграл  $\int \sqrt{1+x^4} dx$  выражается элементарными функциями.

## Индивидуальные задания

### Решение типового варианта

**Задача 1.** Найти неопределенные интегралы.

$$\begin{aligned}\int \ln(4x^2 + 1) dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln(4x^2 + 1) \quad dv = dx \\ du = \frac{8x}{4x^2 + 1} \quad v = x \end{array} \right| = x \ln(4x^2 + 1) - 8 \int \frac{x^2}{4x^2 + 1} dx = \\ &= x \ln(4x^2 + 1) - 2 \int \left( 1 - \frac{1}{4x^2 + 1} \right) dx = x \ln(4x^2 + 1) - 2 \left( x - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2x \right) + C = \\ &= x \ln(4x^2 + 1) + \operatorname{arctg} 2x - 2x + C.\end{aligned}$$

**Задача 2.** Вычислить определенные интегралы.

$$\begin{aligned}\int_{-2}^0 (x^2 - 4) \cos 3x dx &= \left| \begin{array}{l} u = x^2 - 4 \quad dv = \cos 3x dx \\ du = 2x dx \quad v = \frac{1}{3} \sin 3x \end{array} \right| = \frac{1}{3} (x^2 - 4) \sin 3x \Big|_{-2}^0 - \\ &- \frac{2}{3} \int_{-2}^0 x \sin 3x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \quad dv = \sin 3x dx \\ du = dx \quad v = -\frac{1}{3} \cos 3x \end{array} \right| = -\frac{2}{3} \left( -\frac{1}{3} x \cos 3x \Big|_{-2}^0 + \frac{1}{3} \int_{-2}^0 \cos 3x dx \right) = \\ &= -\frac{2}{3} \left( -\frac{2}{3} \cos 6 + \frac{1}{9} \sin 3x \Big|_{-2}^0 \right) = \frac{4}{9} \cos 6 - \frac{2}{27} \sin 6.\end{aligned}$$

**Задача 3.** Найти неопределенные интегралы.

$$\int \frac{1 - \cos x}{(x - \sin x)^2} dx = \left| \begin{array}{l} x - \sin x = t \\ (1 - \cos x) dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2} = -t^{-1} + C = -\frac{1}{x - \sin x} + C.$$

**Задача 4.** Вычислить определенные интегралы.

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} \frac{8x - \operatorname{arctg} 2x}{1 + 4x^2} dx &= \int_0^{1/2} \frac{8x}{1 + 4x^2} dx - \int_0^{1/2} \operatorname{arctg} 2x d(\operatorname{arctg} x) = \\ &= \ln |1 + 4x^2| \Big|_0^{1/2} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2 2x \Big|_0^{1/2} = \ln 2 - 0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{16} + 0 = \ln 2 - \frac{\pi^2}{32}.\end{aligned}$$

**Задача 5.** Найти неопределенные интегралы.

$$\int \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{(x-4)(x-3)(x-2)} dx.$$

Разделим дробь

$$\begin{array}{l} x^3 - 3x^2 - 12 \\ x^3 - 9x^2 + 26x - 24 \\ \hline 6x^2 - 26x + 12 \end{array} \Bigg| \frac{x^3 - 9x^2 + 26x - 24}{1}$$

$$\int \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{(x-4)(x-3)(x-2)} dx = \int \left( 1 + \frac{6x^2 - 26x + 12}{(x-4)(x-3)(x-2)} \right) dx$$

Разложим дробь  $\frac{6x^2 - 26x + 12}{(x-4)(x-3)(x-2)}$  на простейшие

$$\frac{6x^2 - 26x + 12}{(x-4)(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x-2} = \frac{A(x-3)(x-2) + B(x-4)(x-2) + C(x-4)(x-3)}{(x-4)(x-3)(x-2)}$$

$$A(x+2)^3 + B(x+1)(x+2)^2 + C(x+1)(x+2) + D(x+1) = x^3 + 6x^2 + 13x + 9.$$

При  $x = 4$ ,  $2A = 4 \Rightarrow A = 2$ ;

При  $x = 3$ ,  $-B = -12 \Rightarrow B = 12$ ;

При  $x = 2$ ,  $2C = -16 \Rightarrow C = -8$ ;

$$\text{Отсюда } \int \left( 1 + \frac{6x^2 - 26x + 12}{(x-4)(x-3)(x-2)} \right) dx = \int \left( 1 + \frac{2}{x-4} + \frac{12}{x-3} - \frac{8}{x-2} \right) dx =$$

$$= x + 2 \ln|x-4| + 12 \ln|x-3| - 8 \ln|x-2| + C.$$

**Задача 6.** Найти неопределенные интегралы.

$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 9}{(x+1)(x+2)^3} dx.$$

Разложим дробь  $\frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 9}{(x+1)(x+2)^3}$  на простейшие

$$\frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 9}{(x+1)(x+2)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{D}{(x+2)^3} =$$

$$= \frac{A(x+2)^3 + B(x+1)(x+2)^2 + C(x+1)(x+2) + D(x+1)}{(x+1)}$$

$$A(x-3)(x-2) + B(x-4)(x-2) + C(x-4)(x-3) = 6x^2 - 26x + 12.$$

При  $x = -1$ ,  $A = 1$ ;

При  $x = -2$ ,  $-D = -1 \Rightarrow D = 1$ ;

Приравнявая коэффициенты при  $x^3$ ,  $A + B = 1 \Rightarrow B = 0$ ;

Приравнявая коэффициенты при  $x^0$ ,  $8A + 4B + 2C + D = 9 \Rightarrow C = 0$ ;

$$\text{Отсюда } \int \left( \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+2)^3} \right) dx = \ln|x+1| - \frac{1}{2(x+2)^2} + C.$$

**Задача 7.** Найти неопределенные интегралы.

$$\int \frac{x^3 + 5x^2 + 12x + 4}{(x+2)^2(x^2+4)} dx.$$

Разложим дробь  $\frac{x^3 + 5x^2 + 12x + 4}{(x+2)^2(x^2+4)}$  на простейшие

$$\begin{aligned} \frac{x^3 + 5x^2 + 12x + 4}{(x+2)^2(x^2+4)} &= \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4} = \\ &= \frac{A(x+2)(x^2+4) + B(x^2+4) + (Cx+D)(x+2)^2}{(x+2)^2(x^2+4)}. \end{aligned}$$

$$A(x+2)(x^2+4) + B(x^2+4) + (Cx+D)(x^2+4x+4) = x^3 + 5x^2 + 12x + 4.$$

При  $x = -2$ ,  $8B = -8 \Rightarrow B = -1$ ;

Приравнивая коэффициенты при  $x^3$ ,  $A + C = 1 \Rightarrow A = 0$ ;

Приравнивая коэффициенты при  $x$ ,  $4A + 4C + 4D = 12 \Rightarrow C = 1$ ;

Приравнивая коэффициенты при  $x^0$ ,  $8A + 4B + 4D = 4 \Rightarrow D = 2$ ;

$$\begin{aligned} \text{Отсюда } \int \left( -\frac{1}{(x+2)^2} + \frac{x+2}{x^2+4} \right) dx &= \frac{1}{x+2} + \frac{1}{2} \int \left( \frac{2x}{x^2+4} \right) + 2 \int \frac{dx}{x^2+4} = \\ &= \frac{1}{x+2} + \frac{1}{2} \ln|x^2+4| + \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

**Задача 8.** Вычислить определенные интегралы.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x - \sin x}{(1 + \sin x)^2} dx &= \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{1-t^2 - 2t}{\left(1 + \frac{2t}{1+t^2}\right)^2} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \\ &= \int_0^1 \frac{2(1-2t-t^2)}{(1+t)^4} dt. \end{aligned}$$

Разложим дробь  $\frac{2(1-2t-t^2)}{(1+t)^4}$  на простейшие

$$\begin{aligned} \frac{2-4t-2t^2}{(1+t)^4} &= \frac{A}{1+t} + \frac{B}{(1+t)^2} + \frac{C}{(1+t)^3} + \frac{D}{(1+t)^4} = \\ &= \frac{A(1+t)^3 + B(1+t)^2 + C(1+t) + D}{(1+t)^4}. \end{aligned}$$

$$A(1+t)^3 + B(1+t)^2 + C(1+t) + D = 2 - 4t - 2t^2.$$

При  $t = -1$ ,  $D = 4$ ;

Приравнивая коэффициенты при  $t^3$ ,  $A = 0$ ;

Приравнивая коэффициенты при  $t^2$ ,  $3A + B = -2 \Rightarrow B = -2$ ;

Приравнивая коэффициенты при  $t$ ,  $3A + 2B + C = -4 \Rightarrow C = 0$ ;

$$\text{Отсюда } \int_0^1 \left( \frac{4}{(1+t)^4} - \frac{2}{(1+t)^2} \right) dt = \left( -\frac{4}{3(1+t)^3} + \frac{2}{1+t} \right) \Big|_0^1 = -\frac{4}{3 \cdot 8} + 1 + \frac{4}{3} - 2 = \frac{1}{6}.$$

**Задача 9.** Вычислить определенные интегралы.

$$\int_{\pi/4}^{\arctg 3} \frac{dx}{(3tgx+5)\sin 2x} = \left| \begin{array}{l} tgx = t \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right. \sin 2x = \frac{2t}{1+t^2} \Big| = \int_1^3 \frac{dt}{(3t+5) \frac{2t}{1+t^2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{dt}{t(3t+5)}.$$

$$\frac{1}{t(3t+5)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{3t+5} = \frac{A(3t+5) + Bt}{t(3t+5)},$$

$$A(3t+5) + Bt = 1.$$

$$\text{При } t = 0, A = \frac{1}{5};$$

$$\text{При } t = -\frac{5}{3}, B = -\frac{3}{5};$$

$$\text{Отсюда } \frac{1}{10} \int_1^3 \left( \frac{1}{t} - \frac{3}{3t+5} \right) dt = \frac{1}{10} (\ln|t| - \ln|3t+5|) \Big|_1^3 = \frac{1}{10} (\ln 3 - \ln 14 - 0 + \ln 8) =$$

$$= \frac{1}{10} \ln \frac{24}{14} = \frac{1}{10} \ln \frac{12}{7}.$$

**Задача 10.** Вычислить определенные интегралы.

$$\int_0^{\pi} 2^4 \cos^8 \frac{x}{2} dx = \int_0^{\pi} (1 + \cos x)^4 dx = \int_0^{\pi} (1 + 2 \cos x + \cos^2 x)^2 dx =$$

$$= \int_0^{\pi} (1 + 3 \cos x + 6 \cos^2 x + 4 \cos^3 x + \cos^4 x) dx =$$

$$= \int_0^{\pi} \left( \frac{35}{8} + 3 \cos x + \frac{7}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x \right) dx + 4 \int_0^{\pi} (1 - \sin^2 x) \cos x dx =$$

$$= \left( \frac{35}{8} x + 3 \sin x + \frac{7}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x \right) \Big|_0^{\pi} + 4 \int_0^{\pi} (1 - \sin^2 x) d(\sin x) =$$

$$= \frac{35}{8} \pi + 4 \left( \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{35}{8} \pi.$$

**Задача 11.** Вычислить определенные интегралы.

$$\int_6^9 \sqrt{\frac{9-2x}{2x-21}} dx = \left| \begin{array}{l} \frac{9-2x}{2x-21} = t^2 \\ dx = \frac{12t}{(t^2+1)} dt \end{array} \right| = 12 \int t \frac{t}{(t^2+1)^2} dt = 12 \int \frac{t^2}{(t^2+1)^2} dt =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tga} \\ dt = \frac{da}{\cos^2 a} \end{array} \right| = 12 \int \operatorname{tg}^2 \cos^2 a da = 12 \int \sin^2 a da = 6 \int (1 - \cos 2a) da =$$

$$= 6 \operatorname{arctg} T - 3 \sin(2 \operatorname{arctg} t) = \left( 6 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{9-2x}{2x-21}} - 3 \sin \left( 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{9-2x}{2x-21}} \right) \right) \Big|_6^9 =$$

$$= 6 \operatorname{arctg} \sqrt{3} - 3 \sin(2 \operatorname{arctg} \sqrt{3}) - 6 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 3 \sin(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3}) = 2\pi - 3 \sin \frac{2\pi}{3} -$$

$$- \pi + 3 \sin \frac{\pi}{3} = \pi - 3 \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \frac{\sqrt{3}}{2} = \pi.$$

