

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Макаренко Елена Николаевна

Министерство образования и науки Российской Федерации

Должность: Ректор

Федеральное государственное бюджетное образовательное

учреждение высшего профессионального образования

Уникальный программный ключ:

«Ростовский государственный экономический университет

c098bc0c1041cb2a4cf926cf171d6715d99a6as00ad8e27b55cbe1e2dbd7c78

(РИНХ)»

Сахарова Л.В.

**ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ
ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ**

Сборник задач по высшей математике

Ростов-на-Дону

2016 г.

§1. Функциональная зависимость

1.1. Дано: $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Найти: $f(2)$; $f(a + 1)$; $f\left(\frac{1}{a}\right)$; $f(2a) + 1$.

1.2. Дано: $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$. Найти: $f(0)$; $f(3)$; $f(-x)$; $f\left(\frac{1}{x}\right)$; $f(x + 1)$; $f(x) + 1$.

1.3. Дано: $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{если } x \leq 0; \\ 3^x, & \text{если } x > 0. \end{cases}$. Найти: $f(-1)$; $f(1)$; $f(0)$; $f\left(-\frac{1}{2}\right)$;
 $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

1.4. Дано: $f(x) = \cos 2x$; $\varphi(x) = x^2 - x$. Найти: $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$; $\varphi(2)$; $f(\varphi(1))$;
 $\varphi\left(f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$; $\varphi(\varphi(2))$.

1.5. Доказать, что функция $y = 2x + 3$ удовлетворяет соотношению
 $f(x + 2) - 2f(x + 1) + f(x) = 0$.

1.6. Доказать, что функция $y = \log_a x$ удовлетворяет соотношению
 $f(x) + f(x + 1) = f(x(x - 1))$.

1.7. Дано: $f(x) = a^x$. Доказать, что

1) $f(-z) \cdot f(z) - 1 = 0$;

2) $f(x) \cdot f(y) = f(x + y)$.

1.8. Дано: $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Найти все корни уравнения $f(x) = f(-1)$.

1.9. Дано: $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 23x$. Найти все корни уравнения
 $f(x) = f(-2)$.

1.10. Дано: $f(x) = x^2 + 6$; $\varphi(x) = 5x$. Найти все корни уравнения
 $f(x) = |\varphi(x)|$.

1.11. Найти области определения следующих функций:

1) $y = \sqrt{x^2 + 2x - 8}$;

2) $y = 5 + \sqrt{4 - x^2}$;

3) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3x}}$;

4) $y = \frac{1}{\ln(1-x)} + \sqrt{x+2}$;

5) $y = \arcsin(2x+1)$;

6) $y = \arccos \frac{4x-1}{2}$;

7) $y = \ln(2-x) + \frac{1}{\sqrt{3+x}}$;

8) $y = \sqrt{3+x} + \arcsin \frac{2+x}{3}$;

9) $y = \frac{2}{25-x^2} + \lg(x^2 - 4x)$;

10) $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{16-x^2}$;

11) $y = \sqrt{2-|x|}$;

12) $y = \frac{1}{\sqrt{x-|x|}}$;

13) $y = \ln|\sin 2x|$;

14) $y = 3\sqrt{\frac{5}{x-2}} - \ln(3x+2)$;

15) $y = \frac{\ln(9-x^2)}{\sqrt{x^2+x-2}}$;

16) $y = \sqrt{\lg \frac{2x-x^2}{4}}$.

1.12. Записать в явном виде функцию y , заданную неявно:

1) $x^2 + y^2 = 9$;

2) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$;

3) $x^3 + y^3 = 27$;

4) $3^{xy} = 2$;

5) $\ln(x+2) + \ln(y+3) = 2$;

6) $3^{x+1}(x+1) = x^5$;

7) $x^2 \sin y - 3 = 2x$;

8) $\ln(2x+3y) = x^2 + 1$.

1.13. Из уравнений, параметрически задающих функцию, исключить параметр:

1) $x = 2t$; $y = t^2 - 3t$;

2) $x = \sin t$; $y = \cos 2t$;

3) $x = t^3 + 2$; $y = t^2$;

4) $x = \cos t$; $y = \sin^2 t + 3\sin 2t$;

5) $x = 2\sin t$; $y = 3\cos t$;

6) $x = 2\cos^3 t$; $y = 2\sin^3 t$.

1.14. Выяснить, какие из следующих функций являются чётными, нечётными, какие не являются ни чётными, ни нечётными:

1) $y = 3x^2 - x^4$;

2) $y = 2x - \frac{x^3}{3} + x^5$;

3) $y = 3x - x^2 + 5$;

4) $y = x^3 - 2\sin x$;

5) $y = 1 + \cos 5x$;

6) $y = \sin x - \cos x$;

7) $y = 3^x$;

8) $y = 5^{-x^2}$;

9) $y = \frac{x}{a^x - 1}$;

10) $y = \frac{a^x + 1}{a^x - 1}$;

11) $y = x \frac{a^x - 1}{a^x + 1}$;

12) $y = \ln \frac{1-x}{1+x}$.

1.15. Для данных функций найти им обратные:

1) $y = 1 - 3x$;

2) $y = x^2 + 3$;

3) $y = \frac{1}{2-x}$;

4) $y = x^2 - 2x$;

5) $y = 10^{x+1}$;

6) $y = 1 + \lg(x+2)$;

7) $y = \log_x 2$;

8) $y = \frac{2^x}{1+2^x}$;

9) $y = 2\sin 3x$;

10) $y = \frac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}} + 1$;

11) $y = 1 + 2\sin \frac{x-1}{x+1}$;

12) $y = 4\arcsin \sqrt{1-x^2}$.

1.16. Какие из следующих функций являются периодическими:

1) $y = 2\cos 3x$;

2) $y = \cos^2 4x$;

3) $y = \sin x^2$;

4) $y = \sin \frac{1}{x}$;

5) $y = x \sin x$;

6) $y = 1 + \operatorname{tg} x$;

7) $y = 3$;

8) $y = [x]$;

9) $y = x - [x]$;

10) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2\operatorname{tg} \frac{x}{3}$.