**Задача 12.** Вычислить определенные интегралы.

$$\int_0^3 \frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}} = \left| \begin{array}{l} x = 3 \operatorname{tg} t \\ dx = \frac{3dt}{\cos^2 t} \end{array} \right| = \int_0^{\pi/4} \frac{3dt}{(9+9 \operatorname{tg}^2 t)^{3/2} \cos^2 t} =$$

$$= \frac{3}{27} \int_0^{\pi/4} \frac{\cos^3 t}{\cos^2 t} dt = \frac{3}{27} \int_0^{\pi/4} \cos t dt = \frac{3}{27} \sin t \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{18}.$$

**Задача 13.** Найти неопределенные интегралы.

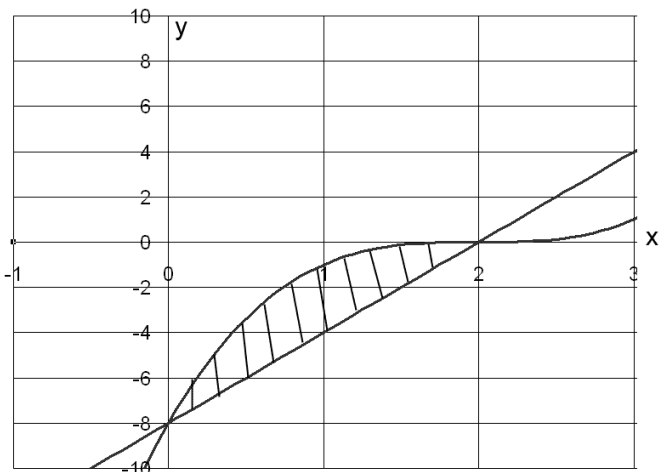
$$\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^2}}{x^6 \sqrt{x^5}} dx = \int x^{-\frac{11}{6}} \sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^2} dx = \left| \begin{array}{l} 1+x^{-\frac{1}{2}} = t^2 \\ dx = -4t(t^2-1)^{-3} dt \end{array} \right| =$$

$$= -4 \int (t^2-1)^{\frac{11}{3}} \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)^2} t(t^2-1)^{-3} dt = -4 \int (t^2-1)^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{\left(\frac{t^2}{t^2-1}\right)^2} dt =$$

$$= -4 \int t^{\frac{7}{3}} dt = -4 \cdot \frac{3}{10} t^{\frac{10}{3}} + C = -\frac{6}{5} \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5} + C.$$

**Задача 14.** Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций.

$$y = (x-2)^3, y = 4x-8.$$

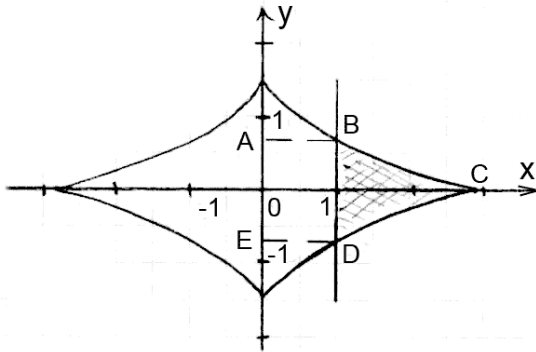


$$S = 2 \int_0^2 (4x - 8 - (x-2)^3) dx = 2 \int_0^2 (4x - 8 - x^3 + 6x^2 - 12x + 8) dx =$$

$$= 2 \int_0^2 (6x^2 - x^3 - 8x) dx = 2 \left( 2x^3 - \frac{1}{4}x^4 - 4x^2 \right) \Big|_0^2 = 4 \cdot 2^3 - \frac{1}{2} \cdot 2^4 - 8 \cdot 2^2 = 8.$$

**Задача 15.** Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными уравнениями.

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t, \\ x = 1 (x \geq 1). \end{cases}$$



$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t) dt.$$

Пределы интегрирования найдем из решения неравенства

$$2\sqrt{2} \cos^3 t \geq 1 \Rightarrow t \in \left[ -\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n \right].$$

$$S = S_{ABCDE} - S_{ABDE} = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{2} \sin^3 t \cdot 6\sqrt{2} \cos^2 t \cdot (-\sin t) dt = 1 \cdot 1 =$$

$$12 \int \sin^4 t \cos^2 t dt - 1 = 12 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{8} (\cos 4t - 4 \cos 2t + 3) \cdot \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) dt - 1 =$$

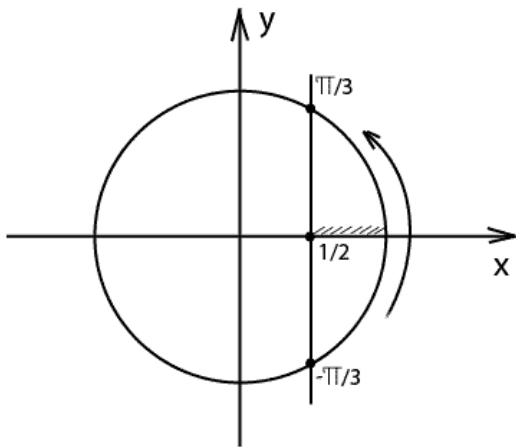
$$= \frac{12}{16} \int_{\pi/4}^{-\pi/4} (-\cos 4t - \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{2} \cos 6t + 1) dt - 1 =$$

$$= \frac{12}{16} \left( -\frac{1}{4} \sin 4t - \frac{1}{4} \sin 2t + \frac{1}{12} \sin 6t + t \right) \Big|_{\pi/4}^{-\pi/4} - 1 = 1,7.$$

**Задача 16.** Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными уравнениями в полярных координатах.

$$r = 4 \cos \varphi, r = 2 (r \geq 2).$$





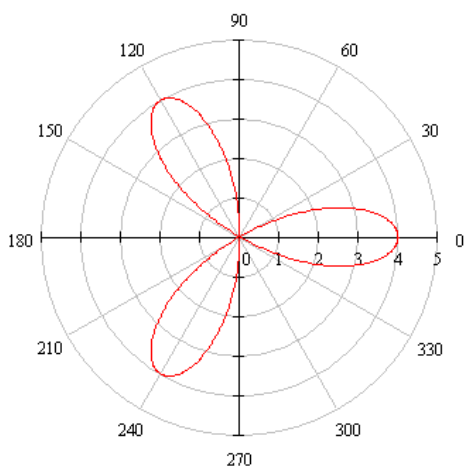
$$4 \cos 3\varphi \geq 2,$$

$$\cos 3\varphi \geq \frac{1}{2}.$$

Отсюда

$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq 3\varphi \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$-\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z},$$



$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi) d\varphi,$$

$$S = 6 \cdot \frac{1}{2} \int_{-\pi/3}^0 16 \cos^2 3\varphi d\varphi = 24 \int_{-\pi/3}^0 (1 + 6 \cos \varphi) d\varphi = 24 \left( \varphi + \frac{1}{6} \sin 6\varphi \right) \Big|_{-\pi/3}^0 =$$

$$= 24 \left( 0 + 0 + \frac{\pi}{3} + \frac{1}{6} \cdot 0 \right) = 8\pi.$$

**Задача 17.** Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями в прямоугольной системе координат.

$$y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x, 0 \leq x \leq \frac{8}{9}.$$

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1-x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$l = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2} dx,$$

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{8/9} \sqrt{1 + \frac{(x+1)^2}{1-x^2}} dx = \int_0^{8/9} \sqrt{\frac{1-x^2+x^2+2x+1}{1-x^2}} dx = \int_0^{8/9} \sqrt{\frac{2+2x}{1-x^2}} dx = \\ &= \int_0^{8/9} \sqrt{\frac{2}{1-x}} dx = \sqrt{2} \int_0^{8/9} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \int_0^{8/9} \sqrt{\frac{2}{1-x}} \Big|_0^{8/9} = -2(\sqrt{2/9} - \sqrt{2}) = -2\sqrt{2/9} + 2\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

**Задача 18.** Вычислить длины дуг кривых, заданных параметрическими уравнениями.

$$\begin{cases} x = 4(\cos t + t \sin t), \\ y = 4(\sin t - t \cos t), \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq 2.$$

$$x' = 4(-\sin t + \sin t + t \cos t) = 4t \cos t,$$

$$y' = 4(\cos t - \cos t + t \sin t) = 4t \sin t.$$

$$l = \int_a^b \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt,$$

$$l = \int_0^2 \sqrt{16t^2 \cos^2 t + 16t^2 \sin^2 t} dt = \int_0^2 4t dt = 2t^2 \Big|_0^2 = 2 \cdot 2^2 = 8.$$

**Задача 19.** Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями в полярных координатах.

$$\rho = 2e^{4\varphi/3},$$

$$-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$$

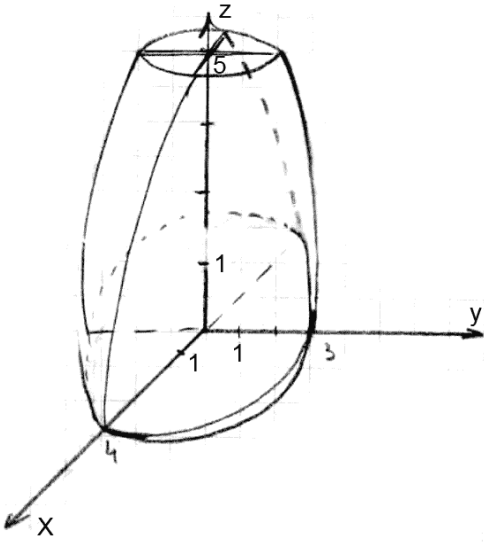
$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi;$$

$$\rho' = \frac{8}{3} e^{4\varphi/3}.$$

$$\begin{aligned} L &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{4e^{8\varphi/3} + \frac{64}{9} e^{8\varphi/3}} d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\frac{100}{9} e^{8\varphi/3}} d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{4\varphi/3} d\varphi = \\ &= \frac{10}{3} \cdot \frac{3}{4} e^{4\varphi/3} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{5}{2} \left( e^{\frac{2\pi}{3}} - e^{-\frac{2\pi}{3}} \right). \end{aligned}$$

**Задача 20.** Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями.

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{64} = 1, z = 4, z = 0.$$



Поперечным сечением является эллипс.

$$\frac{x^2}{16\left(1 - \frac{z^2}{64}\right)} + \frac{y^2}{9\left(1 - \frac{z^2}{64}\right)} = 1.$$

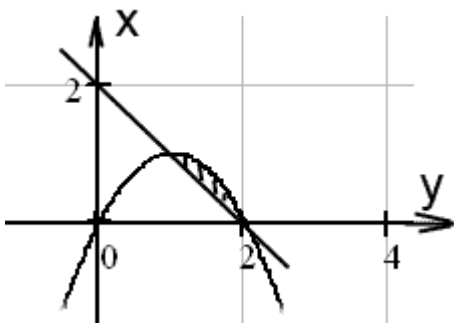
Площадь эллипса  $S(z) = \pi ab = 12\pi\left(1 - \frac{z^2}{64}\right)$ .