§2. Пределы

В задачах 2.1–2.64 вычислить пределы:

- | | |
|---|--|
| 2.1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+1)^2}{5n^2}$. | 2.2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{50n^3 + 3n^2}{0,2n^4 - 3n^3 + 5}$. |
| 2.3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 100n - 3}{1000n^2 + 7}$. | 2.4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 + (n-1)^2}$. |
| 2.5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^4 + (n-1)^4}$. | 2.6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^4 - (n-1)^4}{(2n+1)^4 + (n-1)^4}$. |
| 2.7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+10)(n+11)(n+12)}{(3n+10)(4n+11)(5n+12)}$. | 2.8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 - 3n + 1}}{5n + 2}$. |
| 2.9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{5n^2 + n}}{7n - 2}$. | 2.10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(n + \sqrt{n^2 + 3}\right)^2}{\sqrt[3]{8n^6 + 1}}$. |
| 2.11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + \sqrt{1+n^2+n^4}}{\sqrt{9n^4 + 1}}$. | 2.12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n! - (n+1)!}$. |
| 2.13. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)!}{(n+3)! + (n+2)!}$. | 2.14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! - (n+1)!}{(n+2)! + (n+1)!}$. |
| 2.15. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}$. | 2.16. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2+3+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2} \right)$. |
| 2.17. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2+3-4+\dots-2n}{\sqrt{n^2+1}}$. | 2.18. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} \right)$. |
| 2.19. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 1}{5^n + 1}$. | 2.20. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{5^n} - 1}{\frac{1}{5^n} + 1}$. |

$$2.21. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-2x}{3x-2}.$$

$$2.22. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3+7x^2-2}{6x^3-4x+3}.$$

$$2.23. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+4x-x^4}{x+3x^2+2x^4}.$$

$$2.24. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^5-3x^2+8}{2x^5+2x-1}.$$

$$2.25. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4-5x}{x^2-3x+1}.$$

$$2.26. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^{10}+(x+2)^{10}+\dots+(x+50)^{10}}{2x^{10}+10^{10}}.$$

$$2.27. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - x \right).$$

$$2.28. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2+x+3} - \sqrt{x^2-4x} \right).$$

$$2.29. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x} \right).$$

$$2.30. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+3} \right).$$

$$2.31. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \left(\sqrt{x^2+1} - x \right).$$

$$2.32. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x-2}{x^2-1}.$$

$$2.33. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+3}{x^2-1}.$$

$$2.34. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2-4x+3}.$$

$$2.35. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-x-2}{x^3+1}.$$

$$2.36. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+x-6}{x^2+2x-3}.$$

$$2.37. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{3x^2+5x-2}{6x^2+x-1}.$$

$$2.38. \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{10x^2+7x+1}{2x^2-5x-3}.$$

$$2.39. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-x^2-x-2}{x^3-8}.$$

$$2.40. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+2x^2-x-2}.$$

$$2.41. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2-x-2)^2}{x^3-3x-2}.$$

$$2.42. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3-3x^2+4}.$$

$$2.43. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+2x}-3}{5x}.$$

$$2.44. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-x}{2-\sqrt{4-3x}}.$$

$$2.45. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5x+1}-1}{4-\sqrt{7x+16}}.$$

$$2.46. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+5}-3}.$$

$$2.47. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{1 - \sqrt{4 + 3x}}.$$

$$2.49. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}.$$

$$2.51. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x + 13} - 2\sqrt{x + 1}}{x^2 - 4x + 3}.$$

$$2.53. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 16}.$$

$$2.55. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{2x}}{x^2 - 1}.$$

$$2.57. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt[3]{x + 4} - 2}{\sqrt{2x + 1} - 3}.$$

$$2.59. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}.$$

$$2.61. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 + x)^2 - (1 + 3x)}{x^2 - x^5}.$$

$$2.63. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{2 - x} - \frac{x^2}{4 - x^2} \right).$$

$$2.48. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{\sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{3}}.$$

$$2.50. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - 2x + x^2} - (1 + x)}{x}.$$

$$2.52. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{\sqrt{x}}.$$

$$2.54. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 3x} - \sqrt{1 - 2x}}{x + x^2}.$$

$$2.56. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x + 1} - 1}{7x}.$$

$$2.58. \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4}.$$

$$2.60. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 - x}.$$

$$2.62. \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{x + 1} - \frac{2}{1 - x^2} \right).$$

$$2.64. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x - 2} - \frac{12}{x^3 - 8} \right).$$

В задачах 2.65–2.134 вычислить пределы функций, используя спецпредделы:

$$2.65. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}.$$

$$2.67. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 5x}.$$

$$2.69. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{x^2 - 3x}.$$

$$2.66. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 3x}{x^2}.$$

$$2.68. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{3}}{\sin^2 2x}.$$

$$2.70. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{\left(\arcsin \frac{x}{3} \right)^2}.$$

$$2.71. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 3x}{x \sin 5x}.$$

$$2.73. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 7x}{1 - \cos^2 3x}.$$

$$2.75. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos 3x}}{\arcsin 2x}.$$

$$2.77. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 2x - \cos^2 3x}{5x^2}.$$

$$2.79. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{x^4}.$$

$$2.81. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{3 - \sqrt{9 - 2x}}.$$

$$2.83. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}.$$

$$2.85. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x \sin 3x}.$$

$$2.87. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2}.$$

$$2.89. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \operatorname{tg} x.$$

$$2.91. \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{2}{3}x\right)^{\frac{5}{x}}.$$

$$2.93. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{2x+1}.$$

$$2.72. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{\operatorname{tg}^2 3x}.$$

$$2.74. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 5x}{x^3 - 3x^2}.$$

$$2.76. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 5x}{(\arcsin 2x)^2}.$$

$$2.78. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}.$$

$$2.80. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - 3x} - 1}{\sin^3 x - \sin x}.$$

$$2.82. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - \sqrt{16 - \sin^2 \frac{x}{5}}}{\operatorname{tg}^2 3x}.$$

$$2.84. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}.$$

$$2.86. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin 3x} - \sqrt{1 - \sin 5x}}{\operatorname{tg} 2x}.$$

$$2.88. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}.$$

$$2.90. \lim_{x \rightarrow 2} (2 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4}.$$

$$2.92. \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{7}\right)^{\frac{2}{3x}}.$$