Объем

$$V = 12\pi \int \left(1 - \frac{z^2}{64}\right) dz = 12\pi \left(z^2 - \frac{z^3}{192}\right) \Big|_0^5 = 12\pi \left(5 - \frac{125}{192}\right) = 52\pi.$$

**Задача 21.** Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций, относительно оси вращения  $Ox$ .

$$y = 2x - x^2, y = -x + 2.$$



$$V = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^2 (2x - x^2 + x - 2)^2 dx = \pi \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2)^2 dx = \\ &= \pi \int_1^2 (x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4) dx = \pi \left( \frac{1}{5} x^5 - \frac{3}{2} x^4 + \frac{13}{3} x^3 - 6x^2 + 4x \right) \Big|_1^2 = \\ &= \pi \left( \frac{32}{5} - 24 + \frac{104}{3} - 24 + 8 - \frac{1}{5} + \frac{3}{2} - \frac{13}{3} + 6 - 4 \right) = \frac{\pi}{30}. \end{aligned}$$

**Задача 22.** Варианты 1-10. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобокой трапеции (рис.4.1). Плотность воды,  $\rho = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ , ускорение свободного падения положить равным  $g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ .

Указание. Давление на глубине  $x$  равно  $\rho g x$ .

$$a = 6,6 \text{ м}, b = 10,8 \text{ м}, h = 4,0 \text{ м}.$$

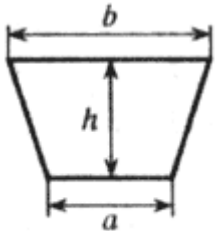


Рис. 4.1

$$dF = \rho g h \cdot \frac{a+b}{2} h dh.$$

$$F = \rho g \frac{a+b}{2} \int_0^4 h^2 dh = 1000 \cdot 10 \cdot \frac{6,6+10,8}{2} \cdot \int_0^4 h^2 dh = 87000 \cdot \frac{h^3}{3} \Big|_0^4 = 1856000 \text{ Н}.$$

$$F = 18,56 \text{ кН}.$$

## Задания

**Задача 1.** Вычислить неопределенные интегралы.

1.1.  $\int (4-3x)e^{-3x} dx.$

1.2.  $\int \arctg \sqrt{4x-1} dx.$

1.3.  $\int (3x+4)e^{3x} dx.$

1.4.  $\int (4x-2)\cos 2x dx.$

1.5.  $\int (4-16x)\sin 4x dx.$

1.6.  $\int (5x-2)e^{3x} dx.$

1.7.  $\int (1-6x)e^{2x} dx.$

1.8.  $\int \ln(x^2+4) dx.$

1.9.  $\int \ln(4x^2+1) dx.$

1.10.  $\int (2-4x)\sin 2x dx.$

1.11.  $\int \operatorname{arctg} \sqrt{6x-1} dx.$

1.12.  $\int e^{-2x} (4x-3) dx.$

1.13.  $\int e^{-3x} (2-9x) dx.$

1.14.  $\int \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1} dx.$

1.15.  $\int \operatorname{arctg} \sqrt{3x-1} dx.$

1.16.  $\int \operatorname{arctg} \sqrt{5x-1} dx.$

1.17.  $\int (5x+6) \cos 2x dx.$

1.18.  $\int (3x-2) \cos 5x dx.$

1.19.  $\int (x\sqrt{2}-3) \cos 2x dx.$

1.20.  $\int (4x+7) \cos 3x dx.$

1.21.  $\int (2x-5) \cos 4x dx.$

1.22.  $\int (8-3x) \cos 5x dx.$

1.23.  $\int (x+5) \sin 3x dx.$

1.24.  $\int (2-3x) \sin 2x dx.$

1.25.  $\int (4x+3) \sin 5x dx.$

1.26.  $\int (7x-10) \sin 4x dx.$

1.27.  $\int (\sqrt{2}-8x) \sin 3x dx.$

1.28.  $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}.$

1.29.  $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}.$

1.30.  $\int x \sin^2 x dx.$

1.31.  $\int \frac{x \cos x dx}{\sin^3 x}.$

**Задача 2.** Вычислить определенные интегралы.

2.1.  $\int_{-2}^0 (x^2 + 5x + 6) \cos 2x dx.$

2.2.  $\int_{-2}^0 (x^2 - 4) \cos 3x dx.$

2.3.  $\int_{-1}^0 (x^2 + 4x + 3) \cos x dx.$

2.4.  $\int_{-2}^0 (x+2)^2 \cos 3x dx.$

2.5.  $\int_{-4}^0 (x^2 + 7x + 12) \cos x dx.$

2.6.  $\int_0^{\pi} (2x^2 + 4x + 7) \cos 2x dx.$

2.7.  $\int_0^{\pi} (9x^2 + 9x + 11) \cos 3x dx.$

2.8.  $\int_0^{\pi} (8x^2 + 16x + 17) \cos 4x dx.$

2.9.  $\int_0^{2\pi} (3x^2 + 5) \cos 2x dx.$

2.10.  $\int_0^{2\pi} (2x^2 - 15) \cos 3x dx.$

$$2.11. \int_0^{2\pi} (3 - 7x^2) \cos 2x dx.$$

$$2.12. \int_0^{2\pi} (1 - 8x^2) \cos 4x dx.$$

$$2.13. \int_{-1}^0 (x^2 + 2x + 1) \sin 3x dx.$$

$$2.14. \int_0^3 (x^2 - 3x) \sin 2x dx.$$

$$2.15. \int_0^{\pi} (x^2 - 3x + 2) \sin x dx.$$

$$2.16. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 - 5x + 6) \sin 3x dx.$$

$$2.17. \int_{-3}^0 (x^2 + 6x + 9) \sin 2x dx.$$

$$2.18. \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x^2 + 17,5) \sin 2x dx.$$

$$2.19. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 5x^2) \sin x dx.$$

$$2.20. \int_{\frac{\pi}{4}}^3 (3x - x^2) \sin 2x dx.$$

$$2.21. \int_1^2 x \ln^2 x dx.$$

$$2.22. \int_1^{e^2} \frac{\ln^2 x dx}{\sqrt{x}}.$$

$$2.23. \int_1^8 \frac{\ln^2 x dx}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

$$2.24. \int_0^1 (x+1) \ln^2 (x+1) dx.$$

$$2.25. \int_2^3 (x-1)^3 \ln^2 (x-1) dx.$$

$$2.26. \int_{-1}^0 (x+2)^3 \ln^2 (x+2) dx.$$

$$2.27. \int_0^2 (x+1)^2 \ln^2 (x+1) dx.$$

$$2.28. \int_1^e \sqrt{x} \ln^2 x dx.$$

$$2.29. \int_{-1}^1 x^2 e^{\frac{x}{2}} dx.$$

$$2.30. \int_0^1 x^2 e^{3x} dx.$$

$$2.31. \int_{-2}^0 (x^2 + 2) e^{\frac{x}{2}} dx.$$

**Задача 3.** Найти неопределенные интегралы.

$$3.1. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}.$$

$$3.2. \int \frac{1+\ln x}{x} dx.$$

$$3.3. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

$$3.4. \int \frac{x^2 + \ln x^2}{x} dx.$$

$$3.5. \int \frac{x dx}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}.$$

$$3.6. \int \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$3.7. \int \operatorname{tg} x \ln \cos x dx.$$

$$3.8. \int \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)} dx.$$

$$3.9. \int \frac{x^3}{(x^2+1)^2} dx.$$

$$3.10. \int \frac{1 - \cos x}{(x - \sin x)^2} dx.$$

$$3.11. \int \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^5} dx.$$

$$3.12. \int \frac{x \cos x + \sin x}{(x \sin x)^2} dx.$$

$$3.13. \int \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} dx.$$

$$3.14. \int \frac{x dx}{\sqrt{x^4 - x^2 - 1}}.$$

$$3.15. \int \frac{x dx}{\sqrt[3]{x-1}}.$$

$$3.16. \int \frac{1 + \ln(x-1)}{x-1} dx.$$

$$3.17. \int \frac{(x^2+1) dx}{(x^3+3x+1)^5}.$$

$$3.18. \int \frac{4 \operatorname{arctg} x - x}{1+x^2} dx.$$

$$3.19. \int \frac{x^3}{x^2+4} dx.$$

$$3.20. \int \frac{x + \cos x}{x^2 + 2 \sin x} dx.$$

$$3.21. \int \frac{2 \cos x + 3 \sin x}{(2 \sin x - 3 \cos x)^3} dx.$$

$$3.22. \int \frac{8x - \operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2} dx.$$

$$3.23. \int \frac{1/(2\sqrt{x}) + 1}{(\sqrt{x} + x)^2} dx.$$

$$3.24. \int \frac{x}{x^4+1} dx.$$

$$3.25. \int \frac{x + 1/x}{\sqrt{x^2+1}} dx.$$

$$3.26. \int \frac{x - 1/x}{\sqrt{x^2+1}} dx.$$

$$3.27. \int \frac{\operatorname{arctg} x + x}{1+x^2} dx.$$

$$3.28. \int \frac{x - (\operatorname{arctg} x)^4}{1+x^2} dx.$$

$$3.29. \int \frac{x^3}{x^2 + 1} dx.$$

$$3.30. \int \frac{(\arcsin x)^2 + 1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$3.31. \int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} dx.$$

**Задача 4.** Вычислить определенные интегралы.

$$4.1. \int_{e+1}^{e^2+1} \frac{1 + \ln(x-1)}{x-1} dx.$$

$$4.2. \int_0^1 \frac{(x^2 + 1) dx}{(x^3 + 3x + 1)^2}.$$

$$4.3. \int_0^1 \frac{4 \operatorname{arctg} x - x}{1 + x^2} dx.$$

$$4.4. \int_0^2 \frac{x^3 dx}{x^2 + 4}.$$

$$4.5. \int_{\pi}^{2\pi} \frac{x + \cos x}{x^2 + 2 \sin x} dx.$$

$$4.6. \int_0^{\pi/4} \frac{2 \cos x + 3 \sin x}{(2 \sin x - 3 \cos x)^3} dx.$$

$$4.7. \int_0^{1/2} \frac{8x - \operatorname{arctg} 2x}{1 + 4x^2} dx.$$

$$4.8. \int_1^4 \frac{1 / (2\sqrt{x}) + 1}{(\sqrt{x} + x)^2} dx.$$

$$4.9. \int_0^1 \frac{x dx}{x^4 + 1}.$$

$$4.10. \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x + 1/x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

$$4.11. \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x - 1/x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

$$4.12. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x + x}{1 + x^2} dx.$$

$$4.13. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x - (\operatorname{arctg} x)^4}{1 + x^2} dx.$$

$$4.14. \int_0^1 \frac{x^3}{x^2 + 1} dx.$$

$$4.15. \int_0^{\sin^{-1} 1} \frac{(\arcsin x)^2 + 1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$4.16. \int_1^3 \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} dx.$$

$$4.17. \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$4.18. \int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx.$$

$$4.19. \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$4.20. \int_1^e \frac{x^2 + \ln x^2}{x} dx.$$



$$4.21. \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}.$$

$$4.22. \int_0^1 \frac{x^3 dx}{(x^2 + 1)^2}.$$

$$4.23. \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \ln \cos x dx.$$

$$4.24. \int_{-1}^0 \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)} dx.$$

$$4.25. \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$4.26. \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1 - \cos x}{(x - \sin x)^2} dx.$$

$$4.27. \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^5} dx.$$

$$4.28. \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x \cos x + \sin x}{(x \sin x)^2} dx.$$

$$4.29. \int_0^1 \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} dx.$$

$$4.30. \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{x^4 - x^2 - 1}}.$$

$$4.31. \int_2^9 \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-1}}.$$

**Задача 5.** Найти неопределенные интегралы.

$$5.1. \int \frac{x^3 + 1}{x^2 - x} dx.$$

$$5.2. \int \frac{3x^3 + 1}{x^2 - 1} dx.$$

$$5.3. \int \frac{x^3 - 17}{x^2 - 4x + 3} dx.$$

$$5.4. \int \frac{2x^3 + 5}{x^2 - x - 2} dx.$$

$$5.5. \int \frac{2x^3 - 1}{x^2 + x - 6} dx.$$

$$5.6. \int \frac{3x^3 + 25}{x^2 + 3x + 2} dx.$$

$$5.7. \int \frac{x^3 + 2x^2 + 3}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx.$$

$$5.8. \int \frac{3x^3 + 2x^2 + 1}{(x+2)(x-2)(x-1)} dx.$$

$$5.9. \int \frac{x^3}{(x-1)(x+1)(x+2)} dx.$$

$$5.10. \int \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{(x-4)(x-3)(x-2)} dx.$$

$$5.11. \int \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{(x-4)(x-3)x} dx.$$

$$5.12. \int \frac{4x^3 + x^2 + 2}{x(x-1)(x-2)} dx.$$

$$5.13. \int \frac{3x^3 - 2}{x^3 - x} dx.$$

$$5.14. \int \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{(x-4)(x-2)x} dx.$$

$$5.15. \int \frac{x^5 - x^3 + 1}{x^2 - x} dx.$$

$$5.16. \int \frac{x^5 + 3x^3 - 1}{x^2 + x} dx.$$

$$5.17. \int \frac{2x^5 - 8x^3 + 3}{x^2 - 2x} dx.$$

$$5.18. \int \frac{3x^5 - 12x^3 - 7}{x^2 + 2x} dx.$$

$$5.19. \int \frac{-x^5 + 9x^3 + 4}{x^2 + 3x} dx.$$

$$5.20. \int \frac{-x^5 + 25x^3 + 1}{x^2 + 5x} dx.$$

$$5.21. \int \frac{x^3 - 5x^2 + 5x + 23}{(x-1)(x+1)(x-5)} dx.$$

$$5.22. \int \frac{x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x + 9}{(x+3)(x-1)x} dx.$$

$$5.23. \int \frac{2x^4 - 5x^2 - 8x - 8}{x(x-2)(x+2)} dx.$$

$$5.24. \int \frac{4x^4 + 2x^2 - x - 3}{x(x-1)(x+1)} dx.$$

$$5.25. \int \frac{3x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2}{x(x-1)(x+2)} dx.$$

$$5.26. \int \frac{2x^4 + 2x^3 - 41x^2 + 20}{x(x-4)(x+5)} dx.$$

$$5.27. \int \frac{x^5 - x^4 - 6x^3 + 13x + 6}{x(x-3)(x+2)} dx.$$

$$5.28. \int \frac{3x^3 - x^2 - 12x - 2}{x(x+1)(x-2)} dx.$$

$$5.29. \int \frac{2x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x - 9}{x(x-1)(x+3)} dx.$$

$$5.30. \int \frac{2x^3 - x^2 - 7x - 12}{x(x-3)(x+1)} dx.$$

$$5.31. \int \frac{2x^3 - 40x - 8}{x(x+4)(x-2)} dx.$$

**Задача 6.** Найти неопределенные интегралы.

$$6.1. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 9}{(x+1)(x+2)^3} dx.$$

$$6.2. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 8}{x(x+2)^3} dx.$$

$$6.3. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{(x+2)(x-2)^3} dx.$$

$$6.4. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 14x + 10}{(x+1)(x+2)^3} dx.$$

$$6.5. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 10}{(x+2)(x-2)^3} dx.$$

$$6.6. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 11x + 7}{(x+1)(x+2)^3} dx.$$

$$6.7. \int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x + 1}{(x-1)(x+1)^3} dx.$$

$$6.8. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 10x + 10}{(x-1)(x+2)^3} dx.$$

$$6.9. \int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x + 2}{x(x+1)^3} dx.$$

$$6.10. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 8}{x(x-2)^3} dx.$$

$$6.11. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 7}{(x+1)(x-2)^3} dx.$$

$$6.12. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 14x - 6}{(x+1)(x-2)^3} dx.$$

$$6.13. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 10x - 10}{(x+1)(x-2)^3} dx.$$

$$6.14. \int \frac{x^3 + x + 2}{(x+2)x^3} dx.$$

6.15. 
$$\int \frac{3x^3 + 9x^2 + 10x + 2}{(x-1)(x+1)^3} dx.$$

6.16. 
$$\int \frac{2x^3 + x + 1}{(x+1)x^3} dx.$$

6.17. 
$$\int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x + 4}{(x+2)(x+1)^3} dx.$$

6.18. 
$$\int \frac{2x^3 + 6x^2 + 5x}{(x+2)(x+1)^3} dx.$$

6.19. 
$$\int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x}{(x-2)(x+1)^3} dx.$$

6.20. 
$$\int \frac{2x^3 + 6x^2 + 5x + 4}{(x-2)(x+1)^3} dx.$$

6.21. 
$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 4x + 24}{(x-2)(x+2)^3} dx.$$

6.22. 
$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 14x + 4}{(x-2)(x+2)^3} dx.$$

6.23. 
$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 18x - 4}{(x-2)(x+2)^3} dx.$$

6.24. 
$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 10x + 12}{(x-2)(x+2)^3} dx.$$

6.25. 
$$\int \frac{x^3 - 6x^2 + 14x - 4}{(x+2)(x-2)^3} dx.$$

6.26. 
$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 15x + 2}{(x-2)(x+2)^3} dx.$$

6.27. 
$$\int \frac{2x^3 - 6x^2 + 7x - 4}{(x-2)(x-1)^3} dx.$$

6.28. 
$$\int \frac{2x^3 - 6x^2 + 7x}{(x+2)(x-1)^3} dx.$$

6.29. 
$$\int \frac{x^3 + 6x^2 - 10x + 52}{(x-2)(x+2)^3} dx.$$

6.30. 
$$\int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{(x+2)(x-2)^3} dx.$$

6.31. 
$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 6}{(x-2)(x+2)^3} dx.$$

**Задача 7.** Найти неопределенные интегралы.

7.1. 
$$\int \frac{x^3 + 4x^2 + 4x + 2}{(x+1)^2(x^2 + x + 1)} dx.$$

7.2. 
$$\int \frac{x^3 + 4x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2(x^2 + 1)} dx.$$

7.3. 
$$\int \frac{2x^3 + 7x^2 + 7x - 1}{(x+2)^2(x^2 + x + 1)} dx.$$

7.4. 
$$\int \frac{2x^3 + 4x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2(x^2 + 2x + 2)} dx.$$

7.5. 
$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 9x + 6}{(x+1)^2(x^2 + 2x + 2)} dx.$$

7.6. 
$$\int \frac{2x^3 + 11x^2 + 16x + 10}{(x+2)^2(x^2 + 2x + 3)} dx.$$

7.7. 
$$\int \frac{3x^3 + 6x^2 + 5x - 1}{(x+1)^2(x^2 + 2)} dx.$$

7.8. 
$$\int \frac{x^3 + 9x^2 + 21x + 21}{(x+3)^2(x^2 + 3)} dx.$$

$$7.9. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 8x + 8}{(x+2)^2(x^2+4)} dx.$$

$$7.10. \int \frac{x^3 + 5x^2 + 12x + 4}{(x+2)^2(x^2+4)} dx.$$

$$7.11. \int \frac{2x^3 - 4x^2 - 16x - 12}{(x-1)^2(x^2+4x+5)} dx.$$

$$7.12. \int \frac{-3x^3 + 13x^2 - 13x + 1}{(x-2)^2(x^2-x+1)} dx.$$

$$7.13. \int \frac{x^3 + 2x^2 + 10x}{(x+1)^2(x^2-x+1)} dx.$$

$$7.14. \int \frac{3x^3 + x + 46}{(x-1)^2(x^2+9)} dx.$$

$$7.15. \int \frac{4x^3 + 24x^2 + 20x - 28}{(x+3)^2(x^2+2x+2)} dx.$$

$$7.16. \int \frac{2x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x^2+x+1)(x^2+1)} dx.$$

$$7.17. \int \frac{x^3 + x + 1}{(x^2+x+1)(x^2+1)} dx.$$

$$7.18. \int \frac{x^2 + x + 3}{(x^2+x+1)(x^2+1)} dx.$$

$$7.19. \int \frac{2x^3 + 4x^2 + 2x + 2}{(x^2+x+1)(x^2+x+2)} dx.$$

$$7.20. \int \frac{2x^3 + 7x^2 + 7x + 9}{(x^2+x+1)(x^2+x+2)} dx.$$

$$7.21. \int \frac{4x^2 + 3x + 4}{(x^2+1)(x^2+x+1)} dx.$$

$$7.22. \int \frac{3x^3 + 4x^2 + 6x}{(x^2+2)(x^2+2x+2)} dx.$$

$$7.23. \int \frac{2x^2 - x + 1}{(x^2-x+1)(x^2+1)} dx.$$

$$7.24. \int \frac{x^3 + x^2 + 1}{(x^2-x+1)(x^2+1)} dx.$$

$$7.25. \int \frac{x^3 + x + 1}{(x^2-x+1)(x^2+1)} dx.$$

$$7.26. \int \frac{2x^3 + 2x + 1}{(x^2-x+1)(x^2+1)} dx.$$

$$7.28. \int \frac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{(x^2+x+1)(x^2+1)} dx.$$

$$7.29. \int \frac{x+4}{(x^2+x+2)(x^2+2)} dx.$$

$$7.30. \int \frac{2x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{(x^2+x+1)(x^2+1)} dx.$$

$$7.30. \int \frac{3x^3 + 7x^2 + 12x + 6}{(x^2+x+3)(x^2+2x+3)} dx.$$

$$7.31. \int \frac{2x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x^2+x+1)(x^2+1)} dx.$$

**Задача 8.** Вычислить определенные интегралы.

$$8.1. \int_{\pi/2}^{2\operatorname{arctg} 2} \frac{dx}{\sin^2 x (1 - \cos x)}.$$

$$8.3. \int_{\pi/2}^{2\operatorname{arctg} 2} \frac{dx}{\sin^2 x (1 + \cos x)}.$$

$$8.5. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x - \sin x}{(1 + \sin x)^2} dx.$$

$$8.7. \int_{2\operatorname{arctg}(1/3)}^{2\operatorname{arctg}(1/2)} \frac{dx}{\sin x (1 - \sin x)}.$$

$$8.9. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{5 + 4 \cos x}.$$

$$8.11. \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{1 + \sin x - \cos x}.$$

$$8.13. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin dx}{1 + \sin x + \cos x}.$$

$$8.15. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{1 + \sin x + \cos x}.$$

$$8.17. \int_{-2\pi/3}^0 \frac{\cos x dx}{1 + \cos x - \sin x}.$$

$$8.19. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}.$$

$$8.21. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{(1 + \sin x)^2}.$$

$$8.23. \int_{-\pi/2}^0 \frac{\sin x dx}{(1 + \cos x - \sin x)^2}.$$

$$8.25. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}.$$

$$8.2. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{2 + \cos x}.$$

$$8.4. \int_{2\operatorname{arctg}(1/2)}^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{(1 - \cos x)^3}.$$

$$8.6. \int_{2\operatorname{arctg} 2}^{2\operatorname{arctg} 3} \frac{dx}{\cos x (1 - \cos x)}.$$

$$8.8. \int_{2\operatorname{arctg}(1/2)}^{\pi/2} \frac{dx}{(1 + \sin x - \cos x)^2}.$$

$$8.10. \int_0^{2\pi/3} \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x + \sin x} dx.$$

$$8.12. \int_0^{\pi/2} \frac{(1 + \cos x) dx}{1 + \sin x + \cos x}.$$

$$8.14. \int_0^{2\operatorname{arctg}(1/2)} \frac{1 + \sin x}{(1 - \sin x)^2} dx.$$

$$8.16. \int_0^{2\operatorname{arctg}(1/3)} \frac{\cos x dx}{(1 - \sin x)(1 + \cos x)}.$$

$$8.18. \int_{-\pi/2}^0 \frac{\cos x dx}{(1 + \cos x - \sin x)^2}.$$

$$8.20. \int_0^{2\operatorname{arctg}(1/2)} \frac{(1 - \sin x) dx}{\cos x (1 + \cos x)}.$$