$$2.94. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{3x+1}{x-1}\right)^x.$$

$$2.95. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x+2}{5x-1} \right)^x.$$

$$2.96. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x+3} \right)^{x-1}.$$

$$2.97. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-1}{5x+3} \right)^{3x+7}.$$

$$2.98. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x-5} \right)^{\frac{2x+1}{3}}.$$

$$2.99. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+x}{x^2+3} \right)^{2x}.$$

$$2.100. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+x+1}{x^2-2x+3} \right)^{x+1}.$$

$$2.101. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin 3x)^{\frac{5}{x}}.$$

$$2.102. \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \operatorname{tg}^2 5x)^{\frac{1}{\sin 3x}}.$$

$$2.103. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin^2 \sqrt{x})^{\frac{1}{\operatorname{tg} 3x}}.$$

$$2.104. \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sqrt{2 - \cos x}.$$

$$2.105. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}}.$$

$$2.106. \lim_{x \rightarrow -1} (5 + 4x)^{\frac{3}{2x+2}}.$$

$$2.107. \lim_{x \rightarrow 2} (7 - 3x)^{\frac{3}{x^2-4}}.$$

$$2.108. \lim_{x \rightarrow 2} (2x - 3)^{\frac{3x}{x-2}}.$$

$$2.109. \lim_{x \rightarrow 8} \left(\frac{2x-7}{x+1} \right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-2}}.$$

$$2.110. \lim_{x \rightarrow 0} \left(5 - \frac{4}{\cos x} \right)^{\frac{1}{\sin^2 3x}}.$$

$$2.111. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x)}{\sin 3x}.$$

$$2.112. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-\sin 5x)}{3x}.$$

$$2.113. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+3) - \ln 3}{x}.$$

$$2.114. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\ln 2 - \ln(2+x)}.$$

$$2.115. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\ln(e-x) - 1}.$$

$$2.116. \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}.$$

$$2.117. \lim_{x \rightarrow \infty} (x(\ln(x+5) - \ln x)).$$

$$2.118. \lim_{x \rightarrow -\infty} (3-x)(\ln(1-x) - \ln(2-x)).$$

$$2.119. \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x-2)(\ln(2x-1) - \ln(2x+1)).$$

$$2.120. \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - x \sin^2 x\right)^{\frac{1}{\ln(1+\pi x^2)}}.$$

$$2.121. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}.$$

$$2.123. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{2x}.$$

$$2.125. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{\operatorname{tg} 3x} - 1}{\arcsin \frac{x}{2}}.$$

$$2.127. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{\sin 2x} - 1}{1 - e^{\operatorname{tg} 3x}}.$$

$$2.129. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{3}{x}}{\frac{2}{e^x - 1}}.$$

$$2.131. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{2x}}{5x}.$$

$$2.133. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin 3x}}{5x}.$$

$$2.122. \lim_{x \rightarrow \infty} (n+5) \ln \frac{2n+3}{2n}.$$

$$2.124. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{2x} - 1}{\sin 5x}.$$

$$2.126. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin^2 2x} - 1}{\operatorname{tg}^2 3x}.$$

$$2.128. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 3^{\operatorname{tg} 5x}}{\ln(1 + \sin 2x)}.$$

$$2.130. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x+2) - \ln 3}{e^x - e}.$$

$$2.132. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^x}{\operatorname{tg} \frac{x}{5}}.$$

$$2.134. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}.$$

Вычислить односторонние пределы функций:

$$2.135. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}.$$

$$2.136. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$2.137. \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{1}{1 + e^{1/x}}.$$

$$2.138. \lim_{x \rightarrow -3 \pm 0} \frac{1}{2^{x+3} - 1}.$$

$$2.139. \lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} \frac{x-1}{|x-1|}.$$

$$2.140. \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{|\sin x|}{x}.$$

$$2.141. \lim_{x \rightarrow \pm 0} \left(\frac{\sin 3x}{x}\right)^{\frac{2}{x}}.$$

Сравнить функции α и β , бесконечно малые при $x \rightarrow 0$:

$$2.142. \alpha = 2^{5x} - 1; \beta = \sin^2 \frac{x}{3}.$$

$$2.143. \alpha = \operatorname{arctg} \frac{x}{\pi}; \beta = e^{\sin 2x} - 1.$$

$$2.144. \alpha = \ln(1 - \operatorname{tg}^2 2x); \beta = 3 - \sqrt{24x^2 + 9}.$$

$$2.145. \alpha = \sqrt{1 + \sin^2 \frac{x}{2}} - 1; \beta = \ln(1 - 3x).$$

$$2.146. \alpha = e^{\operatorname{tg} 3x} - \cos 2x; \beta = \ln\left(1 + \sin^2 \frac{x}{3}\right).$$

$$2.147. \alpha = \sqrt{5x^2 + 4} - 2; \beta = \ln(1 - 3x^2).$$

$$2.148. \alpha = x \arcsin \frac{x}{4}; \beta = \cos \frac{x}{2} - \cos^3 \frac{x}{2}.$$

§3. Непрерывность функции

Исследовать на непрерывность функции. Сделать чертёж:

$$3.1. f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{при } x < 0; \\ x^2 - 2 & \text{при } 0 \leq x \leq 2; \\ x & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

$$3.2. f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -2; \\ 2, & -2 \leq x < 1; \\ x^2 - 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$3.3. f(x) = \begin{cases} 3, & x \leq -1; \\ 4 - x^2, & -1 < x \leq 2; \\ x - 3, & x > 2. \end{cases}$$

$$3.4. f(x) = \begin{cases} 2^x, & x < -1; \\ x+1, & -1 \leq x < 0; \\ 1, & \geq 0. \end{cases}$$

$$3.5. f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x}, & x < 0; \\ x+2, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$3.6. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0; \\ 2^x, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$3.7. f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0; \\ x, & 0 \leq x \leq 2; \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

$$3.8. f(x) = \begin{cases} |x| \cdot x + 2, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

$$3.9. f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 2|x|}{|x|}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$3.10. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x}{|x|}, & x \neq 0; \\ 2, & x = 0. \end{cases}$$

$$3.11. f(x) = \begin{cases} \frac{|x^3| - 2x}{|x|}, & x \neq 0; \\ -2, & x = 0. \end{cases}$$