$$8.22. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}.$$

$$8.24. \int_{-2\pi/3}^0 \frac{\cos^2 x dx}{(1 + \cos x - \sin x)^2}.$$

$$8.26. \int_0^{2\pi/3} \frac{\cos^2 x dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}.$$

$$8.27. \int_{\pi/2}^{2 \operatorname{arctg} 2} \frac{dx}{\sin x (1 + \sin x)}.$$

$$8.28. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}.$$

$$8.29. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{2 + \sin x}.$$

$$8.30. \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x (1 + \cos x)}.$$

$$8.31. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{5 + 3 \sin x}.$$

**Задача 9.** Вычислить определенные интегралы.

$$9.1. \int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 3} \frac{dx}{(3 \operatorname{tg} x + 5) \sin 2x}.$$

$$9.2. \int_{\arccos(4/\sqrt{17})}^{\pi/4} \frac{2 \operatorname{ctg} x + 1}{(2 \sin x + \cos x)^2} dx.$$

$$9.3. \int_0^{\arccos(1/\sqrt{17})} \frac{3 + 2 \operatorname{tg} x}{2 \sin^2 x + 3 \cos^2 x - 1} dx.$$

$$9.4. \int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 3} \frac{4 \operatorname{tg} x - 5}{1 - \sin 2x + 4 \cos^2 x} dx.$$

$$9.5. \int_0^{\operatorname{arctg}(1/3)} \frac{(8 + \operatorname{tg} x)}{18 \sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx.$$

$$9.6. \int_0^{\arccos \sqrt{2/3}} \frac{\operatorname{tg} x + 2}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x - 3} dx.$$

$$9.7. \int_{\arcsin(1/\sqrt{37})}^{\pi/4} \frac{6 \operatorname{tg} x dx}{3 \sin 2x + 5 \cos^2 x}.$$

$$9.8. \int_0^{\pi/4} \frac{2 \operatorname{tg}^2 x - 11 \operatorname{tg} x - 22}{4 - \operatorname{tg} x} dx.$$

$$9.9. \int_{-\operatorname{arctg}(1/3)}^0 \frac{3 \operatorname{tg} x + 1}{2 \sin 2x - 5 \cos 2x + 1} dx.$$

$$9.10. \int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 3} \frac{1 + \operatorname{ctg} x}{(\sin x + 2 \cos x)^2} dx.$$

$$9.11. \int_{\pi/4}^{\arccos(1/\sqrt{3})} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin^2 x - 5 \cos^2 x + 4} dx.$$

$$9.12. \int_0^{\pi/4} \frac{6 \sin^2 x}{3 \cos 2x - 4} dx.$$

$$9.13. \int_0^{\operatorname{arctg} 3} \frac{4 + \operatorname{tg} x}{2 \sin^2 x + 18 \cos^2 x} dx.$$

$$9.14. \int_0^{\operatorname{arctg} 2} \frac{12 + \operatorname{tg} x}{3 \sin^2 x + 12 \cos^2 x} dx.$$

$$9.15. \int_0^{\operatorname{arctg}(2/3)} \frac{6 + \operatorname{tg} x}{9 \sin^2 x + 4 \cos^2 x} dx.$$

$$9.16. \int_0^{\arcsin \sqrt{3/7}} \frac{\operatorname{tg}^2 x dx}{3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x - 7}.$$

$$9.17. \int_0^{\pi/4} \frac{7 + 3 \operatorname{tg} x}{(\sin x + 2 \cos x)^2} dx.$$

$$9.18. \int_{\arcsin(2/\sqrt{5})}^{\arcsin(3/\sqrt{10})} \frac{2 \operatorname{tg} x + 5}{(5 - \operatorname{tg} x) \sin 2x} dx.$$

$$9.19. \int_{-\arccos(1/\sqrt{10})}^0 \frac{3 \operatorname{tg}^2 x - 50}{2 \operatorname{tg} x + 7} dx.$$

$$9.20. \int_0^{\pi/4} \frac{5 \operatorname{tg} x + 2}{2 \sin 2x + 5} dx.$$

$$9.21. \int_{\pi/4}^{\arcsin(2/\sqrt{5})} \frac{4 \operatorname{tg} x - 5}{4 \cos^2 x - \sin 2x + 1} dx.$$

$$9.22. \int_0^{\arcsin \sqrt{7/8}} \frac{6 \sin^2 x}{4 + 3 \cos 2x} dx.$$

$$9.23. \int_{-\arccos(1/\sqrt{5})}^0 \frac{11 - 3 \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + 3} dx.$$

$$9.24. \int_0^{\arcsin 3\sqrt{10}} \frac{2 \operatorname{tg} x - 5}{(4 \cos x - \sin x)^2} dx.$$

$$9.25. \int_{\pi/4}^{\arccos(1/\sqrt{26})} \frac{dx}{(6 - \operatorname{tg} x) \sin 2x}.$$

$$9.26. \int_0^{\pi/4} \frac{4 - 7 \operatorname{tg} x}{2 + 3 \operatorname{tg} x} dx.$$

$$9.27. \int_{-\arcsin(2/\sqrt{5})}^{\pi/4} \frac{2 - \operatorname{tg} x}{(\sin x + 3 \cos x)^2} dx.$$

$$9.28. \int_{\pi/4}^{\arcsin \sqrt{2/3}} \frac{8 \operatorname{tg} x dx}{3 \cos^2 x + 8 \sin 2x - 7}.$$

$$9.29. \int_{\arccos(1/\sqrt{10})}^{\arccos(1/\sqrt{26})} \frac{12 dx}{(6 + 5 \operatorname{tg} x) \sin 2x}.$$

$$9.30. \int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{4 + 3 \cos 2x} dx.$$

$$9.31. \int_0^{\arccos(1/\sqrt{6})} \frac{3 \operatorname{tg}^2 x - 1}{\operatorname{tg}^2 x + 5} dx.$$

**Задача 10.** Вычислить определенные интегралы.

$$10.1. \int_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^8 x dx.$$

$$10.2. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^6 x \cos^2 x dx.$$

$$10.3. \int_0^{2\pi} \sin^4 x \cos^4 x dx.$$

$$10.4. \int_0^{2\pi} \sin^2(x/4) \cos^6(x/4) dx.$$

$$10.5. \int_0^{\pi} 2^4 \cos^8(x/2) dx.$$

$$10.6. \int_{-\pi/2}^0 2^8 \sin^8 x dx.$$

$$10.7. \int_{\pi/2}^{\pi} 2^4 \sin^6 x \cos^2 x dx.$$

$$10.8. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^4 x \cos^4 x dx.$$

$$10.9. \int_0^{2\pi} \sin^2 x \cos^6 x dx.$$

$$10.10. \int_0^{2\pi} \cos^8(x/4) dx.$$

$$10.11. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^8(x/2) dx.$$

$$10.12. \int_{-\pi}^0 2^8 \sin^6 x \cos^2 x dx.$$

$$10.13. \int_{\pi/2}^{2\pi} 2^8 \sin^4 x \cos^4 x dx.$$

$$10.14. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^2 x \cos^6 x dx.$$

$$10.15. \int_0^{2\pi} \cos^8 x dx.$$

$$10.16. \int_0^{2\pi} \sin^8(x/4) dx.$$

$$10.17. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^6(x/2) \cos^2(x/2) dx.$$

$$10.18. \int_{-\pi/2}^0 2^8 \sin^4 x \cos^4 x dx.$$

$$10.19. \int_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^2 x \cos^6 x dx.$$

$$10.20. \int_0^{\pi} 2^4 \cos^8 x dx.$$

$$10.21. \int_0^{2\pi} \sin^8 x dx.$$

$$10.22. \int_0^{2\pi} \sin^6(x/4) \cos^2(x/4) dx.$$

$$10.23. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^4(x/2) \cos^4(x/2) dx.$$

$$10.24. \int_{-\pi/2}^0 2^8 \sin^2 x \cos^6 x dx.$$

$$10.25. \int_{\pi/2}^{2\pi} 2^8 \cos^8 x dx.$$

$$10.26. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^8 x dx.$$

$$10.27. \int_0^{2\pi} \sin^6 x \cos^2 x dx.$$

$$10.28. \int_0^{2\pi} \sin^4(x/4) \cos^4(x/4) dx.$$

$$10.29. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^2(x/2) \cos^6(x/2) dx.$$

$$10.30. \int_{-\pi/2}^0 2^8 \cos^8 x dx.$$

$$10.31. \int_0^{2\pi} \sin^4 3x \cos^4 3x dx.$$

**Задача 11.** Вычислить определенные интегралы.

$$11.1. \int_0^1 \frac{4\sqrt{1-x} - \sqrt{3x+1}}{(\sqrt{3x+1} + 4\sqrt{1-x})(3x+1)^2} dx.$$

$$11.2. \int_1^{64} \frac{1 - \sqrt[6]{x} + 2\sqrt[3]{x}}{x + 2\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^4}} dx.$$



$$11.3. \int_{-14/15}^{-7/8} \frac{6\sqrt{x+2}}{(x+2)^2 \sqrt{x+1}} dx.$$

$$11.4. \int_6^9 \sqrt{\frac{9-2x}{2x-21}} dx.$$

$$11.5. \int_0^5 e^{\sqrt{\frac{5-x}{5+x}}} \frac{dx}{(5+x)\sqrt{25-x^2}}.$$

$$11.6. \int_8^{12} \sqrt{\frac{6-x}{x-14}} dx.$$

$$11.7. \int_0^1 e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}.$$

$$11.8. \int_{5/2}^{10/3} \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}}{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2})(x-2)^2} dx.$$

$$11.9. \int_1^8 \frac{5\sqrt{x+24}}{(x+24)^2 \sqrt{x}} dx.$$

$$11.10. \int_1^2 \frac{x + \sqrt{3x-2} - 10}{\sqrt{3x-2} + 7} dx.$$

$$11.11. \int_6^{10} \sqrt{\frac{4-x}{x-12}} dx.$$

$$11.12. \int_0^2 \frac{(4\sqrt{2-x} - \sqrt{2x+2}) dx}{(\sqrt{2x+2} + 4\sqrt{2-x})(2x+2)^2}.$$

$$11.13. \int_{-1/2}^0 \frac{xdx}{2 + \sqrt{2x+1}}.$$

$$11.14. \int_0^4 e^{\sqrt{\frac{4-x}{4+x}}} \frac{dx}{(4+x)\sqrt{16-x^2}}.$$

$$11.15. \int_{1/8}^1 \frac{15\sqrt{x+3}}{(x+3)^2 \sqrt{x}} dx.$$

$$11.16. \int_{-5/3}^1 \frac{\sqrt[3]{3x+5} + 2}{1 + \sqrt[3]{3x+5}} dx.$$

$$11.17. \int_2^3 \sqrt{\frac{3-2x}{2x-7}} dx.$$

$$11.18. \int_0^7 \frac{\sqrt{x+25}}{(x+25)^2 \sqrt{x+1}} dx.$$

$$11.19. \int_0^2 \frac{(4\sqrt{2-x} - \sqrt{3x+2}) dx}{(\sqrt{3x+2} + 4\sqrt{2-x})(3x+2)^2}.$$

$$11.20. \int_0^2 e^{\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}} \frac{dx}{(2+x)\sqrt{4-x^2}}.$$

$$11.21. \int_3^5 \sqrt{\frac{2-x}{x-6}} dx.$$

$$11.22. \int_{1/24}^{1/3} \frac{5\sqrt{x+1}}{(x+1)^2 \sqrt{x}} dx.$$

$$11.23. \int_9^{15} \sqrt{\frac{6-x}{x-18}} dx.$$

$$11.24. \int_0^1 \frac{(4\sqrt{1-x} - \sqrt{2x+1}) dx}{(\sqrt{2x+1} + 4\sqrt{1-x})(2x+1)^2}.$$

$$11.25. \int_1^{64} \frac{(2 + \sqrt[3]{x}) dx}{(\sqrt[6]{x} + 2\sqrt{x^3} + \sqrt{x}) \sqrt{x}}.$$

$$11.26. \int_{16/15}^{4/3} \frac{4\sqrt{x}}{x^2 \sqrt{x-1}} dx.$$

$$11.27. \int_0^6 \frac{e^{\sqrt{(6-x)/(6+x)}} dx}{(6+x)\sqrt{36-x^2}}.$$

$$11.28. \int_1^{64} \frac{6-\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x^3-7x-6}\sqrt[4]{x^3}} dx.$$

$$11.29. \int_0^1 \frac{(4\sqrt{1-x}-\sqrt{x+1})dx}{(\sqrt{x+1}+4\sqrt{1-x})(x+1)^2}.$$

$$11.30. \int_0^3 \frac{e^{\sqrt{(3-x)/(3+x)}} dx}{(3+x)\sqrt{9-x^2}}.$$

$$11.31. \int_0^2 \frac{(4\sqrt{2-x}-\sqrt{x+2})dx}{(\sqrt{x+2}+4\sqrt{2-x})(x+2)^2}.$$