$$3.12. f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{|x+1|} - x, & x \neq -1; \\ 2, & x = -1. \end{cases}$$

$$3.13. y = \frac{x}{x^2 - 4}.$$

$$3.14. y = 5^{\frac{1}{x+3}}$$

$$3.15. y = 3^{1-2x}.$$

$$3.16. y = \frac{1}{\frac{1}{2^{1-x}} + 1}$$

$$3.17. f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \pi; \\ \frac{\pi}{2}, & x \geq \pi. \end{cases}$$

$$3.18. f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \operatorname{tg} x, & 0 < x < \frac{\pi}{2}; \\ x, & \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$3.19. f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x \leq 0; \\ 0, & 0 < x \leq 2; \\ x-2, & x > 2. \end{cases}$$

$$3.20. f(x) = \begin{cases} x-3, & x < 0; \\ x+1, & 0 \leq x \leq 4; \\ 3+\sqrt{x}, & > 4. \end{cases}$$

В задачах 3.21–3.23 найти, при каком значении параметра "а" заданная функция непрерывна при любом значении x.

$$3.21. f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{если } x \leq 1; \\ ax^2 - 2, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

$$3.22. f(x) = \begin{cases} a \cos x, & \text{если } x > 0; \\ 2+x^2, & \text{если } x \leq 0. \end{cases}$$

$$3.23. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}, & \text{если } x \neq 1; \\ a, & \text{если } x = 1. \end{cases}$$

3.24. При каких значениях параметров "a" и "b" функция f(x) будет непрерывна при любом x, если

$$1) f(x) = \begin{cases} -2\sin x, & \text{если } x \leq -\frac{\pi}{2}; \\ a \sin x + b, & \text{если } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}; \\ \cos x, & \text{если } x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} ax + 1, & \text{если } x \leq \frac{\pi}{2}; \\ \sin x + b, & \text{если } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

§4. Производная и дифференциал функции

Продифференцировать заданные функции:

$$4.1. y = \frac{1-2x}{3x+5}. \quad 4.2. y = \frac{x^2+3}{x^2+1}. \quad 4.3. y = \frac{x^3-2x+1}{\sqrt{3}+1}.$$

$$4.4. y = \frac{\pi}{2x+3}. \quad 4.5. y = \frac{2}{x^2+3x-1}. \quad 4.6. y = \sqrt{1+3x^2}.$$

$$4.7. y = \frac{1}{(3x+2)^3}. \quad 4.8. y = \frac{3}{\sqrt{x^2+2}}. \quad 4.9. y = \sqrt{\frac{2x+1}{2x-1}}.$$

$$4.10. y = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}. \quad 4.11. y = \frac{1+2x}{\sqrt{1+3x}}. \quad 4.12. y = x^3 \sqrt{2x+1}.$$

$$4.13. y = \sin \frac{2}{x}. \quad 4.14. y = \cos \frac{2x+1}{3}. \quad 4.15. y = \operatorname{tg} x^2.$$

$$4.16. y = \operatorname{ctg} \frac{2x}{3}. \quad 4.17. y = \sin \sqrt{3x+1}. \quad 4.18. y = \cos^2 3x.$$

$$\begin{array}{lll}
4.19. y = \operatorname{tg}^3 \frac{x}{3}. & 4.20. y = \sqrt{\sin 5x}. & 4.21. y = \left(1 + \sin \frac{x}{2}\right)^4. \\
4.22. y = \sin(\cos 3x). & 4.23. y = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}. & 4.24. y = \cos^2 \left(\sin \frac{1}{x}\right). \\
4.25. y = \sin^2 \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}. & 4.26. y = \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x. & 4.27. y = x^2 \arcsin x. \\
4.28. y = (\arcsin x)^2. & 4.29. y = \arccos(3x + 1). & 4.30. y = \operatorname{arctg} x^2. \\
4.31. y = \arcsin \frac{3x + 1}{\sqrt{2}}. & 4.32. y = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}. & 4.33. y = \frac{x^2}{\operatorname{arctg} x}. \\
4.34. y = \arccos \frac{2}{x}. & 4.35. y = \arcsin \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}. & 4.36. y = \operatorname{arctg}^2 \frac{1}{x}. \\
4.37. y = \sqrt{1 - (\arccos x)^2}. & 4.38. y = x^2 \ln x. & 4.39. y = \ln^2 x. \\
4.40. y = \sqrt{\ln x}. & 4.41. y = \frac{1}{\ln x}. & 4.42. y = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}. \\
4.43. y = \ln(x^2 + 2x). & 4.44. y = \sqrt{1 + \ln^2 x}. & 4.45. y = \ln \arcsin 3x. \\
4.46. y = \log_3(x^3 + 3x). & 4.47. y = \ln^5 \sin 3x. & 4.48. y = \sin^3 \ln x. \\
4.49. y = \ln \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 + 3}. & 4.50. y = \arccos(\ln x). & 4.51. y = x^3 5^x. \\
4.52. y = e^{3x} \sin 2x. & 4.53. y = \frac{2^x}{\sin 3x}. & 4.54. y = 3^{\frac{x}{\ln x}}. \\
4.55. y = \frac{1 + e^{2x}}{1 - e^{2x}}. & 4.56. y = 5^{x^2 - 1}. & 4.57. y = 10^{\sqrt{2x + 1}}. \\
4.58. y = 2^{\frac{\sin x}{3}}. & 4.59. y = \operatorname{tge}^{x^2 + 1}. & 4.60. y = 10^{1 - \sin^3 2x}. \\
4.61. y = \sqrt[3]{\arcsin e^{2x}}. & 4.62. y = \sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x}. \\
4.63. y = \arcsin \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{5x}}. & 4.64. y = \sqrt{1 + 2x} - \ln(x + \sqrt{1 + 2x}).
\end{array}$$

$$4.65. y = \operatorname{tg}^3 2x \cos^2 2x . \quad 4.66. y = \frac{\cos x}{\sin^2 x} - 2 \cos x - 3 \operatorname{Intg} \frac{x}{2} .$$

$$4.67. y = \ln \arcsin \sqrt{1 - e^{2x}} . \quad 4.68. y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - x}{1 + x} .$$

$$4.69. y = e^{2x} \sin 3x \cos^3 3x . \quad 4.70. y = \sin^2 \left(\frac{1 - \ln x}{x} \right) .$$

$$4.71. y = x \sqrt{1 + x^2} \sin 5x . \quad 4.72. y = \frac{1 + x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1 + x^2}} .$$

$$4.73. y = x^3 \arccos x - \frac{x^2 + 2}{3} \sqrt{1 - x^2} .$$

В задачах 4.74–4.87 найти производную по x функции y , заданной неявно.

$$4.74. x^3 + y^3 - 6xy = 0 . \quad 4.75. y^3 - 3y = 4x .$$

$$4.76. y^2 \cos x = \sin 2y . \quad 4.77. 5^{x+y} = 5^x + 5^y .$$

$$4.78. 3x - y \ln y = 0 . \quad 4.79. \sin(xy) - 2x = y^2 .$$

$$4.80. y = 3 + xe^y . \quad 4.81. \sin(2x + 3y) .$$

$$4.82. x \sin y + y \sin x + \cos y = 0 . \quad 4.83. x - y + \operatorname{arctg} y = 1 .$$

$$4.84. x \sin y + \cos(x - y) = 0 . \quad 4.85. (3x + 5y)^4 - \sin(xy) = 3 .$$

$$4.86. e^{3y} - x^2 + (2x + y^2)^{10} = 4 .$$

$$4.87. \sin(xy^2) + \ln(x^2 - 3y) - 5x = 0 .$$

В задачах 4.88–4.102 найти производные y'_x в случае параметрического задания функции.

$$4.88. x = 2 \cos t ; y = 3 \sin t . \quad 4.89. x = 2 \cos^3 t ; y = 3 \sin^3 t .$$

$$4.90. x = a(t - \sin t) ; y = a(1 - \cos t) . \quad 4.91. x = \frac{t+1}{t} ; y = \frac{t-1}{t} .$$

$$4.92. x = \ln(1 + t^2) ; y = t - \operatorname{arctg} t . \quad 4.93. x = \frac{1+t^3}{t^2-1} ; y = \frac{1}{t^2-1} .$$

- 4.94. $x = e^t \sin t$; $y = e^t \cos t$. 4.95. $x = \frac{3at}{1+t^3}$; $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$.
- 4.96. $x = 2 \ln \operatorname{ctg} t$; $y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t$. 4.97. $x = a \cos^2 t$; $y = b \sin^2 t$.
- 4.98. $x = t(1 - \sin t)$; $y = t \cos t$.
- 4.99. $x = \cos t + t \sin t$; $y = \sin t - t \cos t$.
- 4.100. $x = \ln(t + \sqrt{1+t^2})$; $y = t\sqrt{1+t^2}$.
- 4.101. $x = \arcsin(t^2 - 1)$; $y = \arccos 2t$.
- 4.102. $x = a(\sin t - t \cos t)$; $y = a(\cos t + t \sin t)$.

В задачах 4.103–4.110 написать уравнения касательной и нормали к графику функции $y = f(x)$ в заданной точке.

- 4.103. $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$; $x_0 = -2$. 4.104. $y = e^{1-x^2}$; $x_0 = -1$.
- 4.105. $y = \frac{8a^3}{4a^2 + x^2}$; $x_0 = 2a$. 4.106. $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x^2}$; $x_0 = 3$.
- 4.107. $x = \sin t$; $y = \cos 2t$; $t_0 = \frac{\pi}{6}$. 4.108. $x = 2e^t$; $y = e^{-t}$; $t_0 = 0$.
- 4.109. $x = \frac{3at}{1+t^2}$; $y = \frac{3at^2}{1+t^2}$; $t_0 = 2$.
- 4.110. $x = 2 \ln \operatorname{ctg} t + 1$; $y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t$; $t_0 = \frac{\pi}{4}$.
- 4.111. Составить уравнения касательных к линии $y = x - \frac{4}{x}$ в точках её пересечения с осью Ox .
- 4.112. Составить уравнение касательной к линии $y = x^3 + 3x^2 - 5$, перпендикулярной к прямой $2x - by + 1 = 0$.
- 4.113. Составить уравнение нормали к линии $y = x \ln x$, параллельной прямой $2x - 2y + 3 = 0$.
- 4.114. Хорда параболы $y = x^2 - 2x + 5$ соединяет точки с абсциссами $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Составить уравнение касательной к параболе, па-

параллельной хорде.

- 4.115. Составить уравнение нормали к параболе $y = x^2 - 6x + 6$, перпендикулярной к прямой, соединяющей начало координат с вершиной параболы.
- 4.116. Составить уравнения нормалей к параболе $y = x^2 - 4x + 5$ в точках её пересечения с прямой $x - y + 1 = 0$.
- 4.117. Составить уравнение касательной к линии $x = 2\cos t$, $y = \sin t$ в точке $\left(1; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
- 4.118. Составить уравнение касательной к линии $x = t^3 + 1$; $y = t^2 + t + 1$ в точке $(1; 1)$.
- 4.119. Определить углы, под которыми пересекаются кривые $x^2 + y^2 = 8$ и $y^2 = 2x$.
- 4.120. Доказать, что гиперболы $xy = 8$ и $x^2 - y^2 = 12$ пересекаются под прямым углом.
- 4.121. Расстояние S , пройденное телом в течение t секунд после начала движения, определяется по формуле $65S = \frac{1}{8}t^3 + 3t^2$. Найти скорость и ускорение тела при $t = 10$.
- 2.122. Скорость тела, движущегося прямолинейно, определяется формулой $v = 3t + t^2$. Какое ускорение будет иметь тело через 4 секунды после начала движения?
- 4.123. Тело массой 6 г движется прямолинейно по закону $S = -1 + \ln(t+1) + (t+1)^3$. (S выражено в сантиметрах, t – в секундах). Требуется вычислить кинетическую энергию тела $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ через 1 секунду после начала движения.
- 4.124. Найти дифференциал функции:

- 1) $y = x\sqrt{4-x^2} + 4\arcsin \frac{x}{2} - 5$; 2) $y = \sin 3x - x \cos 3x + 4$;
 3) $y = x \ln x - x + 1$; 4) $y = 5^{\ln \operatorname{tg} x}$;
 5) $y = \frac{\cos x}{1-x^2}$; 6) $y = \sqrt{\arcsin x} + (\operatorname{arctg} x)^2$;
 7) $y = 2 \frac{1}{\cos x}$; 8) $y = 3 \frac{1}{x^2} + 3x^3 - 4\sqrt{x}$.