**Задача 12.** Вычислить определенные интегралы.

$$12.1. \int_0^{16} \sqrt{256-x^2} dx.$$

$$12.2. \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx.$$

$$12.3. \int_0^5 \frac{dx}{(25+x^2)\sqrt{25+x^2}}.$$

$$12.4. \int_0^3 \frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}}.$$

$$12.5. \int_0^{\sqrt{5}/2} \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}.$$

$$12.6. \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4} dx.$$

$$12.7. \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

$$12.8. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}.$$

$$12.9. \int_0^1 \frac{x^4 dx}{(2-x^2)^{3/2}}.$$

$$12.10. \int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{16-x^2}}.$$

$$12.11. \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx.$$

$$12.12. \int_0^4 \frac{dx}{(16+x^2)^{3/2}}.$$

$$12.13. \int_0^4 x^2 \sqrt{16-x^2} dx.$$

$$12.14. \int_0^{5/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{25-x^2}}.$$

$$12.15. \int_0^5 x^2 \sqrt{25-x^2} dx.$$

$$12.16. \int_0^4 \sqrt{16-x^2} dx.$$

$$12.17. \int_0^{4\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(64-x^2)^3}}.$$

$$12.18. \int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^4} dx.$$

$$12.19. \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{x^4 dx}{(16-x^2)\sqrt{16-x^2}}.$$

$$12.20. \int_{-3}^3 x^2 \sqrt{9-x^2} dx.$$

$$12.21. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

$$12.22. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(16-x^2)^3}}.$$

$$12.23. \int_0^2 \frac{x^4 dx}{\sqrt{(8-x^2)^3}}.$$

$$12.24. \int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4} dx.$$

$$12.25. \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx.$$

$$12.26. \int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4} dx.$$

$$12.27. \int_0^2 \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}.$$

$$12.28. \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^4 dx}{(4-x^2)^{3/2}}.$$

$$12.29. \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

$$12.30. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

$$12.31. \int_0^{3/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}.$$

**Задача 13.** Найти неопределенные интегралы.

$$13.1. \int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x^4 \sqrt{x^3}} dx.$$

$$13.2. \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x^3 \sqrt{x^2}} dx.$$

$$13.3. \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{x \sqrt{x}} dx.$$

$$13.4. \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}{x^9 \sqrt{x^4}} dx.$$

$$13.5. \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x^9 \sqrt{x^8}} dx.$$

$$13.6. \int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^2}}{x^9 \sqrt{x^5}} dx.$$

$$13.7. \int \frac{\sqrt[3]{(1 + \sqrt[3]{x^2})^2}}{x^2 \sqrt[9]{x}} dx.$$

$$13.8. \int \frac{\sqrt[3]{(1 + \sqrt{x})^2}}{x^6 \sqrt{x^5}} dx.$$

$$13.9. \int \frac{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}}{x^2} dx.$$

$$13.10. \int \frac{\sqrt{1+x}}{x^2 \sqrt{x}} dx.$$

$$13.11. \int \frac{\sqrt[4]{(1 + \sqrt{x})^3}}{x^8 \sqrt{x^7}} dx.$$

$$13.12. \int \frac{\sqrt[4]{(1 + \sqrt[3]{x})^3}}{x^{12} \sqrt{x^7}} dx.$$

$$13.13. \int \frac{\sqrt[4]{(1 + \sqrt[3]{x^2})^3}}{x^2 \sqrt[6]{x}} dx.$$

$$13.14. \int \frac{\sqrt{1 + \sqrt[4]{x^3}}}{x^2 \sqrt[8]{x}} dx.$$

$$13.15. \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x^3}}}{x^2} dx.$$

$$13.16. \int \frac{\sqrt[3]{(1 + \sqrt[4]{x^3})^2}}{x^2 \sqrt[4]{x}} dx.$$

$$13.17. \int \frac{\sqrt[5]{(1 + \sqrt{x})^4}}{x^{10} \sqrt{x^9}} dx.$$

$$13.18. \int \frac{\sqrt[5]{(1 + \sqrt[3]{x})^4}}{x^5 \sqrt{x^3}} dx.$$

$$13.19. \int \frac{\sqrt[5]{(1 + \sqrt[3]{x^2})^4}}{x^2 \sqrt[5]{x}} dx.$$

$$13.20. \int \frac{\sqrt[5]{(1 + \sqrt[4]{x^3})^4}}{x^2 \sqrt[20]{x^7}} dx.$$

$$13.21. \int \frac{\sqrt[5]{1 + \sqrt[5]{x^4}}}{x^2 \sqrt[25]{x^{11}}} dx.$$

$$13.22. \int \frac{\sqrt{1 + \sqrt[5]{x^4}}}{x^2 \sqrt[5]{x}} dx.$$

$$13.23. \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[5]{x^4}}}{x^2 \sqrt[15]{x}} dx.$$

$$13.24. \int \frac{\sqrt[3]{(1 + \sqrt[5]{x^4})^2}}{x^2 \sqrt[3]{x}} dx.$$

$$13.25. \int \frac{\sqrt[4]{(1 + \sqrt[5]{x^4})^3}}{x^2 \sqrt[5]{x^2}} dx.$$

$$13.26. \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{x^3 \sqrt{x}} dx.$$

$$13.27. \int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^2}}{x^{12}\sqrt{x^5}} dx.$$

$$13.28. \int \frac{\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x}}}{x^{12}\sqrt{x^5}} dx.$$

$$13.29. \int \frac{\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x^6\sqrt{x^5}} dx.$$

$$13.30. \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x}}}{x^{15}\sqrt{x^4}} dx.$$

$$13.31. \int \frac{\sqrt[5]{1+\sqrt[3]{x}}}{x^5\sqrt{x^2}} dx.$$

**Задача 14.** Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций.

$$14.1. \begin{cases} y = (x-2)^3, \\ y = 4x-8. \end{cases}$$

$$14.2. \begin{cases} y = x\sqrt{9-x^2}, & y = 0, \\ (0 \leq x \leq 3). \end{cases}$$

$$14.3. \begin{cases} y = 4-x^2, \\ y = x^2-2x. \end{cases}$$

$$14.4. \begin{cases} y = \sin x \cos^2 x, & y = 0, \\ (0 \leq x \leq \pi/2). \end{cases}$$

$$14.5. \begin{cases} y = \sqrt{4-x^2}, & y = 0, \\ x = 0, & x = 1. \end{cases}$$

$$14.6. \begin{cases} y = x^2\sqrt{4-x^2}, & y = 0, \\ (0 \leq x \leq 2). \end{cases}$$

$$14.7. \begin{cases} y = \cos x \sin^2 x, & y = 0, \\ (0 \leq x \leq \pi/2). \end{cases}$$

$$14.8. \begin{cases} y = \sqrt{e^x-1}, & y = 0, \\ x = \ln 2. \end{cases}$$

$$14.9. \begin{cases} y = \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}, & y = 0, \\ x = 1, & x = e^3. \end{cases}$$

$$14.10. \begin{cases} y = \arccos x, & y = 0, \\ x = 0. \end{cases}$$

$$14.11. \begin{cases} y = (x+1)^2, \\ y^2 = x+1. \end{cases}$$

$$14.12. \begin{cases} y = 2x-x^2+3, \\ y = x^2-4x+3. \end{cases}$$

$$14.13. \begin{cases} y = x\sqrt{36-x^2}, & y = 0, \\ (0 \leq x \leq 6). \end{cases}$$

$$14.14. \begin{cases} x = \arccos y, & x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

$$14.15. \begin{cases} y = \operatorname{arctg} x, & y = 0, \\ x = \sqrt{3}. \end{cases}$$

$$14.16. \begin{cases} y = x^2\sqrt{8-x^2}, & y = 0, \\ (0 \leq x \leq 2\sqrt{2}). \end{cases}$$

$$14.17. \begin{cases} x = \sqrt{e^y - 1}, & x = 0, \\ y = \ln 2. \end{cases}$$

$$14.19. \begin{cases} y = \frac{x}{1 + \sqrt{x}}, & y = 0, \\ x = 1. \end{cases}$$

$$14.21. \begin{cases} x = (y - 2)^3, \\ x = 4y - 8. \end{cases}$$

$$14.23. \begin{cases} y = \frac{x}{(x^2 + 1)^2}, & y = 0, \\ x = 1. \end{cases}$$

$$14.25. \begin{cases} x = \frac{1}{y\sqrt{1 + \ln y}}, & x = 0, \\ y = 1, & y = e^3. \end{cases}$$

$$14.27. \begin{cases} y = x^2 \sqrt{16 - x^2}, & y = 0, \\ (0 \leq x \leq 4). \end{cases}$$

$$14.29. \begin{cases} y = (x - 1)^2, \\ y^2 = x - 1. \end{cases}$$

$$14.31. \begin{cases} x = 4 - (y - 1)^2, \\ x = y^2 - 4y + 3. \end{cases}$$

$$14.18. \begin{cases} y = x\sqrt{4 - x^2}, & y = 0, \\ (0 \leq x \leq 2). \end{cases}$$

$$14.20. \begin{cases} y = \frac{1}{1 + \cos x}, & y = 0, \\ x = \pi/2, & x = -\pi/2. \end{cases}$$

$$14.22. \begin{cases} y = \cos^5 x \sin 2x, & y = 0, \\ (0 \leq x \leq \pi/2). \end{cases}$$

$$14.24. \begin{cases} x = 4 - y^2, \\ x = y^2 - 2y. \end{cases}$$

$$14.26. \begin{cases} y = \frac{e^{1/x}}{x^2}, & y = 0, \\ x = 2, & x = 1. \end{cases}$$

$$14.28. \begin{cases} x = \sqrt{4 - y^2}, & x = 0, \\ y = 0, & y = 1. \end{cases}$$

$$14.30. \begin{cases} y = x^2 \cos x, & y = 0, \\ (0 \leq x \leq \pi/2). \end{cases}$$

**Задача 15.** Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными уравнениями.

$$15.1. \begin{cases} x = 4\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin^3 t, \\ x = 2 \quad (x \geq 2). \end{cases}$$

$$15.2. \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin t, \\ y = 2 \quad (y \geq 2). \end{cases}$$

$$15.3. \begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \\ y = 4 \quad (0 < x < 8\pi, y \geq 4). \end{cases}$$

$$15.4. \begin{cases} x = 16 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \\ x = 2 \quad (x \geq 2). \end{cases}$$