4.125. Вычислить приближённо

- 1) $\arcsin 0,05$; 2) $\arcsin 0,498$; 3) $\operatorname{arctg} 1,04$;
 4) $\ln 1,2$; 5) $\sqrt{\frac{(2,037)^2 - 3}{(2,037)^2 + 5}}$.

Повторное дифференцирование

4.126. Для заданных функций найти производные второго порядка:

- 1) $y = (x^2 + 2)e^{4x+4}$; 2) $y = \operatorname{tg} \ln 3x$;
 3) $y = (1+x^2)\operatorname{arctg} x$; 4) $y = \sqrt{4-x^2}$;
 5) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$; 6) $y = \sqrt{1-x^2} \arcsin x$.

4.127. $y = \cos^2 x$; $y''' = ?$.

4.128. $y = x^3 \ln x$; $y^{IV} = ?$.

4.129. $f(x) = e^{2x-1}$; $f''(0) = ?$.

4.130. $f(x) = \operatorname{arctg} x$; $f''(1) = ?$.

4.131. $y = xe^{3x}$; $y''' = ?$.

4.132. $y = (2x^2 - 7)\ln(x-1)$; $y''' = ?$.

4.133. $y = x \ln(1-3x)$; $y^{IV} = ?$.

4.134. $y = \sin 2x + \cos(x+1)$; $y^V = ?$.

4.135. Для заданных функций найти производные n-го порядка:

- 1) $y = e^{-3x}$; 2) $y = \frac{1}{5x+1}$; 3) $y = \sin^2 x$;

$$4) y = \ln(3x + 2); \quad 5) y = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}; \quad 6) y = \sqrt{3x-1}.$$

Функции, заданные в неявном виде

$$4.136. y = \sin(x + y); \quad \frac{d^2y}{dx^2} = ?.$$

$$4.137. x^3 + y^3 - 3xy = 0; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = ?.$$

$$4.138. e^{x+y} = xy; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = ?.$$

$$4.139. x^2 + y^2 = 4; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = ?.$$

$$4.140. y = 1 + xe^y; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = ?.$$

В задачах 4.141–4.151 для функций, заданных параметрически, найти $\frac{d^2y}{dx^2}$:

$$4.141. x = a \cos^2 t; y = a \sin^2 t. \quad 4.142. x = \ln t; y = t^2 - 1.$$

$$4.143. x = \arcsin t; y = \ln(1 - t^2). \quad 4.144. x = t \cos t; y = t \sin t.$$

$$4.145. x = a(t - \sin t); y = a(1 - \cos t). \quad 4.146. x = \sin t; y = \ln \cos t.$$

$$4.147. x = \arctg t; y = \ln(1 + t^2). \quad 4.148. x = e^t \cos t; y = e^t \sin t.$$

$$4.149. x = \cos^2 t; y = \operatorname{tg}^2 t. \quad 4.150. x = t - \sin t; y = t - \cos t.$$

$$4.151. x = \sqrt{t^3 + 1}; y = \ln t. \quad 4.152. x = \sin t - t \cos t; y = \cos t + t \sin t.$$

$$4.153. x = a \cos t; y = b \sin t. \text{ Найти } \frac{d^3y}{dx^3}.$$

$$4.154. x = a \cos^3 t; y = a \sin^3 t. \text{ Найти } \frac{d^3y}{dx^3}.$$

4.155. Для заданных функций найти дифференциалы 2-го порядка:

$$1) y = \frac{\sin x}{x}; \quad 2) y = \sin(2x+3); \quad 3) y = 3^{-x^2};$$

$$4) y = \cos^2 \frac{x}{5}; \quad 5) y = (x+2)^3(x-3)^2; \quad 6) y = \sqrt{\ln^2 x - 3}.$$

В задачах 4.156–4.170 найти наибольшее и наименьшее значения заданных функций в указанных промежутках.

$$4.156. y = -3x^4 + 6x^2; [-2; 2]. \quad 4.157. y = x + 2\sqrt{x}; [0; 4].$$

$$4.158. y = \frac{x-1}{x+1}; [0; 4]. \quad 4.159. y = \frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}; [0; 1].$$

$$4.160. y = \frac{1}{x^2-1}; \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]; \quad 4.161. y = \arccos x^2; \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

$$4.162. y = x^3 - 3x^2 + 1; [-1; 4]. \quad 4.163. y = \frac{4-x^2}{4+x^2}; [-1; 3].$$

$$4.164. y = \cos 2x + 2x; \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]. \quad 4.165. y = \operatorname{tg} x - x; \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right].$$

$$4.166. y = \sqrt{4-x^2}; [-2; 2]. \quad 4.167. y = e^{2x} - e^{-2x}; [-2; 1].$$

$$4.168. y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}; [0; 1]. \quad 4.169. y = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}; [0; 1].$$

$$4.170. y = \sin 2x - x; \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Задачи на отыскание наибольших и наименьших значений функций

- 4.171. Число 8 разбить на два таких слагаемых, чтобы сумма их кубов была наименьшей.
- 4.172. Число 36 разложить на два таких множителя, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.
- 4.173. Из углов квадратного листа картона размером 18×18 см² нужно вырезать одинаковые квадраты так, чтобы согнув лист, получить коробку наибольшей вместимости. Какова должна быть сторона вырезаемого квадрата?
- 4.174. Открытый чан имеет форму цилиндра. При данном объёме V каковы должны быть радиус основания и высота цилиндра, что-

бы его поверхность была наименьшей.

- 4.175. Требуется изготовить коническую воронку с образующей, равной 20 см. Какова должна быть высота воронки, чтобы её объём был наибольшим.
- 4.176. Найти высоту цилиндра наибольшего объёма, который можно вписать в шар радиуса R .
- 4.177. Найти высоту конуса наибольшего объёма, который можно вписать в шар радиуса R .
- 4.178. Найти стороны прямоугольника наибольшего периметра, вписанного в полуокружность радиуса R .
- 4.179. Бревно длиной в 20 м имеет форму усечённого конуса, диаметры оснований которого равны соответственно 2 и 1 м. Требуется вырубить из бревна балку с квадратным поперечным сечением, ось которой совпадала бы с осью бревна и объём которой был бы наибольшим. Каковы должны быть размеры балки?
- 4.180. Катер стоит на якорю в 9 км от ближайшей точки берега; с катера нужно послать гонца в лагерь, расположенный в 15 км, считая по берегу от ближайшей к катеру точки берега (лагерь расположен на берегу). Если гонец может делать пешком по 5 км/ч, а на вёслах по 4 км/ч, то в каком пункте берега он должен пристать, чтобы попасть в лагерь в кратчайшее время?
- 4.181. Картина в 1,4 м высотой повешена на стену так, что её нижний край на 1,8 м выше глаза наблюдателя. На каком расстоянии от стены должен стать наблюдатель, чтобы его положение было наиболее благоприятным для осмотра картины (т.е. чтобы угол зрения был наибольшим)?
- 4.182. На странице книги печатный текст должен занимать S квадратных сантиметров. Верхние и нижние поля должны быть по a см, правое и левое по b см. Если принимать во внимание только экономию бумаги, то какими должны быть наиболее выгодные размеры страницы?

В задачах 4.183–4.232 вычислить пределы, пользуясь правилом Лопиталья.

$$4.183. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}.$$

$$4.185. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - \cos 3x}{e^{5x} - \cos 5x}.$$

$$4.187. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x}.$$

$$4.189. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}.$$

$$4.191. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - e^x}{\operatorname{tg} x - x}.$$

$$4.193. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}.$$

$$4.195. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - x^3 - 1}{\sin^6 2x}.$$

$$4.197. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 2x}{\ln \cos 3x}.$$

$$4.199. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{\cos 3x - e^{-x}}.$$

$$4.201. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1 + 2 \ln \sin x}.$$

$$4.203. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(x-3)}{\ln(e^x - e^3)}.$$

$$4.205. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x}.$$

$$4.184. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\sin 5x}.$$

$$4.186. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}.$$

$$4.188. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}.$$

$$4.190. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 3x - 1}{\sin^2 5x}.$$

$$4.192. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}.$$

$$4.194. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - x - 1}{\cos x + \frac{x^2}{2} - 1}.$$

$$4.196. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{ctg} x - 1}{\sin 4x}.$$

$$4.198. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x^2 - 3)}{x^2 + 3x - 10}.$$

$$4.200. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x}.$$

$$4.202. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}.$$

$$4.204. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1-x) + \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}{\operatorname{ctg} \pi x}.$$

$$4.206. \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{3}{x}.$$

$$4.207. \lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$4.209. \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \operatorname{ctg} \pi(x-1).$$

$$4.211. \lim_{x \rightarrow 1} (1-x^2) \frac{\pi x}{2}.$$

$$4.213. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right).$$

$$4.215. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{arctg} x} - \frac{1}{x} \right).$$

$$4.217. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x \right).$$

$$4.219. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x) \frac{3}{x^2}.$$

$$4.221. \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x) \frac{1}{\ln x}.$$

$$4.223. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\operatorname{ctg} 2x}.$$

$$4.225. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x}.$$

$$4.227. \lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x) \frac{1}{x}.$$

$$4.229. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x)^{\cos x}.$$

$$4.231. \lim_{x \rightarrow +0} (\ln \operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}.$$

$$4.208. \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + e^{-x} - 2) \operatorname{ctg} x.$$

$$4.210. \lim_{x \rightarrow 1} \sin(x-1) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}.$$

$$4.212. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right).$$

$$4.214. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right).$$

$$4.216. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right).$$

$$4.218. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\operatorname{ctg} x} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right).$$

$$4.220. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\sin \frac{\pi x}{2} \right)^{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi x}{2}}.$$

$$4.222. \lim_{x \rightarrow \infty} (x + 2^x) \frac{1}{x}.$$

$$4.224. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2x - \pi}.$$

$$4.226. \lim_{x \rightarrow a} \left(2 - \frac{x}{a} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a}}.$$

$$4.228. \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{1}{\ln(e^x - 1)}.$$

$$4.230. \lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}.$$

$$4.232. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}.$$

§5. Исследование функций. Построение графиков

В задачах 5.1–5.18 найти промежутки монотонности и экстремумы функций.

$$5.1. y = 2x^3 - 3x^2.$$

$$5.2. y = \frac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}.$$

$$5.3. y = \frac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}.$$

$$5.4. y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 64}.$$

$$5.5. y = \frac{2}{3}x^2\sqrt[3]{6x - 7}.$$

$$5.6. y = \frac{1 + 3x}{\sqrt{4 + 5x^2}}.$$

$$5.7. y = \sqrt[3]{(x^2 - 4)^2}.$$

$$5.8. y = (x - 5)^2\sqrt[3]{(x + 1)^2}.$$

$$5.9. y = -x^2\sqrt{x^2 + 2}.$$

$$5.10. y = \frac{1}{\ln(x^4 + 4x^3 + 30)}.$$

$$5.11. y = x - e^x.$$

$$5.12. y = x^2e^{-x}.$$

$$5.13. y = x^2e^{4x}.$$

$$5.14. y = 2x^2 - \ln x.$$

$$5.15. y = x - \ln(1 + x).$$

$$5.16. y = x - \ln(1 + x^2).$$

$$5.17. y = \frac{x}{\ln x}.$$

$$5.18. y = x - 2\ln x.$$

В задачах 5.19–5.32 найти промежутки вогнутости, выпуклости и точки перегиба графиков заданных функций.

$$5.19. y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5.$$

$$5.20. y = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2.$$

$$5.21. y = \frac{x^3}{x^2 + 3}.$$

$$5.22. y = 5 - \sqrt[3]{x - 1}.$$

$$5.23. y = \ln(1 + x^2).$$

$$5.24. y = \frac{2}{x} \ln \frac{x}{2}.$$

$$5.25. y = x^4(12\ln x - 7).$$

$$5.26. y = e^{\operatorname{arctg} x}.$$

$$5.27. y = 2x^2 + \ln x.$$

$$5.28. y = \frac{x}{1 + x^2}.$$

5.29. $y = e^{-x^2} + 2x$.