- 15.5.  $\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 6 \sin t, \\ y = 3 \quad (y \geq 3). \end{cases}$
- 15.6.  $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \\ y = 3 \quad (0 < x < 4\pi, y \geq 3). \end{cases}$
- 15.7.  $\begin{cases} x = 16 \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \\ x = 6\sqrt{3} \quad (x \geq 6\sqrt{3}). \end{cases}$
- 15.8.  $\begin{cases} x = 6 \cos t, \\ y = 2 \sin t, \\ y = \sqrt{3} \quad (y \geq \sqrt{3}). \end{cases}$
- 15.9.  $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \\ y = 3 \quad (0 < x < 6\pi, y \geq 3). \end{cases}$
- 15.10.  $\begin{cases} x = 8\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t, \\ x = 4 \quad (x \geq 4). \end{cases}$
- 15.11.  $\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos t, \\ y = 3\sqrt{2} \sin t, \\ y = 3 \quad (y \geq 3). \end{cases}$
- 15.12.  $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \\ y = 9 \quad (0 < x < 12\pi, y \geq 9). \end{cases}$
- 15.13.  $\begin{cases} x = 32 \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \\ x = 4 \quad (x \geq 4). \end{cases}$
- 15.14.  $\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 8 \sin t, \\ y = 4 \quad (y \geq 4). \end{cases}$
- 15.15.  $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \\ y = 6 \quad (0 < x < 12\pi, y \geq 6). \end{cases}$
- 15.16.  $\begin{cases} x = 8 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t, \\ x = 3\sqrt{3} \quad (x \geq 3\sqrt{3}). \end{cases}$
- 15.17.  $\begin{cases} x = 6 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t, \\ x = 2\sqrt{3} \quad (x \geq 2\sqrt{3}). \end{cases}$
- 15.18.  $\begin{cases} x = 10(t - \sin t), \\ y = 10(1 - \cos t), \\ y = 15 \quad (0 < x < 20\pi, y \geq 15). \end{cases}$
- 15.19.  $\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t, \\ x = 1 \quad (x \geq 1). \end{cases}$
- 15.20.  $\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = 4\sqrt{2} \sin t, \\ y = 4 \quad (y \geq 4). \end{cases}$

$$15.21. \begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} \\ y = 1 \quad (0 < x < 2\pi, y \geq 1).$$

$$15.22. \begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t, \end{cases} \\ x = 1 \quad (x \geq 1).$$

$$15.23. \begin{cases} x = 9\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases} \\ y = 2 \quad (y \geq 2).$$

$$15.24. \begin{cases} x = 8(t - \sin t), \\ y = 8(1 - \cos t), \end{cases} \\ y = 12 \quad (0 < x < 16\pi, y \geq 12).$$

$$15.25. \begin{cases} x = 24\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases} \\ x = 9\sqrt{3} \quad (x \geq 9\sqrt{3}).$$

$$15.26. \begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 8\sin t, \end{cases} \\ y = 4\sqrt{3} \quad (y \geq 4\sqrt{3}).$$

$$15.27. \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} \\ y = 2 \quad (0 < x < 4\pi, y \geq 2).$$

$$15.28. \begin{cases} x = 4\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases} \\ x = 2 \quad (x \geq 2).$$

$$15.29. \begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t, \\ y = 5\sqrt{2}\sin t, \end{cases} \\ y = 5 \quad (y \geq 5).$$

$$15.30. \begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases} \\ y = 6 \quad (0 < x < 8\pi, y \geq 6).$$

$$15.31. \begin{cases} x = 32\cos^3 t, \\ y = 3\sin^3 t, \end{cases} \\ x = 12\sqrt{3} \quad (x \geq 12\sqrt{3}).$$

**Задача 16.** Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными в полярных координатах.

$$16.1. r = 4\cos 3\varphi, \quad r = 2 \quad (r \geq 2).$$

$$16.2. r = \cos 2\varphi.$$

$$16.3. r = \sqrt{3}\cos \varphi, \quad r = \sin \varphi, \\ (0 \leq \varphi \leq \pi/2).$$

$$16.4. r = 4\sin 3\varphi, \quad r = 2 \quad (r \geq 2).$$



$$16.5. \quad r = 2 \cos \varphi, \quad r = 2\sqrt{3} \sin \varphi, \\ (0 \leq \varphi \leq \pi/2).$$

$$16.6. \quad r = \sin 3\varphi.$$

$$16.7. \quad r = 6 \sin 3\varphi, \quad r = 3 \quad (r \geq 3).$$

$$16.8. \quad r = \cos 3\varphi.$$

$$r = \cos \varphi,$$

$$r = \sin \varphi,$$

$$16.9. \quad r = \sqrt{2} \sin(\varphi - \pi/4), \\ (-\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/2).$$

$$16.10. \quad r = \sqrt{2} \cos(\varphi - \pi/4), \\ (0 \leq \varphi \leq 3\pi/4).$$

$$16.11. \quad r = 6 \cos 3\varphi, \quad r = 3 \quad (r \geq 3).$$

$$16.12. \quad r = 1/2 + \sin \varphi.$$

$$16.13. \quad r = \cos \varphi, \quad r = \sin \varphi, \\ (0 \leq \varphi \leq \pi/2).$$

$$r = \sqrt{2} \cos(\varphi - \pi/4), \\ 16.14. \quad r = \sqrt{2} \sin(\varphi - \pi/4), \\ (\pi/4 \leq \varphi \leq 3\pi/4).$$

$$16.15. \quad r = \cos \varphi, \quad r = 2 \cos \varphi.$$

$$16.16. \quad r = \sin \varphi, \quad r = 2 \sin \varphi.$$

$$16.17. \quad r = 1 + \sqrt{2} \cos \varphi.$$

$$16.18. \quad r = 1/2 + \cos \varphi.$$

$$16.19. \quad r = 1 + \sqrt{2} \sin \varphi.$$

$$16.20. \quad r = (5/2) \sin \varphi, \quad r = (3/2) \sin \varphi.$$

$$16.21. \quad r = (3/2) \cos \varphi, \quad r = (5/2) \cos \varphi.$$

$$16.22. \quad r = 4 \cos 4\varphi.$$

$$16.23. \quad r = \sin 6\varphi.$$

$$16.24. \quad r = 2 \cos \varphi, \quad r = 3 \cos \varphi.$$

$$16.25. \quad r = \cos \varphi + \sin \varphi.$$

$$16.26. \quad r = 2 \sin 4\varphi.$$

$$16.27. \quad r = 2 \cos 6\varphi.$$

$$16.28. \quad r = \cos \varphi - \sin \varphi.$$

$$16.29. \quad r = 3 \sin \varphi, \quad r = 5 \sin \varphi.$$

$$16.30. \quad r = 2 \sin \varphi, \quad r = 4 \sin \varphi.$$

$$16.31. \quad r = 6 \sin \varphi, \quad r = 4 \sin \varphi.$$

**Задача 17.** Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями в прямоугольной системе координат.

17.1.  $y = \ln x, \quad \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15}.$

17.2.  $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}, \quad 1 \leq x \leq 2.$

17.3.  $y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x, \quad 0 \leq x \leq 7/9.$

17.3.  $y = \ln \frac{5}{2x}, \quad \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}.$

17.5.  $y = -\ln \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi/6.$

17.6.  $y = e^x + 6, \quad \ln \sqrt{8} \leq x \leq \ln \sqrt{15}.$

17.7.  $y = 2 + \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{x-x^2}, \quad 1/4 \leq x \leq 1.$

17.8.  $y = \ln(x^2 - 1), \quad 2 \leq x \leq 3.$

17.9.  $y = \sqrt{1-x^2} + \arccos x, \quad 0 \leq x \leq 8/9.$

17.10.  $y = \ln(1-x^2), \quad 0 \leq x \leq 1/4.$

17.11.  $y = 2 + \operatorname{ch} x, \quad 0 \leq x \leq 1.$

17.12.  $y = 1 - \ln \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi/6.$

17.13.  $y = e^x + 13, \quad \ln \sqrt{15} \leq x \leq \ln \sqrt{24}.$

17.14.  $y = -\arccos \sqrt{x} + \sqrt{x-x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1/4.$

17.15.  $y = 2 - e^x, \quad \ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{8}.$

17.16.  $y = \arcsin x - \sqrt{1-x^2}, \quad 0 \leq x \leq 15/16.$

17.17.  $y = 1 - \ln \sin x, \quad \pi/3 \leq x \leq \pi/2.$

17.18.  $y = 1 - \ln(x^2 - 1), \quad 3 \leq x \leq 4.$

17.19.  $y = \sqrt{x-x^2} - \arccos \sqrt{x} + 5, \quad 1/9 \leq x \leq 1.$

17.20.  $y = -\arccos x + \sqrt{1-x^2} + 1, \quad 0 \leq x \leq 9/16.$

17.21.  $y = \ln \sin x, \quad \pi/3 \leq x \leq \pi/2.$

17.22.  $y = \ln 7 - \ln x, \quad \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}.$

17.23.  $y = \operatorname{ch} x + 3, \quad 0 \leq x \leq 1.$

17.24.  $y = 1 + \arcsin x - \sqrt{1-x^2}, \quad 0 \leq x \leq 3/4.$

17.25.  $y = \ln \cos x + 2, \quad 0 \leq x \leq \pi/6.$

17.26.  $y = e^x + 26, \quad \ln \sqrt{8} \leq x \leq \ln \sqrt{24}.$

17.27.  $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + 3, \quad 0 \leq x \leq 2.$

17.28.  $y = \arccos \sqrt{x} - \sqrt{x-x^2} + 4, \quad 0 \leq x \leq 1/2.$

17.29.  $y = \frac{e^x + e^{-x} + 3}{4}, \quad 0 \leq x \leq 2.$

17.30.  $y = e^x + e, \quad \ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{15}.$

$$17.31. y = \frac{1 - e^x - e^{-x}}{2}, \quad 0 \leq x \leq 3.$$

**Задача 18.** Вычислить длины дуг кривых, заданных параметрическими уравнениями.

$$18.1. \begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi.$$

$$18.2. \begin{cases} x = 3(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases} \\ 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$18.3. \begin{cases} x = 4(\cos t + t \sin t), \\ y = 4(\sin t - t \cos t), \end{cases} \\ 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$18.4. \begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi.$$

$$18.5. \begin{cases} x = 10 \cos^3 t, \\ y = 10 \sin^3 t, \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi/2.$$

$$18.6. \begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi.$$

$$18.7. \begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases} \\ \pi \leq t \leq 2\pi.$$

$$18.8. \begin{cases} x = \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{4} \cos 2t, \\ y = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{4} \sin 2t, \end{cases} \\ \pi/2 \leq t \leq 2\pi/3.$$

$$18.9. \begin{cases} x = 3(\cos t + t \sin t), \\ y = 3(\sin t - t \cos t), \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi/3.$$

$$18.10. \begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi/3.$$

$$18.11. \begin{cases} x = 6 \cos^3 t, \\ y = 6 \sin^3 t, \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi/3.$$

$$18.12. \begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases} \\ \pi/2 \leq t \leq \pi.$$

$$18.13. \begin{cases} x = 2,5(t - \sin t), \\ y = 2,5(1 - \cos t), \end{cases} \\ \pi/2 \leq t \leq \pi.$$

$$18.14. \begin{cases} x = 3,5(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 3,5(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi/2.$$

$$18.15. \begin{cases} x = 6(\cos t + t \sin t), \\ y = 6(\sin t - t \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

$$18.16. \begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi/2.$$

$$18.17. \begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi/6.$$

$$18.18. \begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$18.19. \begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases} \quad \pi/2 \leq t \leq 2\pi/3.$$

$$18.20. \begin{cases} x = 2(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 2(2\sin t - \sin 2t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi/3.$$

$$18.21. \begin{cases} x = 8(\cos t + t \sin t), \\ y = 8(\sin t - t \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi/4.$$

$$18.22. \begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$18.23. \begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \end{cases} \quad \pi/6 \leq t \leq \pi/4.$$

$$18.24. \begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 3\pi/2.$$

$$18.25. \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi/2.$$

$$18.26. \begin{cases} x = 4(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 4(2\sin t - \sin 2t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

$$18.27. \begin{cases} x = 2(\cos t + t \sin t), \\ y = 2(\sin t - t \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi/2.$$

$$18.28. \begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 3\pi.$$

$$18.29. \begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi/4.$$

$$18.30. \begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases} \quad \pi/6 \leq t \leq \pi/4.$$

$$18.31. \begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t \sin t, \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi.$$