5.30. $y = \ln(1 + x^3)$.

5.31. $y = x^3 \ln x + 1$.

5.32. $y = xe^{2x} + 1$.

В задачах 5.33–5.50 найти асимптоты графиков заданных функций.

5.33. $y = \frac{1}{x^2 - 4x + 5}$.

5.34. $y = \frac{x^2}{2x + 1}$.

5.35. $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$.

5.36. $y = \sqrt[3]{6x^2 + x^3}$.

5.37. $y = \sqrt[3]{8 - x^3}$.

5.38. $y^2(x^2 + 1) = x^2(x^2 - 1)$.

5.39. $y = x^2 e^{-3x}$.

5.40. $y = xe^{\frac{1}{x^2}}$.

5.41. $y = x \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$.

5.42. $y = xe^{\frac{2}{x}} + 1$.

5.43. $y = 3x + \operatorname{arctg} 5x$.

5.44. $y = \frac{x^2 - x - 6}{x - 2}$.

5.45. $y = \frac{1}{x} + 4x^2$.

5.46. $y = xe^{\frac{1}{x}}$.

5.47. $y = \sqrt{1 + x^2} + 2x$.

5.48. $y = \frac{x}{2x - 1} + x$.

5.49. $y = \frac{1}{e^x - 1}$.

5.50. $y = (x^2 - 2)e^{-2x}$.

В задачах 5.51–5.126 выполнить полное исследование функций и начертить их графики.

5.51. $y = \frac{x}{x^2 - 1}$.

5.52. $y = \frac{x^3}{3 - x^2}$.

5.53. $y = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}$.

5.54. $y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$.

$$5.55. y = \sqrt[3]{x^2} - x.$$

$$5.57. y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{x^2} + 1.$$

$$5.59. y = xe^{\frac{x^2}{2}}.$$

$$5.61. y = \ln(x^2 - 2x).$$

$$5.63. y = \frac{1}{1 - e^{3x}}.$$

$$5.65. y = \frac{2x^2}{4x^2 - 1}.$$

$$5.67. y = \frac{e^x}{e^x - 1}.$$

$$5.69. y = \ln(x^2 + 4x).$$

$$5.71. y = \frac{2x+1}{x^2}.$$

$$5.73. y = x - \sqrt[3]{x^2}.$$

$$5.75. y = \frac{x^3}{x-1}.$$

$$5.77. y = x - \ln(x+1).$$

$$5.79. y = \frac{3x^4 + 1}{x^3}.$$

$$5.81. y = \frac{x^4 + 3}{x}.$$

$$5.83. y = \frac{x^3 + 1}{x^2}.$$

$$5.56. y = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}.$$

$$5.58. y = \frac{(x-3)^2}{4(x-1)}.$$

$$5.60. y = x - \ln(2-x).$$

$$5.62. y = \ln(1-x^2).$$

$$5.64. y = \frac{x-1}{x(x-2)}.$$

$$5.66. y = xe^{-x}.$$

$$5.68. y = \frac{x^2 - x - 1}{x(x-2)}.$$

$$5.70. y = \frac{2-4x^2}{1-4x^2}.$$

$$5.72. y = \frac{x}{3-x^2}.$$

$$5.74. y = \ln(x^2 - 4x + 8).$$

$$5.76. y = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}.$$

$$5.78. y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}.$$

$$5.80. y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}.$$

$$5.82. y = \sqrt[3]{1-x^2}.$$

$$5.84. y = \sqrt{8+x} - \sqrt{8-x}.$$

$$5.85. y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}.$$

$$5.87. y = \sqrt[3]{x} - \frac{x}{3}.$$

$$5.89. y = \frac{x^2 + 1}{x}.$$

$$5.91. y = \frac{x}{(x-1)^2}.$$

$$5.93. y = \ln(x^2 - 4).$$

$$5.95. y = x^3 e^{-x}.$$

$$5.97. y = e^{\frac{1}{x}}.$$

$$5.99. y = \frac{x-3}{(x-2)^2}.$$

$$5.101. y = \frac{x^3}{(x-2)^2}.$$

$$5.103. y = x - \ln x.$$

$$5.105. y = \frac{1}{x} + 4x^2.$$

$$5.107. y = \frac{x^3 + 16}{x}.$$

$$5.109. y = \frac{2}{x^2 + x + 1}.$$

$$5.111. y = x - 2 \arctg x.$$

$$5.113. y = 2x + \arctg \frac{x}{2}.$$

$$5.115. y = \frac{(x-1)^2}{x^2}.$$

$$5.86. y = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}.$$

$$5.88. y = x \ln x.$$

$$5.90. y = \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

$$5.92. y = \frac{e^x}{x}.$$

$$5.94. y = \ln(2x^2 + 3).$$

$$5.96. y = \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1}.$$

$$5.98. y = \frac{\ln x}{x}.$$

$$5.100. y = \frac{1}{e^x - 1}.$$

$$5.102. y = 2x + 2 - 3\sqrt[3]{(x+1)^2}.$$

$$5.104. y = x^2 e^{-x}.$$

$$5.106. y = \ln \frac{x+1}{x+2}.$$

$$5.108. y = x^2 \ln x.$$

$$5.110. y = x \arctg x.$$

$$5.112. y = e^{-x^2}.$$

$$5.114. y = (x^2 - 2)e^{-2x}.$$

$$5.116. y = \frac{2}{x^2 + 2x}.$$

$$5.117. y = \frac{1-2x}{x^2-x+2}.$$

$$5.119. y = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}.$$

$$5.121. y = \frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

$$5.123. y = \left(1 + \frac{3}{x-1}\right)^2.$$

$$5.125. y = \frac{x^3}{x^2+1}.$$

$$5.118. y = \frac{x^2+5}{x+2}.$$

$$5.120. y = \frac{3x-5}{5x^2}.$$

$$5.122. y = \frac{x^2}{x^2-1}.$$

$$5.124. y = \frac{x^2+1}{2x^2}.$$

$$5.126. y = \frac{x}{x^2+1}.$$