**Задача 19.** Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями в полярных координатах.

$$19.1. \rho = 3e^{3\varphi/4}, \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$$

$$19.2. \rho = 2e^{4\varphi/3}, \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$$

$$19.3. \rho = \sqrt{2}e^\varphi, \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$$

$$19.4. \rho = 5e^{5\varphi/12}, \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$$

$$19.5. \rho = 6e^{12\varphi/5}, \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$$

$$19.6. \rho = 3e^{3\varphi/4}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/3.$$

$$19.7. \rho = 4e^{4\varphi/3}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/3.$$

$$19.8. \rho = \sqrt{2}e^\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/3.$$

$$19.9. \rho = 5e^{5\varphi/12}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/3.$$

$$19.10. \rho = 12e^{12\varphi/5}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/3.$$

$$19.11. \rho = 1 - \sin \varphi, \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq -\pi/6.$$

$$19.12.$$

$$\rho = 2(1 - \cos \varphi), \quad -\pi \leq \varphi \leq -\pi/2.$$

$$19.13. \rho = 3(1 + \sin \varphi), \quad -\pi/6 \leq \varphi \leq 0.$$

$$19.14. \rho = 4(1 - \sin \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/6.$$

$$19.15. \rho = 5(1 - \cos \varphi), \quad -\pi/3 \leq \varphi \leq 0.$$

$$19.16. \rho = 6(1 + \sin \varphi), \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq 0.$$

$$19.17. \rho = 7(1 - \sin \varphi), \quad -\pi/6 \leq \varphi \leq \pi/6.$$

$$19.18. \rho = 8(1 - \cos \varphi), \quad -2\pi/3 \leq \varphi \leq 0.$$

$$19.19. \rho = 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 3/4.$$

$$19.20. \rho = 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 4/3.$$

$$19.21. \rho = 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 5/12.$$

$$19.22. \rho = 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 12/5.$$

$$19.23. \rho = 4\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 3/4.$$

$$19.24. \rho = 3\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 4/3.$$

$$19.25. \rho = 5\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 12/5.$$

$$19.26. \rho = 2\cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/6.$$

$$19.27. \rho = 8\cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/4.$$

$$19.28. \rho = 6\cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/3.$$

$$19.29. \rho = 2\sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/6.$$

$$19.30. \rho = 8\sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/4.$$

$$19.31. \rho = 6\sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/3.$$

**Задача 20.** Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями.

$$20.1. \frac{x^2}{9} + y^2 = 1, \quad z = y, \quad z = 0 \quad (y \geq 0).$$

$$20.2. z = x^2 + 4y^2, \quad z = 2.$$

$$20.3. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1, \quad z = 0, \quad z = 3.$$

$$20.4. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{36} = -1, \quad z = 12.$$

$$20.5. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1, \quad z = 1, \quad z = 0.$$

$$20.6. x^2 + y^2 = 9, \quad z = y, \quad z = 0 \quad (y \geq 0).$$

$$20.7. z = x^2 + 9y^2, \quad z = 3.$$

$$20.8. \frac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = 1, \quad z = 0, \quad z = 3.$$

$$20.9. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{64} = -1, \quad z = 16.$$

$$20.10. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1, \quad z = 2, \quad z = 0.$$

$$20.11. \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1, \quad z = y\sqrt{3}, \quad z = 0 \quad (y \geq 0).$$

$$20.12. z = 2x^2 + 8y^2, \quad z = 4.$$

$$20.13. \frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{25} - z^2 = 1, \quad z = 0, \quad z = 2.$$

$$20.14. \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{36} = -1, \quad z = 12.$$

$$20.15. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1, \quad z = 3, \quad z = 0.$$

$$20.16. \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{16} = 1, \quad z = y\sqrt{3}, \quad z = 0 \quad (y \geq 0).$$

$$20.17. z = x^2 + 5y^2, \quad z = 5.$$

$$20.18. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1, \quad z = 0, \quad z = 4.$$

$$20.19. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{100} = -1, \quad z = 20.$$

$$20.20. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{64} = 1, \quad z = 4, \quad z = 0.$$

$$20.21. \frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{25} = 1, \quad z = \frac{y}{\sqrt{3}}, \quad z = 0 \quad (y \geq 0).$$

$$20.22. z = 4x^2 + 9y^2, \quad z = 6.$$

$$20.23. x^2 + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1, \quad z = 0, \quad z = 3.$$

$$20.24. \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{100} = -1, \quad z = 20.$$

$$20.25. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{100} = 1, \quad z = 5, \quad z = 0.$$

$$20.26. \frac{x^2}{27} + y^2 = 1, \quad z = \frac{y}{\sqrt{3}}, \quad z = 0 \quad (y \geq 0).$$

$$20.27. z = 2x^2 + 18y^2, z = 6.$$

$$20.28. \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1, z = 0, z = 2.$$

$$20.29. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{64} = -1, z = 16.$$

$$20.30. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{144} = 1, z = 6, z = 0.$$

$$20.31. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{196} = 1, z = 7, z = 0.$$

**Задача 21.** Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций. В вариантах 1–16 ось вращения  $Ox$ , в вариантах 17–31 ось вращения  $Oy$ .

$$21.1. y = -x^2 + 5x - 6, y = 0.$$

$$21.2. 2x - x^2 - y = 0, 2x^2 - 4x + y = 0.$$

$$21.3. y = 3\sin x, y = \sin x, 0 \leq x \leq \pi.$$

$$21.4. y = 5\cos x, y = \cos x, x = 0, x \geq 0.$$

$$21.5. y = \sin^2 x, x = \pi/2, y = 0.$$

$$21.6. x = \sqrt[3]{y-2}, x = 1, y = 1.$$

$$21.7. y = xe^x, y = 0, x = 1.$$

$$21.8. y = 2x - x^2, y = -x + 2, x = 0.$$

$$21.9. y = 2x - x^2, y = -x + 2.$$

$$21.10. y = e^{1-x}, y = 0, x = 0, x = 1.$$

$$21.11. y = x^2, y^2 - x = 0.$$

$$21.12. x^2 + (y-2)^2 = 1.$$

$$21.13. y = 1 - x^2, x = 0, x = \sqrt{y-2}, x = 1. \quad 21.14. y = x^2, y = 1, x = 2.$$

$$21.15. y = x^3, y = \sqrt{x}.$$

$$21.16. y = \sin(\pi x/2), y = x^2.$$

$$21.17. y = \arccos(x/3), y = \arccos x, y = 0.$$

$$21.18. y = \arcsin(x/5), y = \arcsin x, y = \pi/2.$$

$$21.19. y = x^2, x = 2, y = 0.$$

$$21.20. y = x^2 + 1, y = x, x = 0, y = 0.$$

$$21.21. y = \sqrt{x-1}, y = 0, y = 1, x = 0,5. \quad 21.22. y = \ln x, x = 2, y = 0.$$

$$21.23. y = (x-1)^2, y = 1.$$

$$21.24.$$

$$y^2 = x - 2, y = 0, y = x^3, y = 1.$$

$$21.25. y = x^3, y = x^2.$$

$$21.26. y = \arccos(x/5), y = \arccos(x/3), y = 0.$$

21.27.  $y = \arcsin x$ ,  $y = \arccos x$ ,  $y = 0$ .      21.28.  $y = x^2 - 2x + 1$ ,  $x = 2$ ,  $y = 0$ .

21.29.  $y = x^3$ ,  $y = x$ .      21.30.

$y = \arccos x$ ,  $y = \arcsin x$ ,  $x = 0$ .

21.31.  $y = (x-1)^2$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $y = 0$ .

### Задача 22

#### Варианты 1–10

Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобоковой трапеции (рис. 2). Плотность воды  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>, ускорение свободного падения  $g$  положить равным 10 м/с<sup>2</sup>.

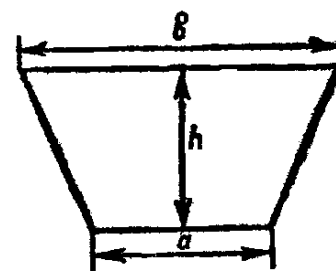


Рис. 2

У к а з а н и е. Давление на глубине  $x$  равно  $\rho g x$ .

22.1.  $a = 4,5$  м,  $b = 6,6$  м,  $h = 3,0$  м.

22.2.  $a = 4,8$  м,  $b = 7,2$  м,  $h = 3,0$  м.

22.3.  $a = 5,1$  м,  $b = 7,8$  м,  $h = 3,0$  м.

22.4.  $a = 5,4$  м,  $b = 8,4$  м,  $h = 3,0$  м.

22.5.  $a = 5,7$  м,  $b = 9,0$  м,  $h = 4,0$  м.

22.6.  $a = 6,0$  м,  $b = 9,6$  м,  $h = 4,0$  м.

22.7.  $a = 6,3$  м,  $b = 10,2$  м,  $h = 4,0$  м.

22.8.  $a = 6,6$  м,  $b = 10,8$  м,  $h = 4,0$  м.

22.9.  $a = 6,9$  м,  $b = 11,4$  м,  $h = 5,0$  м.

22.10.  $a = 7,2$  м,  $b = 12,0$  м,  $h = 5,0$  м.

#### Варианты 11–20

Определить работу (в джоулях), совершаемую при подъеме спутника с поверхности Земли на высоту  $H$  км. Масса спутника равна  $m$  т, радиус Земли  $R_3 = 6380$  км. Ускорение свободного падения  $g$  у поверхности Земли положить равным 10 м/с<sup>2</sup>.

22.11.  $m = 7,0$  т,  $H = 200$  км.

22.12.  $m = 7,0$  т,  $H = 250$  км.

22.13.  $m = 6,0$  т,  $H = 300$  км.

22.14.  $m = 6,0$  т,  $H = 350$  км.

22.15.  $m = 5,0$  т,  $H = 400$  км.

22.16.  $m = 5,0$  т,  $H = 450$  км.

22.17.  $m = 4,0$  т,  $H = 500$  км.

22.18.  $m = 4,0$  т,  $H = 550$  км.



22.19.  $m = 3,0$  т,  $H = 600$  км.

22.20.  $m = 3,0$  т,  $H = 650$  км.

**Варианты 21–31**

Цилиндр наполнен газом под атмосферным давлением (103,3 кПа). Считая газ идеальным, определить работу (в джоулях) при изотермическом сжатии газа поршнем, переместившимся внутрь цилиндра на  $h$  м (рис. 3).

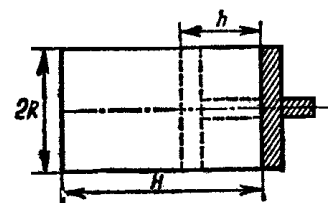


Рис. 3

У к а з а н и е. Уравнение состояния газа  $pV = \text{const}$ , где

$p$  – давление,  $V$  – объем.

22.21.  $H = 0,4$  м,  $h = 0,35$  м,  $R = 0,1$  м.

22.22.  $H = 0,4$  м,  $h = 0,3$  м,  $R = 0,1$  м.

22.23.  $H = 0,4$  м,  $h = 0,2$  м,  $R = 0,1$  м.

22.24.  $H = 0,8$  м,  $h = 0,7$  м,  $R = 0,2$  м.

22.25.  $H = 0,8$  м,  $h = 0,6$  м,  $R = 0,2$  м.

22.26.  $H = 0,8$  м,  $h = 0,4$  м,  $R = 0,2$  м.

22.27.  $H = 1,6$  м,  $h = 1,4$  м,  $R = 0,3$  м.

22.28.  $H = 1,6$  м,  $h = 1,2$  м,  $R = 0,3$  м.

22.29.  $H = 1,6$  м,  $h = 0,8$  м,  $R = 0,3$  м.

22.30.  $H = 2,0$  м,  $h = 1,5$  м,  $R = 0,4$  м.

22.31.  $H = 2,0$  м,  $h = 1,0$  м,  $R = 0,4$  м.